

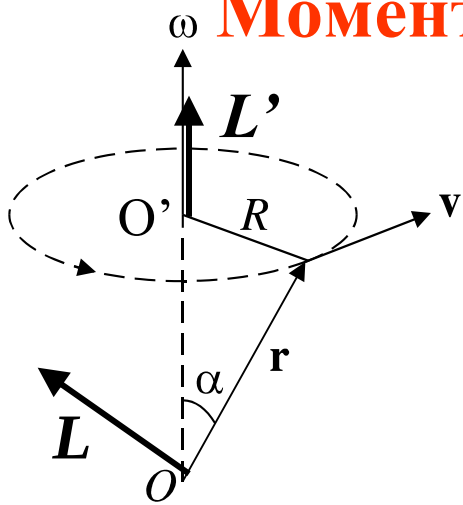
ЛЕКЦИЯ 12

Механика твердого тела

Момент инерции и примеры его вычисления.

Теорема Штейнера.

Момент инерции МТ относительно оси вращения



Величина угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Изменение угловой скорости со временем определяется вектором углового ускорения

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dot{\omega}$$

При вращении по окружности **момент импульса МТ L** относительно точки O : $L = [r, mv]$ и направления векторов L и ω не совпадают если точка O не в центре окружности. Если движение идет по окружности и точка O' в центре окружности то направления векторов L' и ω совпадают.

$$L' = Rmv \sin 90^\circ = Rmv = Rm \cdot \omega R = mR^2 \omega = I\omega$$

Скалярная величина $I = mR^2$ называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения.

Момент инерции твердого тела

Твердое тело можно представить как систему **МТ**, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с **МТ** записать:

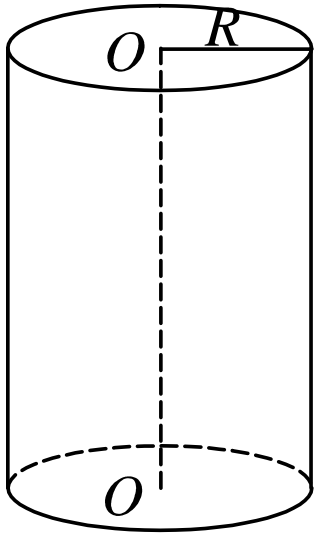
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{N}_{\text{внеш}}$$

Пусть $\mathbf{L}_i$ момент импульса i -й частицы, r_i — радиус окружности, по которой движется **МТ** Δm_i относительно оси вращения тела. Направление $\mathbf{L}_i$ всех точек тела относительно оси вращения одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \omega \sum \Delta m_i r_i^2 = I\omega$$

Величина $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ называется **моментом инерции твердого тела** относительно данной оси. Направление векторов $\mathbf{L}$ и ω совпадают только в случае симметричного тела.

Момент инерции полого цилиндра



Найдем момент инерции **полого** цилиндра относительно его оси симметрии OO' .

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m = m R^2$$

где m — масса цилиндра.

Итак, момент инерции **полого** цилиндра (**обруч, кольцо**) прямо не зависит от высоты этого цилиндра (косвенно зависит так как чем больше высота тем больше масса).

Момент инерции тела- аналог массы при вращательном движении. Он характеризует не только инертность тела, но и распределение массы относительно оси вращения. Для одного и того же тела момент инерции относительно разных осей различен.

Момент инерции сложных тел

Для определения момента инерции более сложных тел выражение $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ следует уточнить, устремив элемент Δm_i к нулю и найдя соответствующий предел:

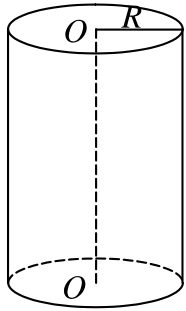
$$I = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Как известно, такой предел называется интегралом:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

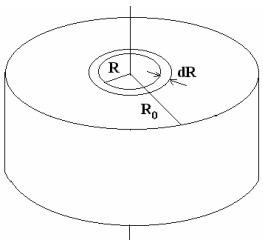
Интегрирование производится по всему объему тела V . Если плотность тела ρ постоянна, то ρ можно вынести из под знака интегрирования.

Момент инерции сплошного цилиндра



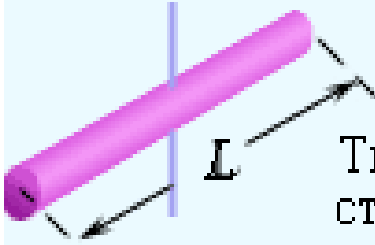
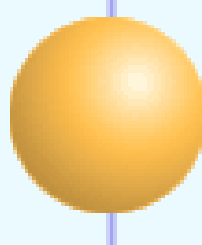
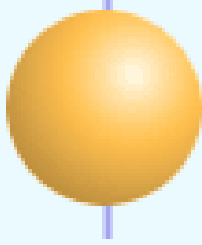
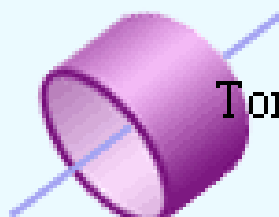
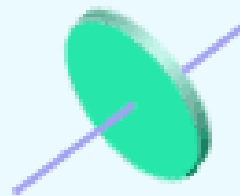
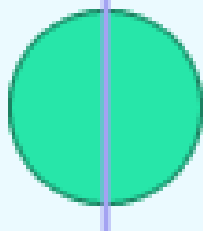
Момент инерции **сплошного однородного цилиндра** относительно оси симметрии OO' можно найти разбив его на цилиндры радиуса r и толщиной dr . Так как объем одного слоя равен $dV = 2\pi r h dr$ то

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \rho (\pi R^2 h) \frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

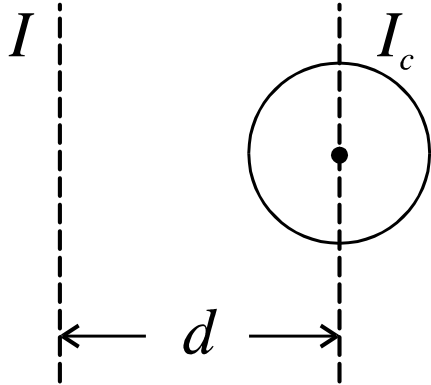


ρ - плотность, dr и h —толщина и высота цилиндра . А у полого цилиндра было mR^2 . **Чем удаленнее масса от центра тем больше I** . При равных m и R у полого момент инерции I в 2 раза больше

Моменты инерции I_C некоторых однородных твердых тел относительно оси, проходящей через центр инерции

$I_C = \frac{1}{12}ML^2$  Твердый стержень	$I_C = \frac{2}{5}MR^2$  Шар	$I_C = \frac{2}{3}MR^2$  Тонкостенная сферическая оболочка
$I_C = MR^2$  Тонкостенный цилиндр	$I_C = \frac{1}{2}MR^2$  Диск	$I_C = \frac{1}{4}MR^2$  Диск

Теорема Штейнера

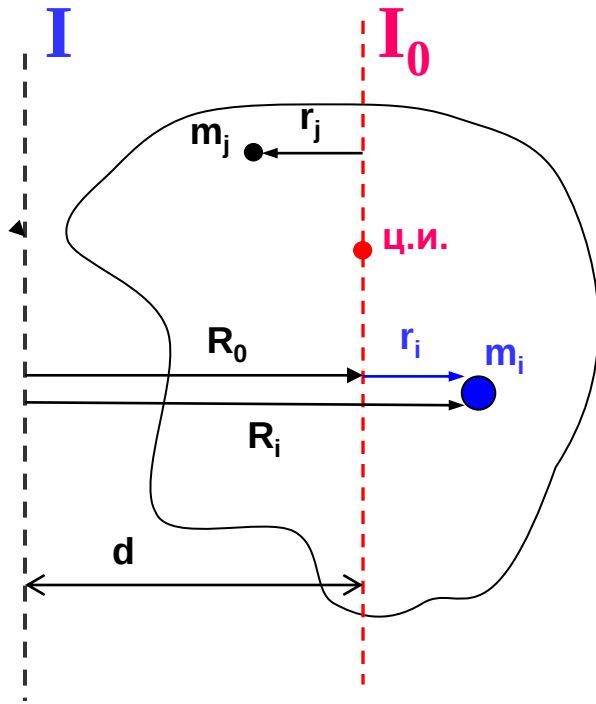


Зная момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, момент инерции относительно произвольной оси вычисляют по **теореме Штейнера**:

момент инерции относительно произвольной оси I равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями d .

$$I = I_c + md^2$$

Вывод теоремы Штейнера



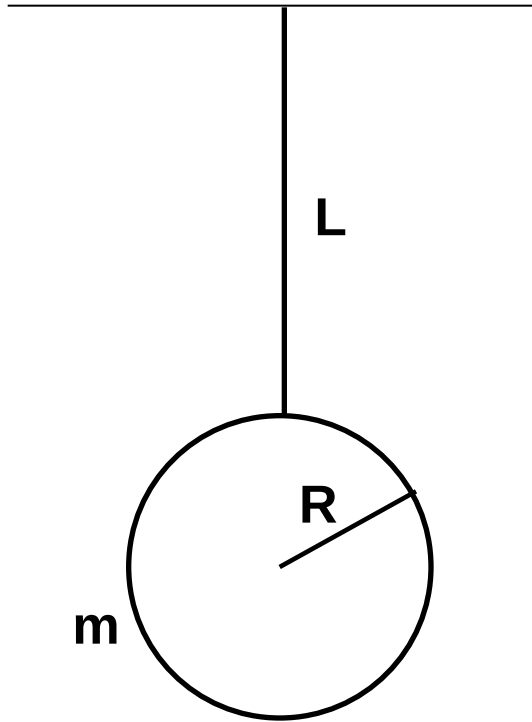
$$\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i \vec{R}_i^2 = \sum m_i (\vec{R}_0 + \vec{r}_i)^2 = \\
 &= \sum m_i \vec{R}_0^2 + \sum m_i 2\vec{R}_0 \vec{r}_i + \sum m_i \vec{r}_i^2 = \\
 &= \underbrace{\vec{R}_0^2}_{d^2} \sum m_i + 2\vec{R}_0 \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{0} + \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i^2}_{I_0}
 \end{aligned}$$

Т.к. $\vec{r}_i$ направлены во все стороны относительно центра инерции они взаимно компенсируются, если тело симметричное. В случае несимметричного тела взаимно компенсируются произведения $\vec{m}_i \vec{r}_i$

$$I = I_0 + md^2$$

Вычислим по теореме Штейнера момент инерции диска на нити



$$I = I_0 + md^2$$

$$d = (L + R)$$

$$I_0 = 1/2 mR^2$$

$$I = 1/2 mR^2 + m(L + R)^2$$

Если $L=0$ (ось проходит через край диска)

$$I = 1/2 mR^2 + mR^2 = 3/2 mR^2$$

Уравнение моментов для материальной точки

Как уже говорилось момент импульса **МТ**, двигающейся по окружности:

$$L = mR^2\omega = I\omega$$

Производная по времени равна:

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta$$

В соответствии с законом изменения момента импульса для **МТ** получаем:

$$I\beta = \sum_i N_{\text{ивнеш}}$$

Уравнение моментов

Заменяя в выражении для кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$ массу на момент инерции I , а скорость v на угловую скорость ω получим кинетическую энергию вращающегося вокруг **неподвижной** оси тела или просто подставив $v = \omega R$:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Подставим момент импульса тела $L = I\omega$

$$\frac{dL}{dt} = I\beta = \sum N_{\text{внеш}}$$

Это **закон изменения момента импульса твердого тела или основной закон динамики для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси**. Как и в случае с **МТ** можно сопоставить все величины для поступательного и вращательного движения.

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{I}\boldsymbol{\beta} = \sum \mathbf{N}_{\text{внеш}}$$

закон изменения момента импульса

Если $\mathbf{N}=0$ то $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \text{const}$

закон сохранения момента импульса



Раскинув руки в стороны и заводя свободную ногу, фигуристка увеличивает момент инерции и замедляет вращение вокруг вертикальной оси.



Резко «сгруппировавшись», она уменьшает момент инерции и получает приращение угловой скорости

Момент инерции в природе



Самолеты убирают шасси во время полета, а, например, пчелы, напротив, вытягивают вперед задние лапки для того, чтобы лететь устойчиво с большей скоростью.

При максимальной скорости в 7.25 метров в секунду пчелы теряют вращательную устойчивость. Это говорит о том, что скорость пчелы ограничивает не сила мускулов или амплитуда машущих крыльев, а наклон тела и умение балансировать в неустойчивом положении. Т.е. до определенной скорости пчелы умеют управлять своим моментом инерции и изменять момент импульса так, чтобы обеспечить условия равновесия (нулевую сумму моментов внешних сил).

Механика поступательного и вращательного движения относительно неподвижной оси

Все выражения для поступательного и вращательного движения внешне очень похожи. 2-й закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_i \qquad \frac{dL}{dt} = I\boldsymbol{\beta} = \sum_i \mathbf{N}_{\text{ивнеш}}$$

Аналогами также являются:

координата	x	- угол φ ,
линейная скорость	v	- угловая скорость ω ,
линейное ускорение	a	- угловое ускорение β ,
масса	m	- момент инерции I ,
сила	F	- момент силы N ,
импульс	p	- момент импульса L ,
кинетическая энергия	$mv^2/2$	- кинетическая энергия $I\omega^2/2$,
работа	$dA = F_s ds$	- работа $dA = N_\omega d\varphi$
мощность	$P = F_v v$	- $P = N_\omega \omega$