

Лекция 14

Гироскопы.

Прецессия гироскопа.

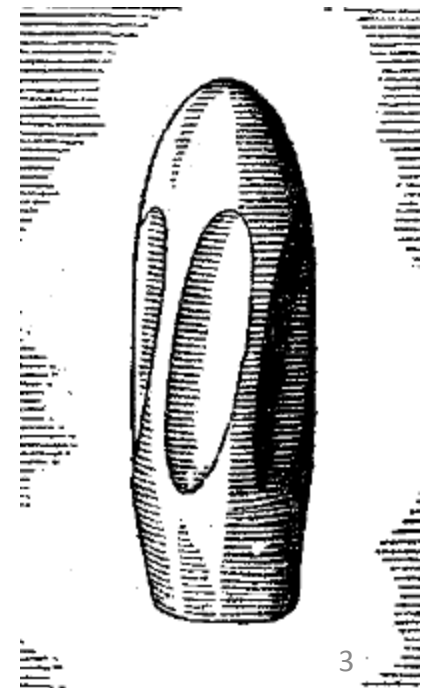
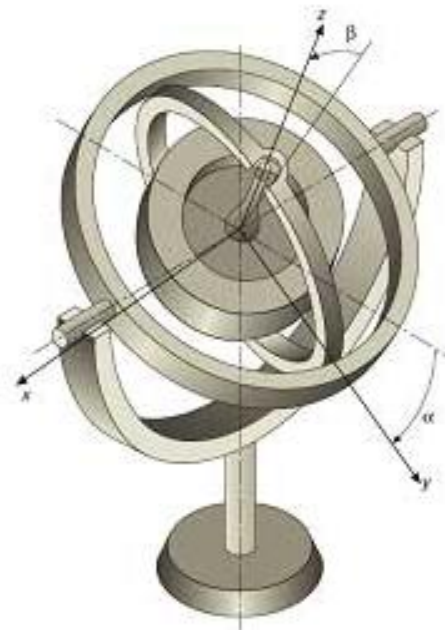
Что такое гироскоп.

Гироскопом называется массивное аксиально-симметричное твердое тело, способное вращаться вокруг оси симметрии с большой угловой скоростью. Ось симметрии гироскопа называют *собственной осью гироскопа* или просто *осью гироскопа*. Она может менять свое положение в пространстве. Примеры гироскопов: юла, маховики гироскопических компасов, роторы турбин различного назначения и пр.

Движение гироскопа с необходимостью представляет собой *движение твердого тела с одной неподвижной точкой*, которая называется *точкой опоры* гироскопа.

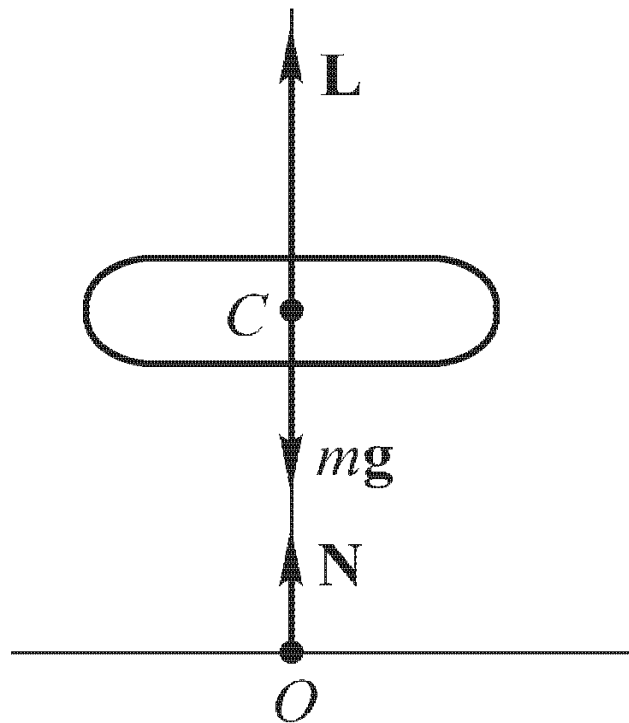
В случае, если неподвижная точка отсутствует, быстро вращающееся аксиально-симметричное тело называют *волчком*.

Гироскопы



Уравновешенный гироскоп

Уравновешенным или ненагруженным называется гироскоп, ось вращения которого вертикальна и момент $\mathbf{M}$ всех внешних сил относительно неподвижной точки гироскопа равен нулю: $\mathbf{M}=0$



В этом случае поведение гироскопа совпадает со свободным вращением вокруг оси симметрии – центральной главной оси:

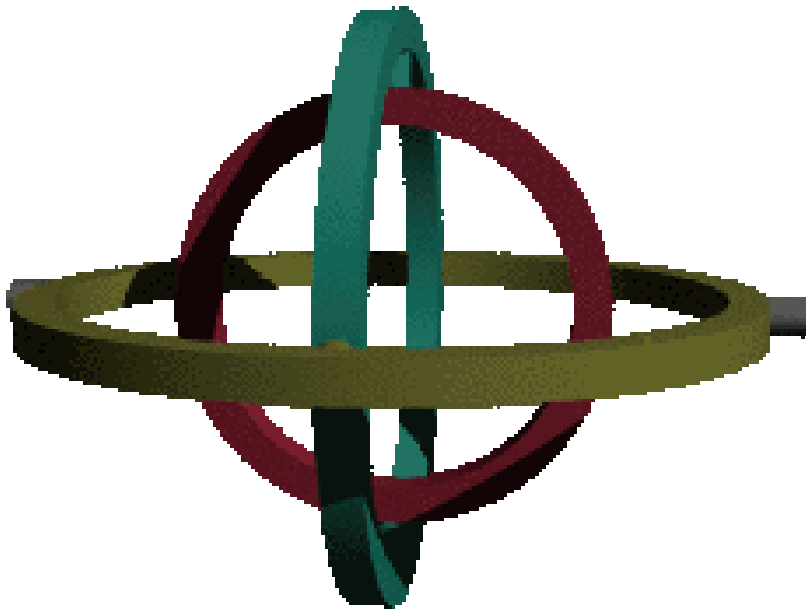
$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}(0)$$

Ось гироскопа все время сохраняет свое направление

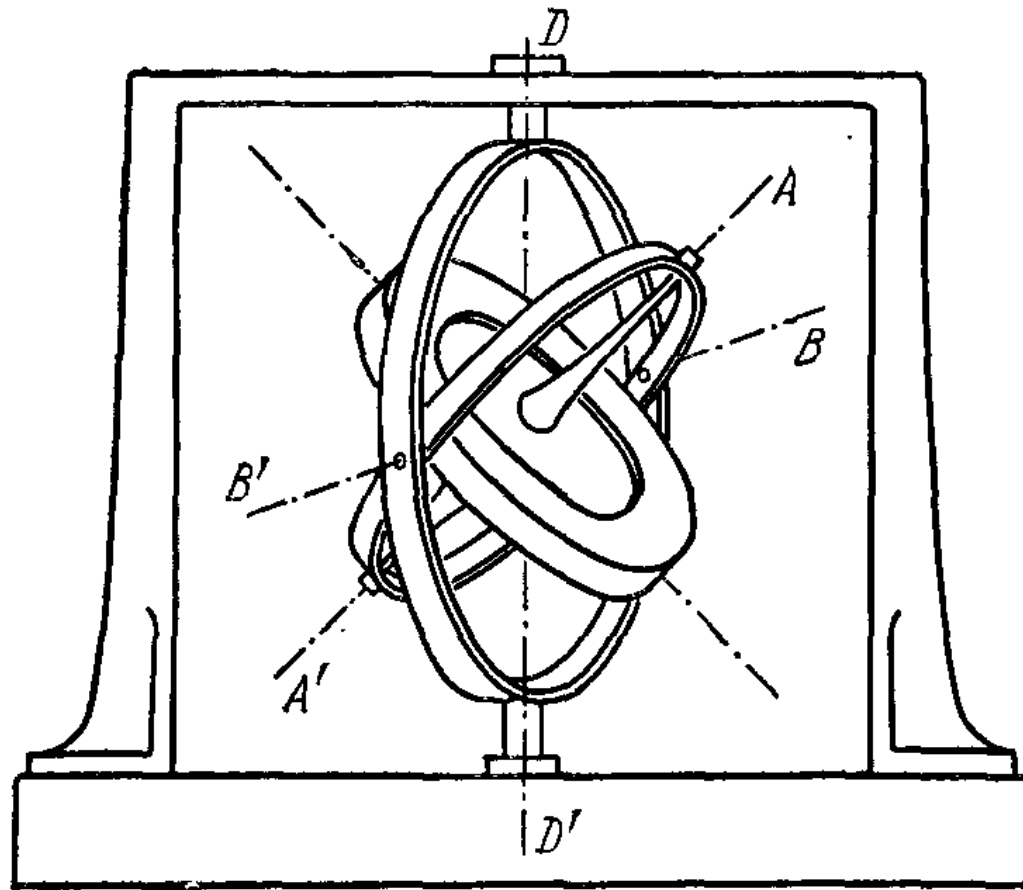
Если ось гироскопа находится в вертикальном положении, то гироскоп может вращаться в этом положении довольно долго.

Гирскоп на кардановом подвесе

- Карданов подвес
- Гирскоп на кардановом подвесе



Гирскоп находится в уравновешенном или ненагруженном состоянии, если точка закрепления совмещена с центром инерции системы. Свободно движущиеся кольца подвеса удерживают ось ненагруженного гироскопа в неизменном направлении



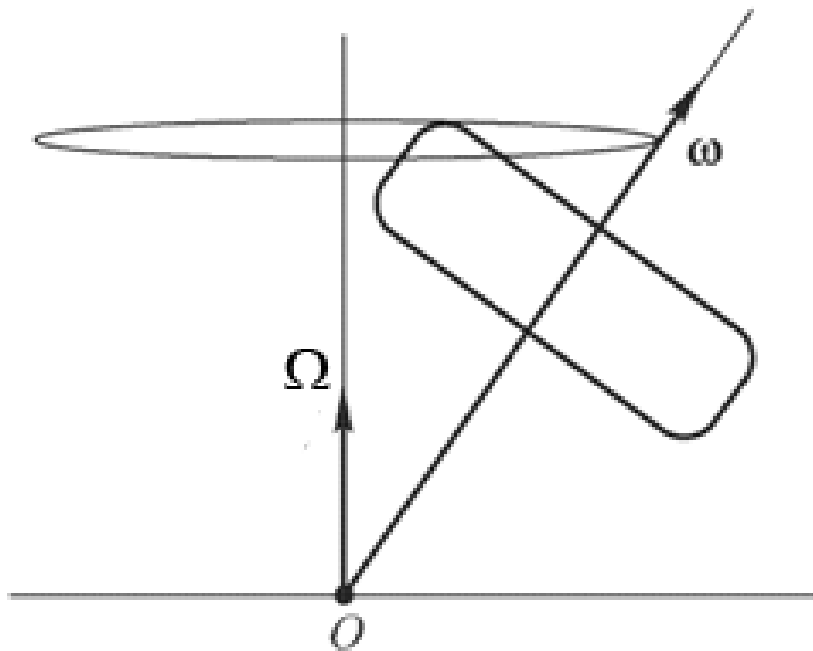
AA' — ось ротора

BB' — ось вращения внутреннего кольца, соединенного с осью ротора

DD' — ось вращения внешнего кольца, укрепленного на неподвижной подставке

Прецессия нагруженного гироскопа

Если ось быстро вращающегося гироскопа слегка отклонить от вертикали, то она начнет *прецессировать* вокруг вертикального положения, т.е. совершать вращательное движение по поверхности конуса.



Прецессию гироскопа можно представить как суперпозицию вращений вокруг двух осей: быстрого вращения вокруг собственной оси и относительно медленного вращения вокруг вертикали. Пересечение этих осей вращения дает неподвижную точку гироскопа. Угловая скорость ω вращения вокруг собственной оси называется *собственной угловой скоростью* гироскопа.

Угловая скорость Ω вращения вокруг вертикальной оси называется *угловой скоростью прецессии* гироскопа: $\Omega \ll \omega$

Чем больше собственная частота вращения тем меньше частота прецессии $\Omega \ll 1/\omega$

Приближенная теория гироскопа

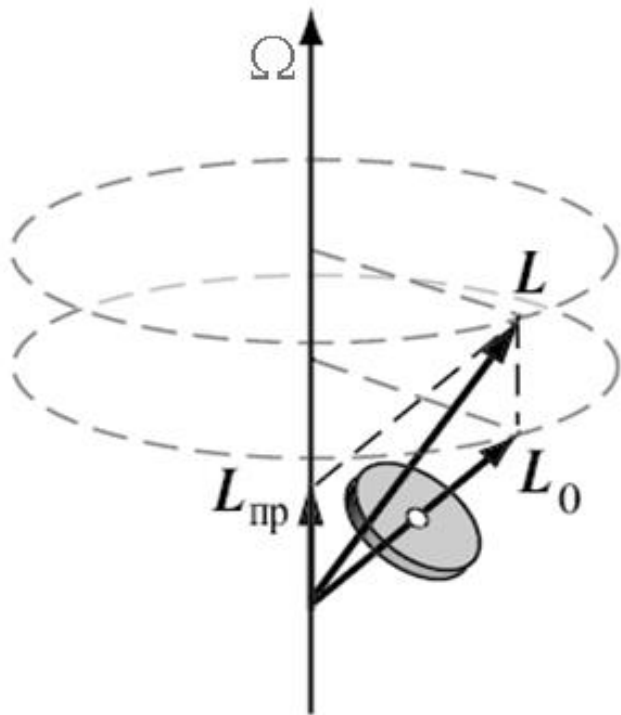
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

В приближенной теории полагается, что вектор момента импульса $\mathbf{L}$ гироскопа все время ориентирован вдоль оси гироскопа и равен моменту импульса собственного вращения:

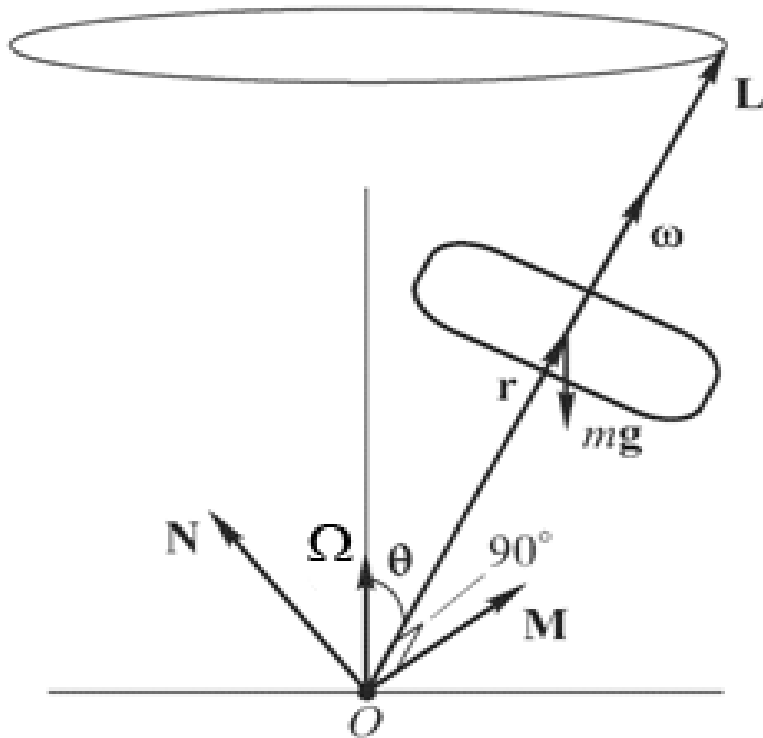
$$\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_0 = I\boldsymbol{\omega}.$$

I - момент инерции гироскопа
относительно своей оси: $I = I_{\square}$

Если скорость прецессии много ниже
собственной скорости вращения $\Omega \ll \omega$
отклонение вектора $\mathbf{L}$ от оси гироскопа
незначительно и им можно пренебречь.



Внешние силы, действующие на гироскоп



Ось гироскопа отклонена от вертикали на угол θ

Момент внешних сил относительно неподвижной точки создает только сила тяжести гироскопа, приложенная к его центру масс, расположенному на оси гироскопа и удаленному от его неподвижной точки на расстояние $\mathbf{r}$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}]$$

$\mathbf{r}$ - радиус вектор, проведенный из неподвижной точки O в центр масс гироскопа

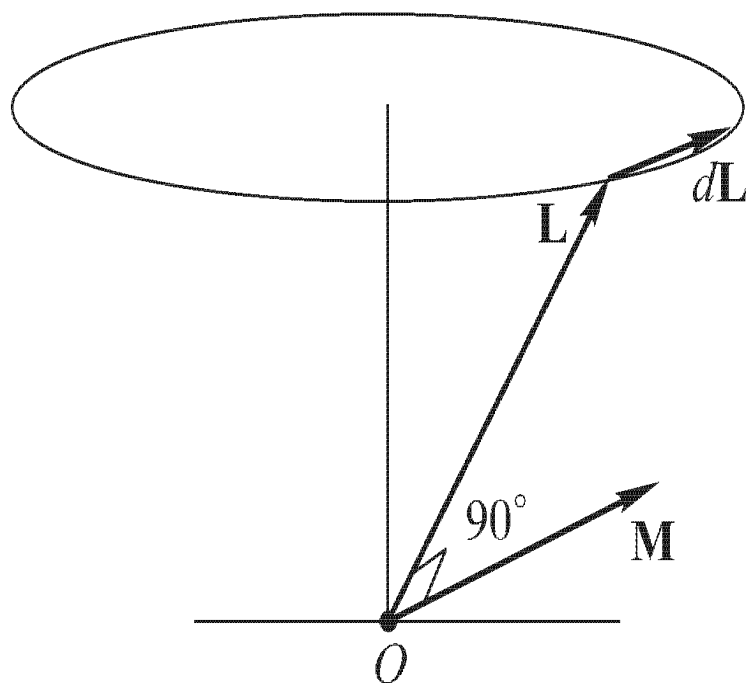
Суммарная внешняя сила, действующая на гироскоп:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = \mathbf{N}_{\perp} + \mathbf{F}_{mp} + m\mathbf{g} = \mathbf{F}_{mp} = \mathbf{F}_{ц.стр}$$

Эта сила приводит во вращение центр масс гироскопа.

Расчет угловой частоты вынужденной прецессии гироскопа

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M} = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}] \Rightarrow \mathbf{M} \perp \mathbf{r} \\ \mathbf{L} \perp \mathbf{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{L}| = \text{const} \\ d\mathbf{L} \perp \mathbf{L} \end{array} \right.$$



$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}] = \mathbf{M}$$

$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}] = -[m\mathbf{g}, \mathbf{r}]$$

$$\Omega I \omega \sin \theta = r m g \sin \theta;$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{r m}{I \omega} \mathbf{g}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ прецессии не зависит от угла наклона θ оси гироскопа с вертикалью и обратно пропорциональна собственной угловой скорости ω

Направление вращения оси гироскопа при вынужденной
регулярной прецессии, обусловленной силой тяжести
гироскопа

$$[\mathbf{\Omega}, \mathbf{L}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}] = -[m\mathbf{g}, \mathbf{r}]$$

$$[\mathbf{\Omega}, I\boldsymbol{\omega}] = [-m\mathbf{g}, \mathbf{r}], \quad \left[I\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Omega}, \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \right] = \left[-mr\mathbf{g}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right]$$

$$\mathbf{\Omega} = -\mathbf{g} \frac{m}{I\omega^2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\omega} \uparrow \uparrow \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Omega} \uparrow \downarrow \mathbf{g}$$

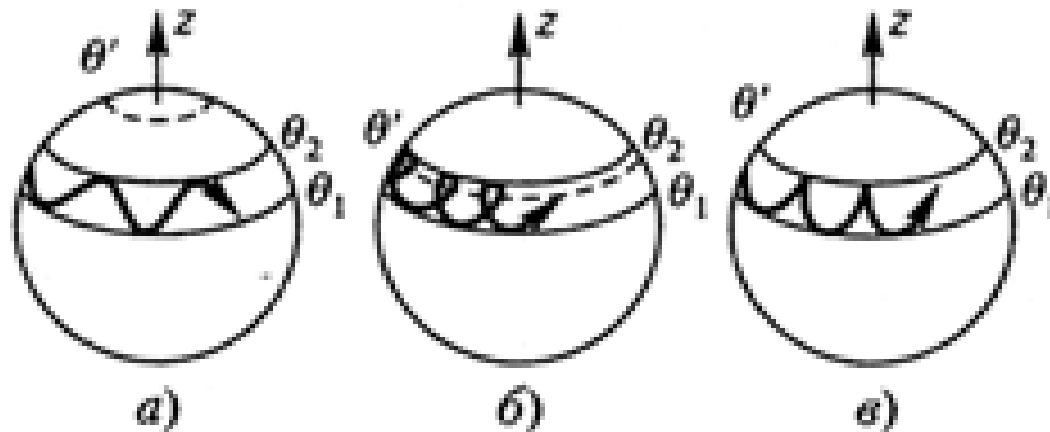
$$\boldsymbol{\omega} \uparrow \downarrow \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Omega} \uparrow \uparrow \mathbf{g}$$

Нутации гироскопа

Полученное решение является точным при определенном начальном условии: в начальный момент оси гироскопа придается угловая скорость, равная скорости вынужденной прецессии Ω

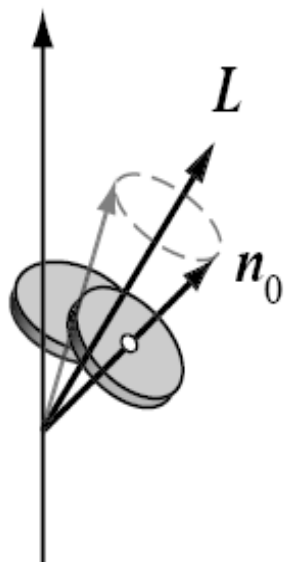
В остальных случаях имеют место *колебания оси симметрии волчка относительно направления силы тяжести – нутация гироскопа.*

На рисунке показан след конца осевого репера $\mathbf{e}_L = \mathbf{L} / L$ при различных соотношениях между скоростями вынужденной прецессии и периодом нутаций.

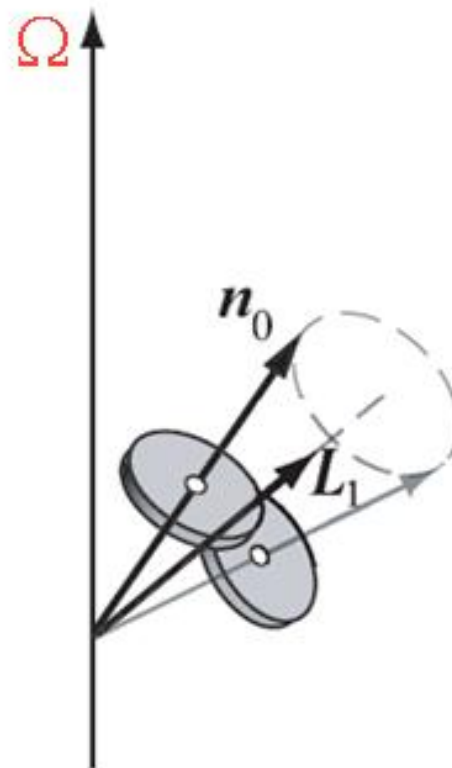
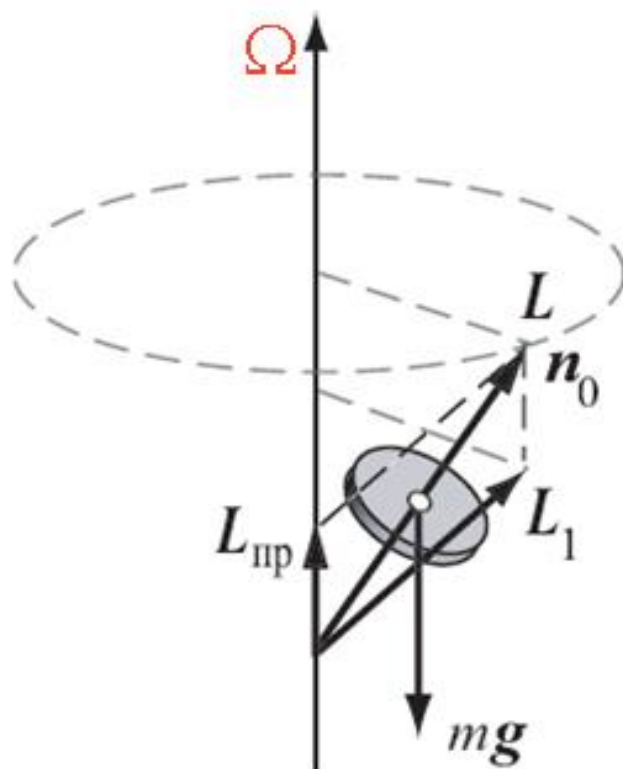


След оси волчка на единичной сфере

Геометрическая интерпретация возникновения нутаций

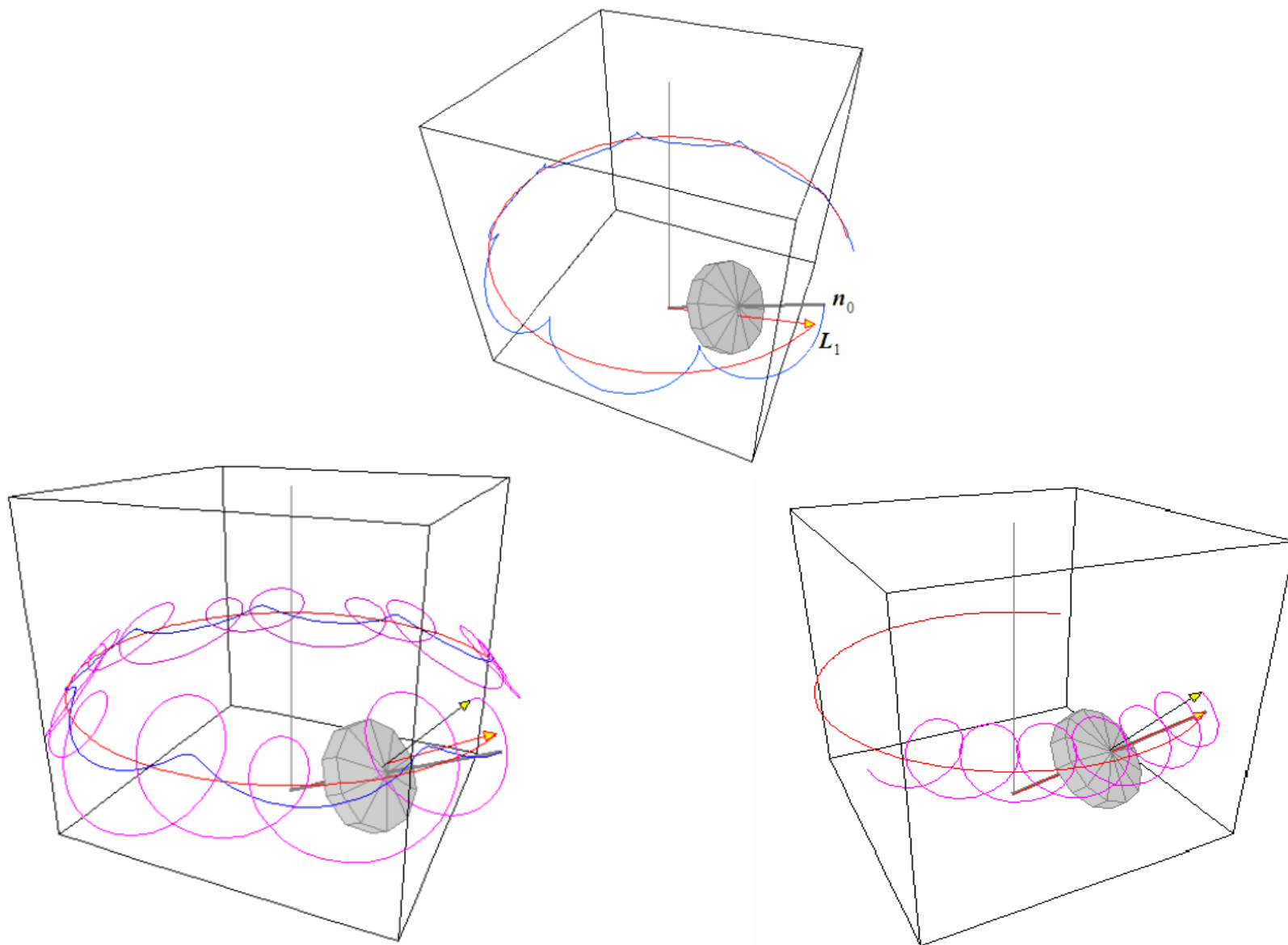


Прецессия оси свободного волчка вокруг неподвижного вектора момента импульса

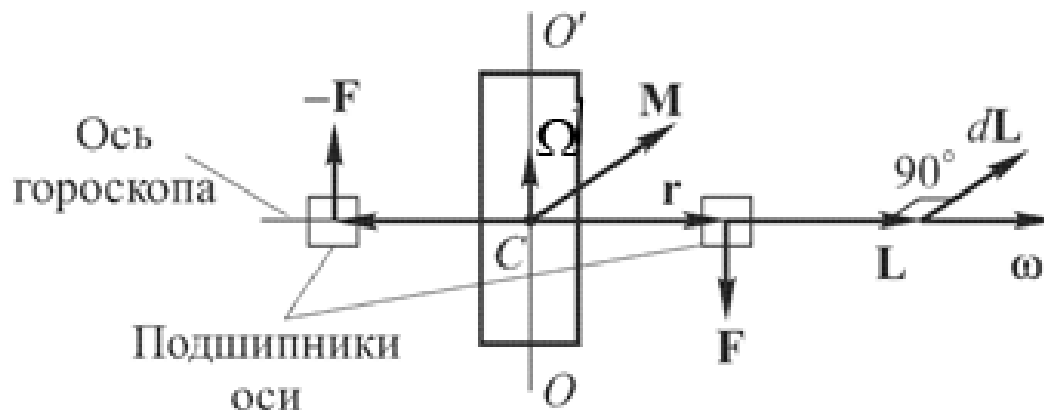


Разложение движения оси гироскопа на два вращения

Траектории движения оси гироскопа при вынужденной прецессии



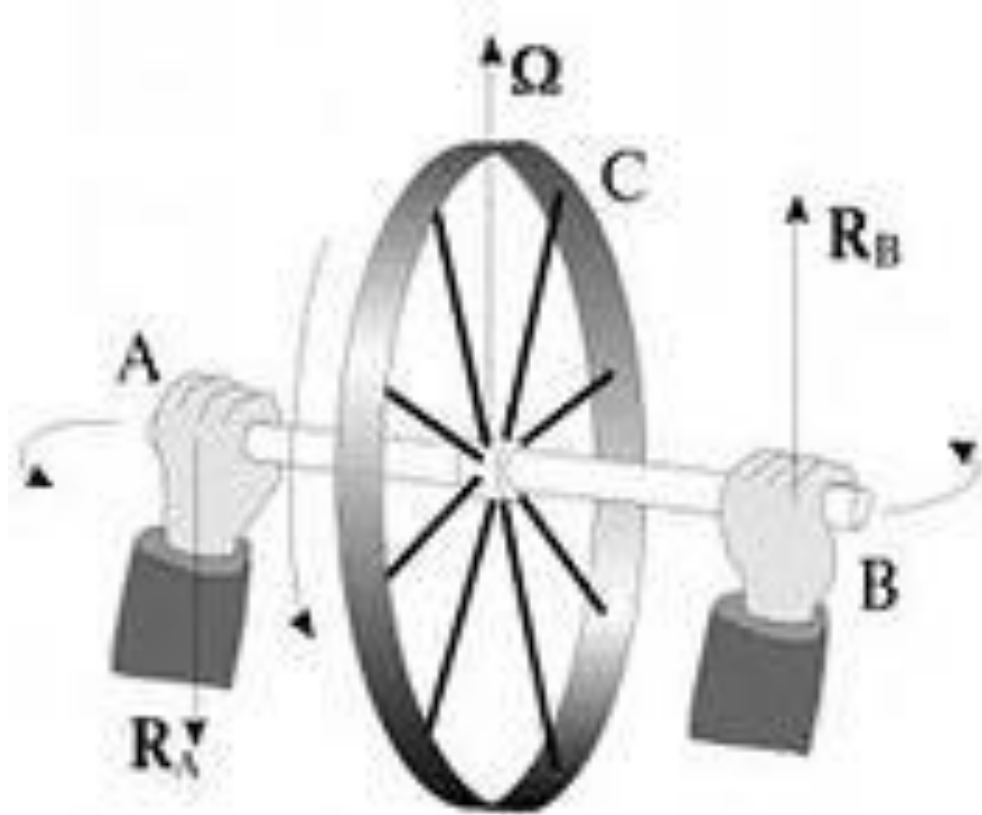
Гироскопические силы и моменты сил.



При повороте оси гироскопа вокруг вертикальной оси OO' на ось гироскопа будут действовать дополнительные **гироскопические** силы, создающие вращательные момент **M** - «**гироскопический момент**» - вдоль направления поворота оси гироскопа: **$M \parallel dL$** . Этим силам, в соответствие с третьим законом Ньютона, отвечает противоположно направленная пара сил, действующая на держатели оси - например, подшипники.

Гироскопический эффект - это появление дополнительного давления в подшипниках, обусловленного гироскопическими силами и связанными с ними гироскопическими моментами. Это явление широко распространено в технике. Оно наблюдается у роторов турбин на кораблях при поворотах и качке, на вертолетах при выполнении виражей и т.п. Гироскопический эффект имеет негативные последствия, поскольку приводит к дополнительному изнашиванию подшипников, а при достаточной силе может привести и к разрушению механизма.

Правило Жуковского



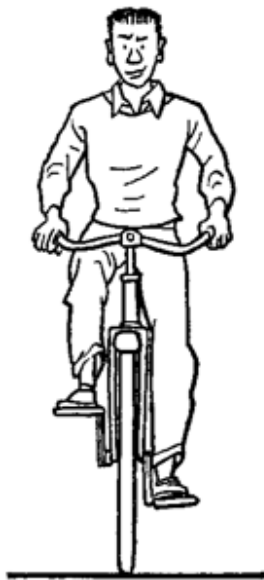
Вал АВ с насаженным на него колесом С. Пока колесо не раскручено, можно без труда поворачивать вал в пространстве произвольным образом. При попытке слегка повернуть в горизонтальной плоскости вал с быстро раскрученным колесом вал стремится вырваться из рук и повернуться в вертикальной плоскости. Требуется приложить ощутимое физическое усилие, чтобы удержать вал с вращающимся колесом в горизонтальной плоскости. Действие **вала на руки** («держатели оси») и есть гироскопический эффект, создаваемый гироскопическими силами.

Направление гироскопических сил можно легко найти с помощью правила, сформулированного Н.Е. Жуковским: гироскопические силы стремятся совместить момент импульса L гироскопа (т.е. *ось АВ вращения ротора*) с направлением угловой скорости вынужденного поворота Ω .

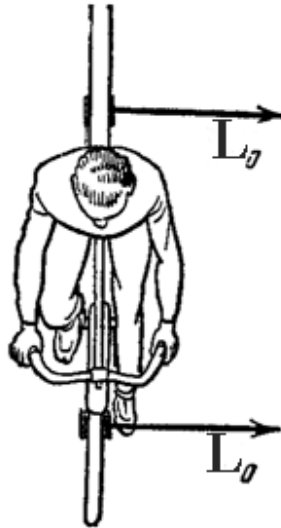
Действие гироскопических сил при повороте велосипеда

Поворот налево по ходу велосипеда

Прямая езда



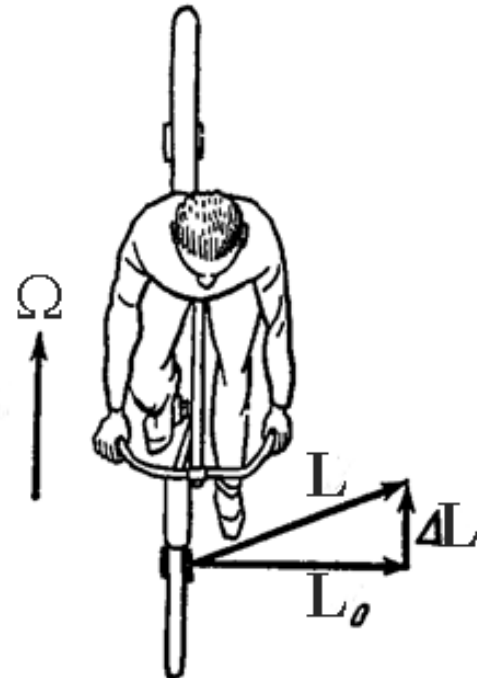
Вид спереди



Вид сверху



Вид спереди

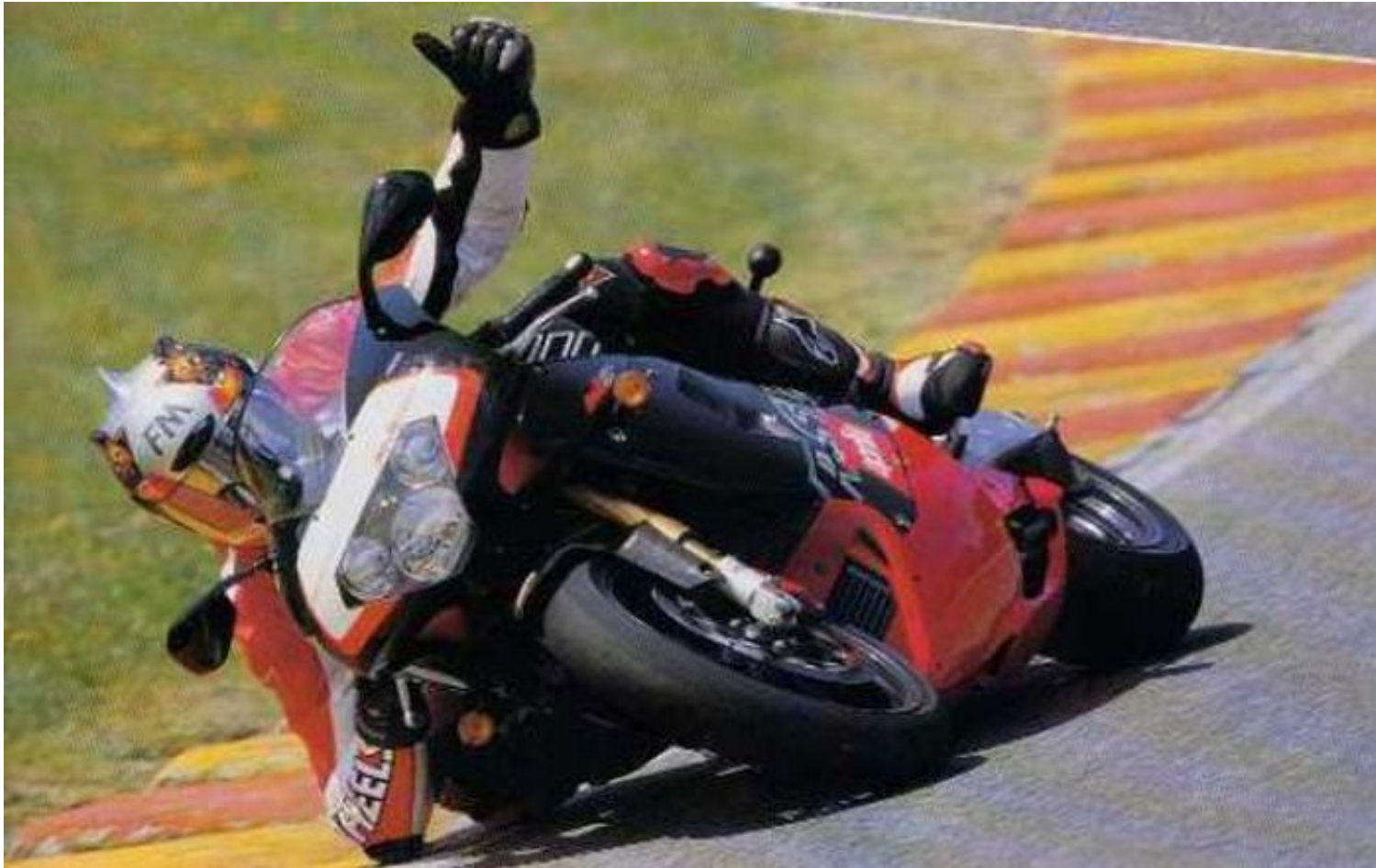


Вид сверху
Гироскопический момент
разворачивает ось колеса

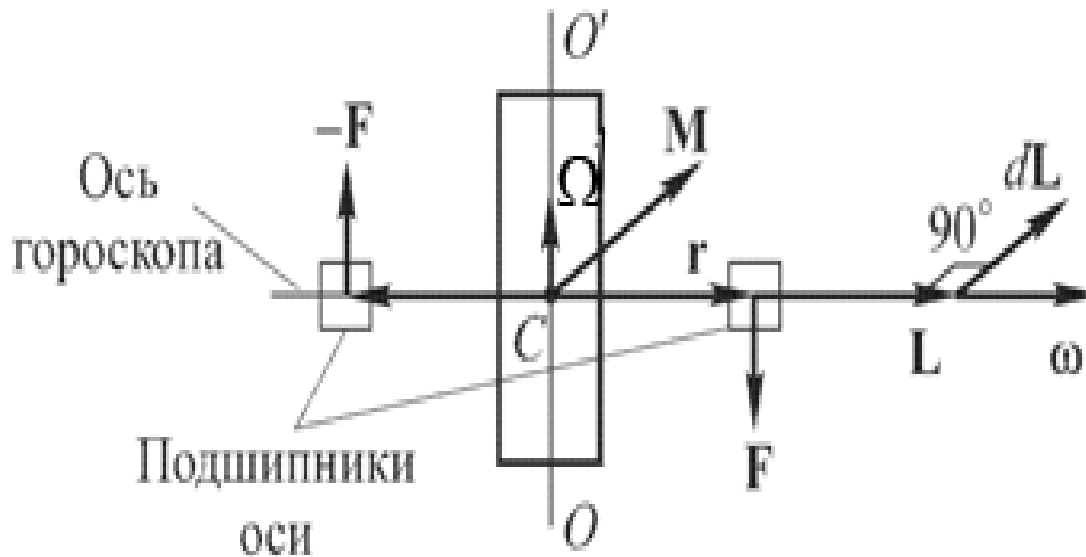
Совершая, поворот налево (по ходу велосипеда), велосипедист смещает центр тяжести своего тела влево, «заваливая» велосипед. Возникшее принудительное вращение велосипеда с угловой скоростью Ω приводит к появлению гироскопических сил с моментом $\mathbf{M}_g \propto \Omega$. На заднем колесе этот момент будет погашен в подшипниках, жестко связанных с рамой. Переднее же колесо, имеющее по отношению к раме свободу вращения в рулевой колонке, под действием гироскопического момента начнет поворачиваться как раз в том направлении, которое было необходимо для левого поворота велосипеда: $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M}_g \Delta t$

Опытные велосипедисты совершают подобные повороты "без рук".

Байкер управляет поворотом мотоцикла без помощи руля



Расчет величины гироскопических сил



$$[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}] = \mathbf{M}$$

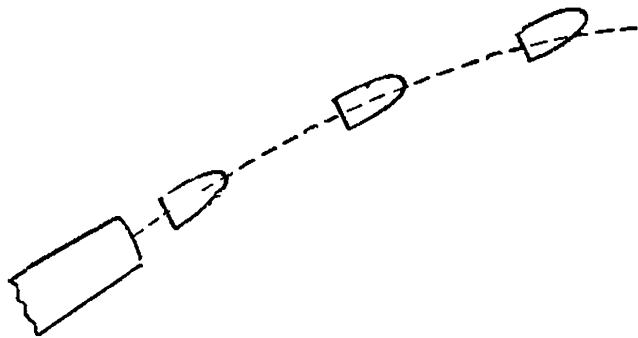
$$\mathbf{M} = 2[\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

$\mathbf{r}$ - вектор,
проведенный из
неподвижного центра
масс $\mathbf{C}$ к точке
приложения силы

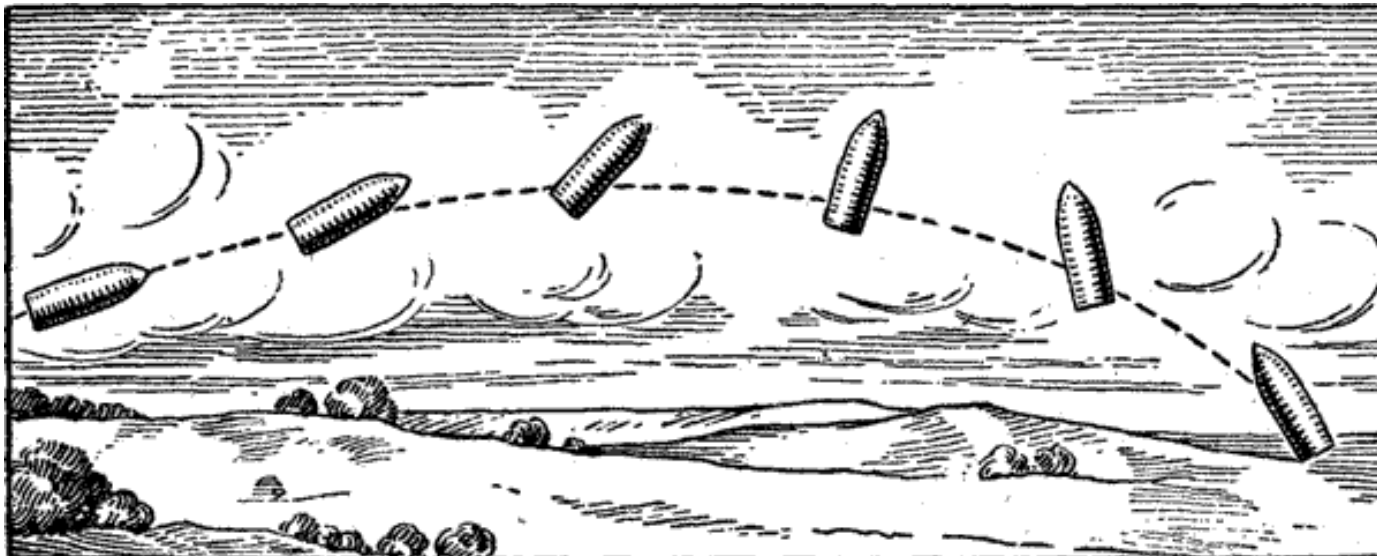
$$[\boldsymbol{\Omega}, I\boldsymbol{\omega}] = 2[\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

$$I\omega\Omega = 2rF \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I\omega\Omega}{2r}$$

Применение гироскопов

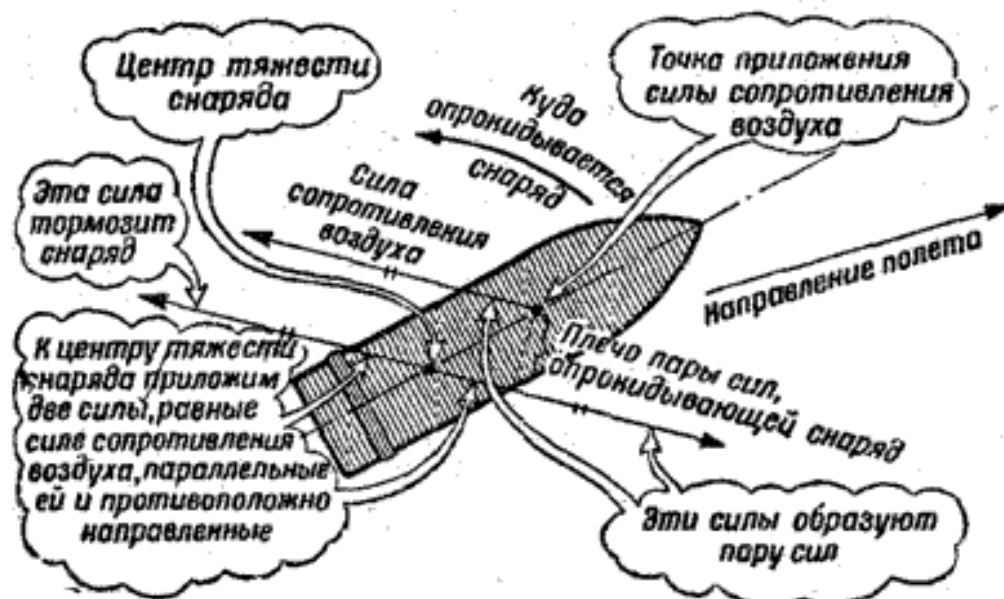
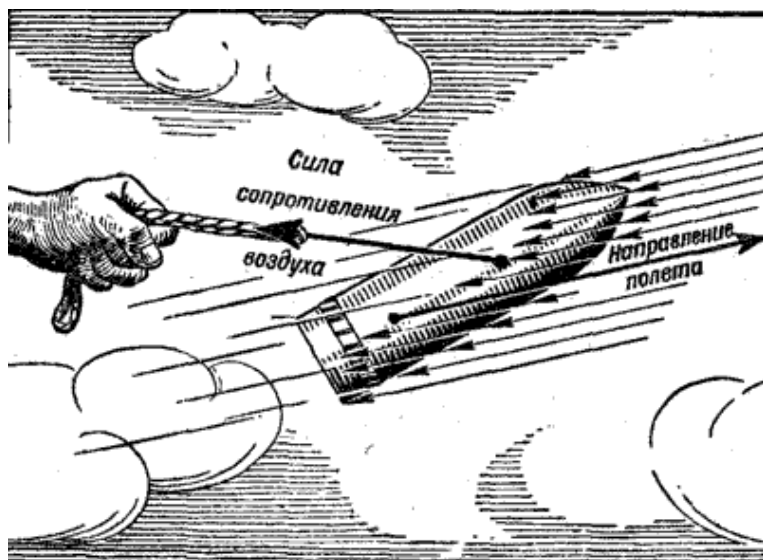


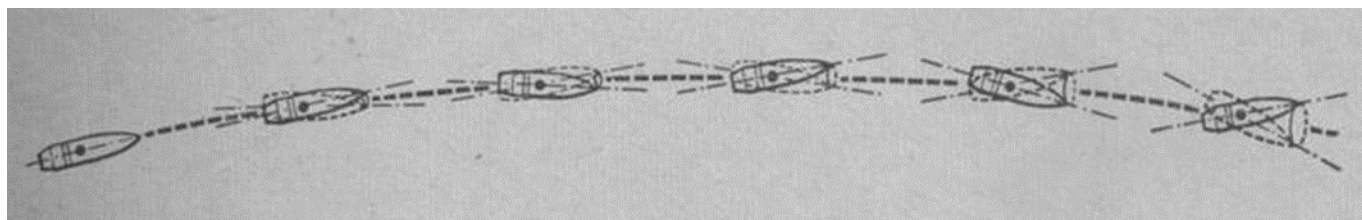
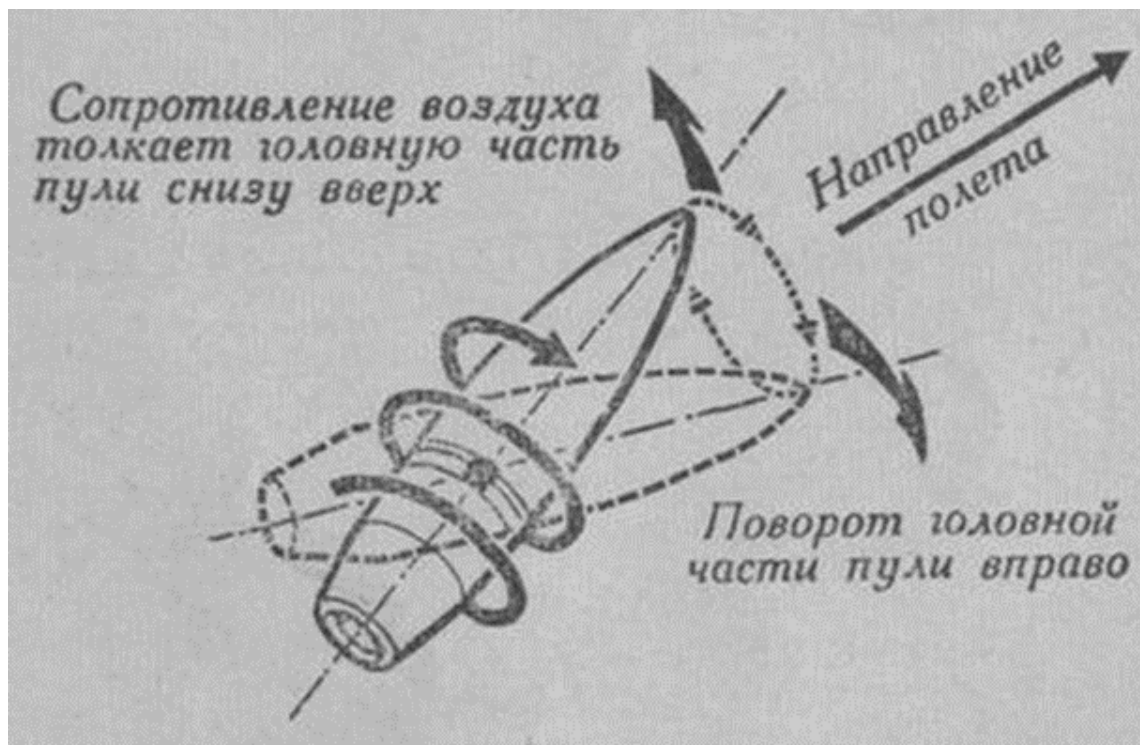
Полет снаряда по параболической траектории в безвоздушном пространстве



Кувыркание снаряда в воздухе

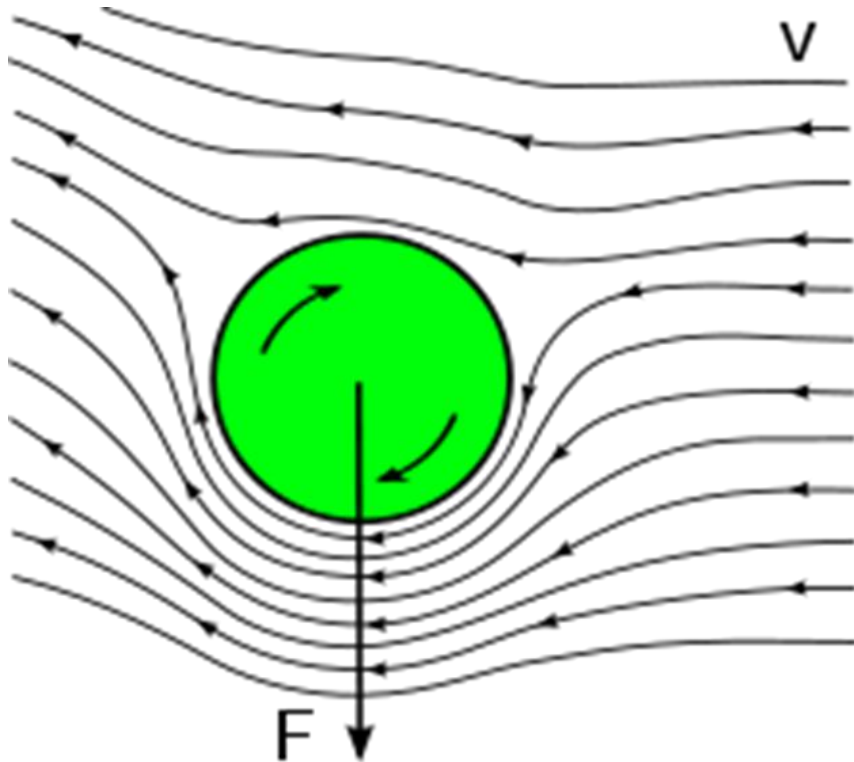
Воздействие потока воздуха на снаряд





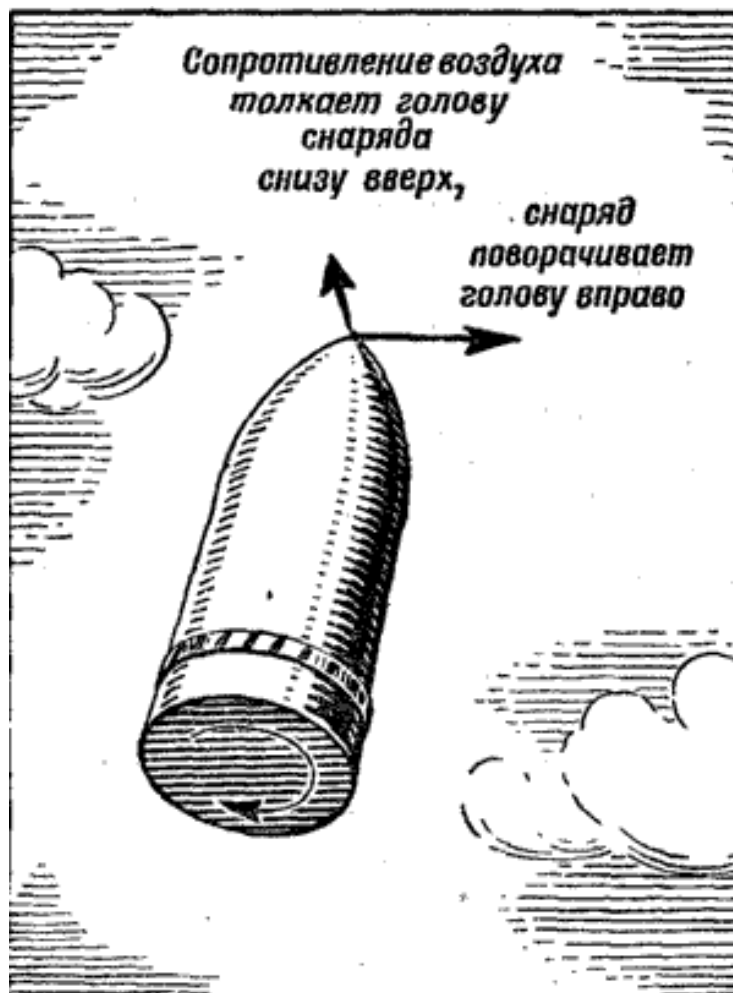
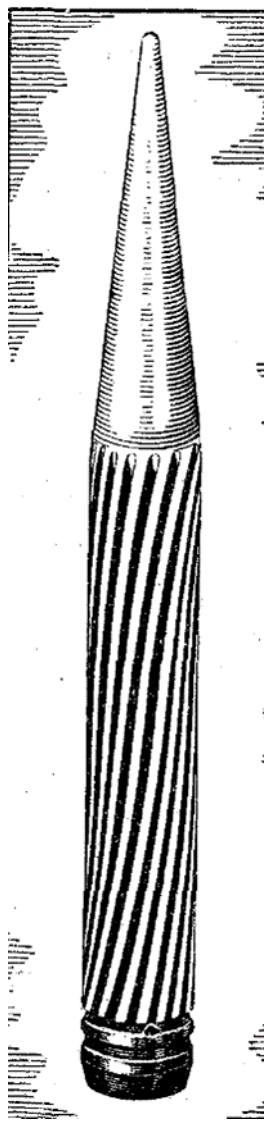
Вследствие вынужденной прецессии, вызываемой силами сопротивления воздушной среды, в которой летит пуля, продольная ось пули как бы следит за траекторией, описывая вокруг нее коническую поверхность

ЭФФЕКТ МАГНУСА



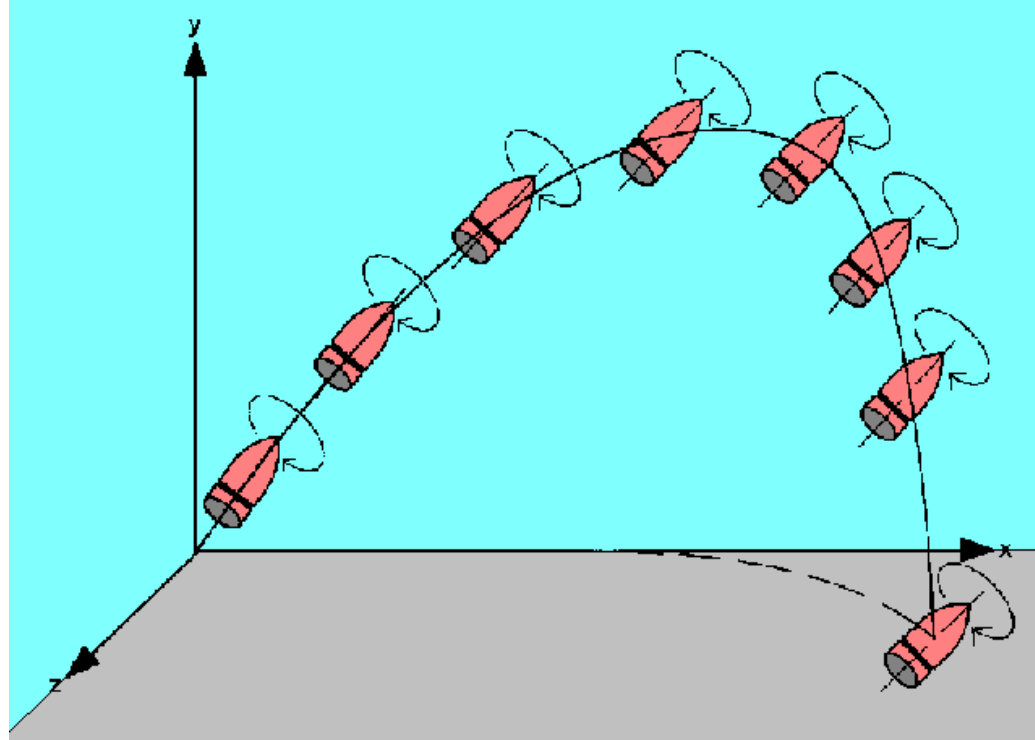
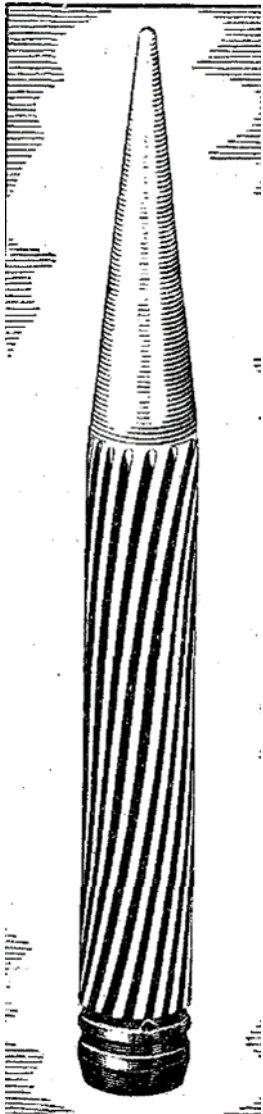
Вращающийся объект создаёт в среде вокруг себя вихревое движение. С одной стороны объекта направление вихря совпадает с направлением обтекающего потока и, соответственно, скорость движения среды с этой стороны увеличивается. С другой стороны объекта направление вихря противоположно направлению движения потока, и скорость движения среды уменьшается. Ввиду этой разности скоростей возникает разность давлений, порождающая поперечную силу от той стороны вращающегося тела, на которой направление вращения и направление потока противоположны, к той стороне, на которой эти направления совпадают.

Девияция полета пули, обусловленная эффектом Магнуса



Направление девиации совпадает с направлением нарезки ствола.

Стабилизация полета снаряда посредством его вращения



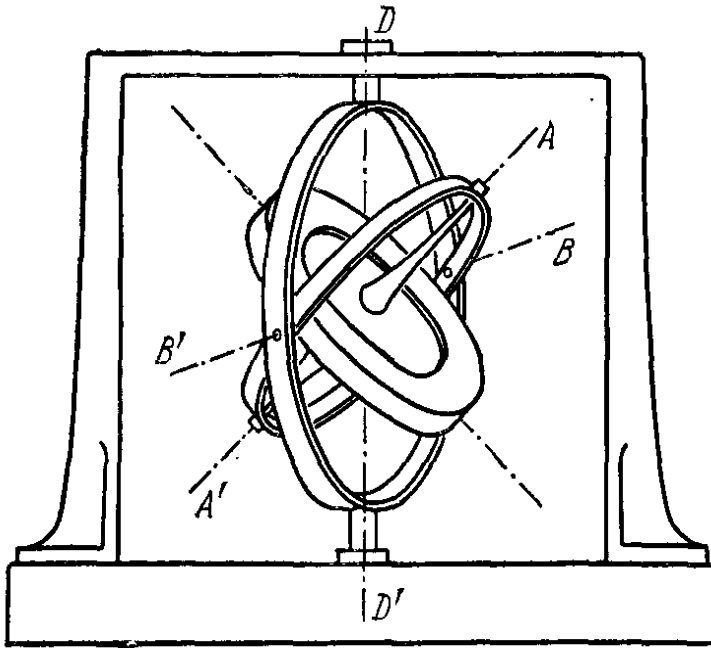
Чтобы прецессионное вращение имело устойчивый характер, необходимо, чтобы собственный момент импульса наряда превосходил определенную критическую величину $L \geq L_{кр}$ или $\omega \geq \omega_{кр}$

Для этого винтовые нарезы в стволе орудия должны быть достаточно крутыми.

Сохранение ориентации оси вращения **свободного** гироскопа используется в корректировки (подстройки) курса движения различных аппаратов: кораблей самолетов, торпед и пр.

В гирокомпасах гироскоп используется как устройство для **указания** направления. Для того чтобы ось гироскопа **поворачивалась** в требуемом направлении гироскоп должен испытывать определенное воздействие, т.е. он не может быть полностью свободным.

Автопилоты



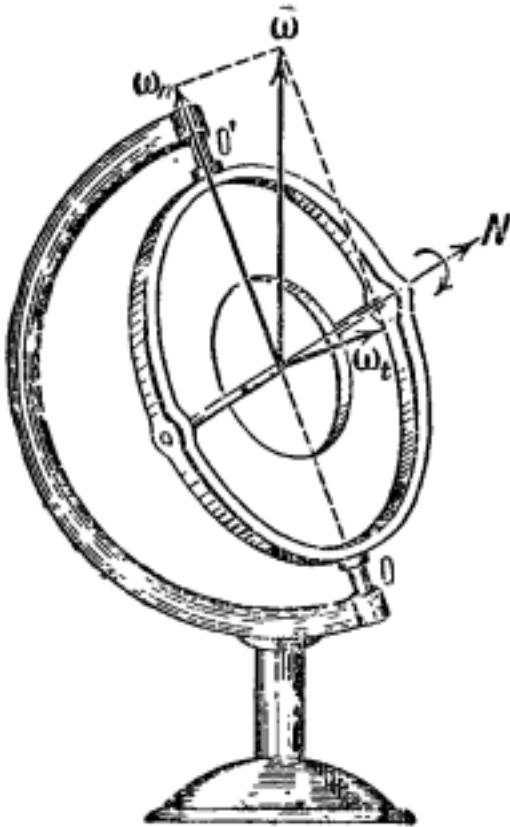
Уравновешенный гироскоп на кардановом подвесе: центр масс совпадает с точкой подвеса. Гироскоп находится в (почти) свободном состоянии и сохраняет момент импульса, направленный вдоль его оси.

Если собственный момент гироскопа велик (угловая скорость его собственного вращения достаточно большая), а силы трения достаточно малы, то создаваемые при повороте судна моменты сил трения мало изменяют направление оси гироскопа в пространстве.

При отклонении направления движения аппарата **от направления, заданного осью гироскопа**, рамы (кольца) карданова подвеса вместе с осью гироскопа меняют свое положение **относительно аппарата**. Поворот рам карданова подвеса при помощи тех или иных механизмов превращается в команды, которые вызывают отклонение рулей, возвращающие экипаж к заданному направлению.

При движении в плоскости достаточно одного гироскопа. При движении в трехмерном пространстве (на самолете) нужны два гироскопа, задающие ориентацию в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Гирокомпасы



В гирокомпасах используются свойства не вполне свободного гироскопа, т.е. гироскопа, ось которого *может двигаться только в одной фиксированной плоскости*.

Ось ***N*** гироскопа может перемещаться только в плоскости, ортогональной к закрепленной оси ***OO'***

Пусть подставка на которой установлен такой гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью

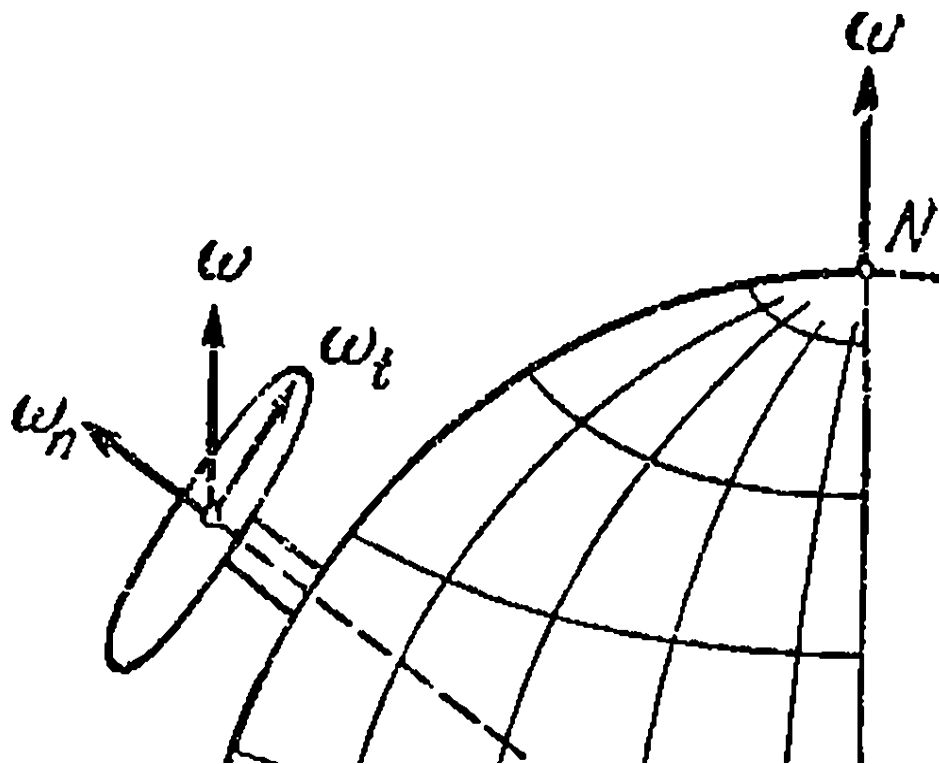
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}_n; \quad \boldsymbol{\omega}_t \perp OO', \quad \boldsymbol{\omega}_n \parallel OO'$$

К составляющей ***ω_n*** гироскоп нечувствителен, поскольку это свободное движение в плоскости ортогональной к закрепленной оси ***OO'***

Попытка привести гироскоп во вращение вокруг оси ***ω_t***, приводит к возникновению противоборствующего гироскопического момента сил ***M***, действующего на закрепленную ось со стороны подставки.

Под действием этого момента ось гироскопа поворачивается до тех пор, пока ее направлению не совпадет с направлением скорости ***ω_t*** (правило Жуковского)

Поведение гироскопа под влиянием вращения Земли.



Закрепленное направление OO'
Совпадает с направлением отвеса

*Ось гироскопа может двигаться
только в горизонтальной
плоскости*

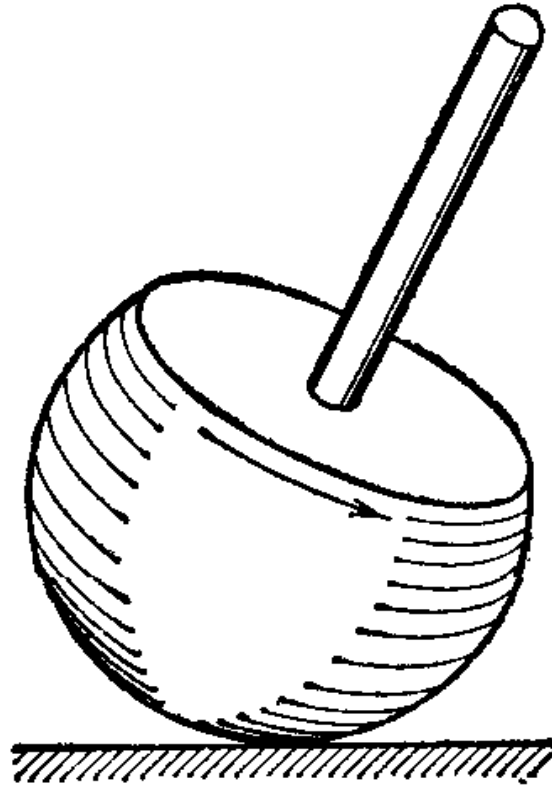
Под влиянием угловой скорости
суточного вращения Земли ось
гироскопа установится в
направлении ω_t , т.е. в
направлении меридиана на Север.
Гироскоп ведет себя как компас.

Гироскопы обладают рядом преимуществ по сравнению с магнитными, поскольку на их показания не влияют магнитные бури и залежи железа, они менее чувствительны к качке и т.д. Поэтому гироскопы играют важную роль в навигации.

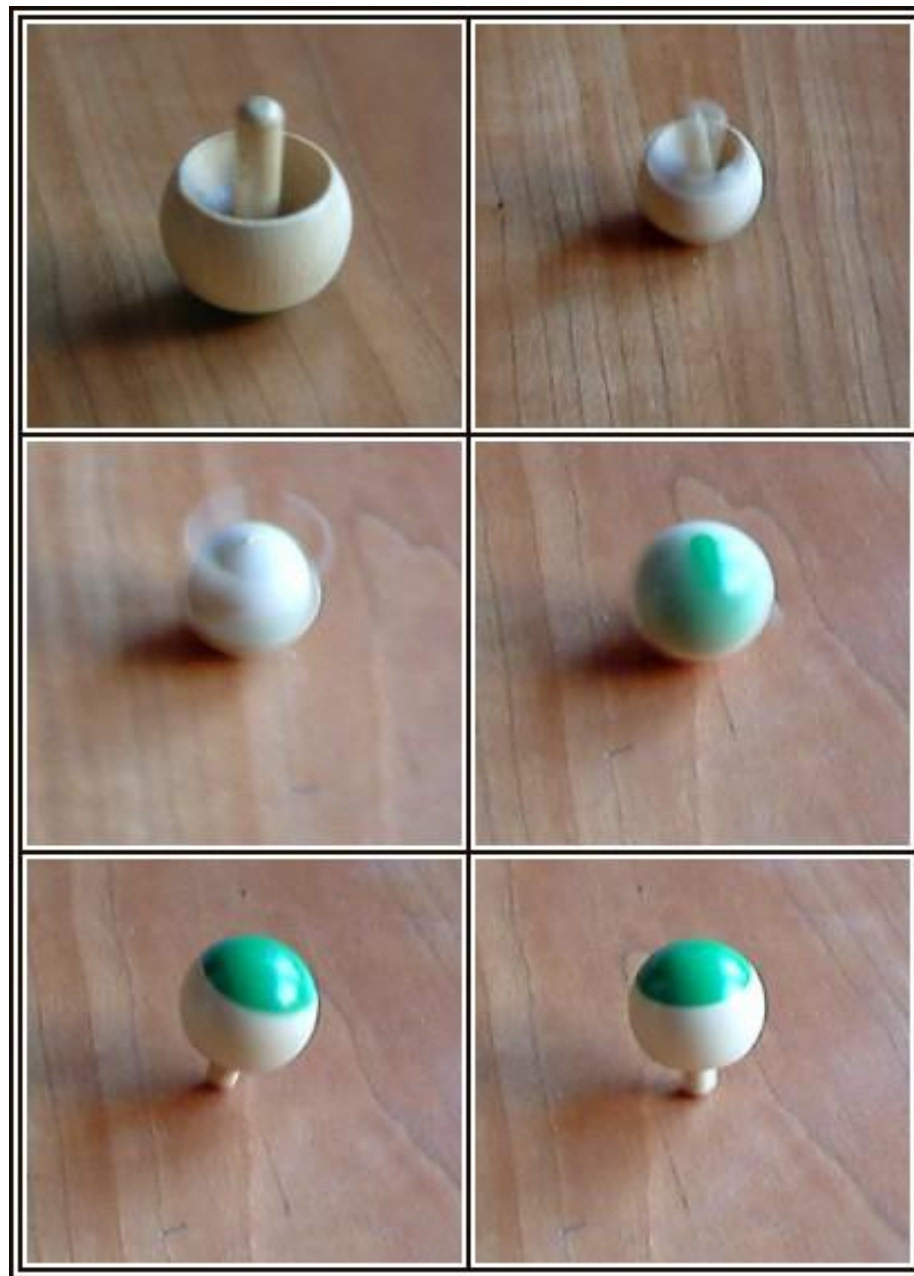
В настоящий момент большое распространение получили спутниковые навигационные устройства, которые в определенной мере сузили ареал применимости гироскопов как навигационных устройств (в частности, автопилотов). Однако работа спутниковых навигационных систем значительно затруднена в условиях сильной облачности. Поэтому роль гироскопов в навигации остается весьма значительной.

Движение волчков в отсутствии неподвижной точки.

Китайский волчок (волчок Томсона).



Переворачивание быстро крутящегося волчка



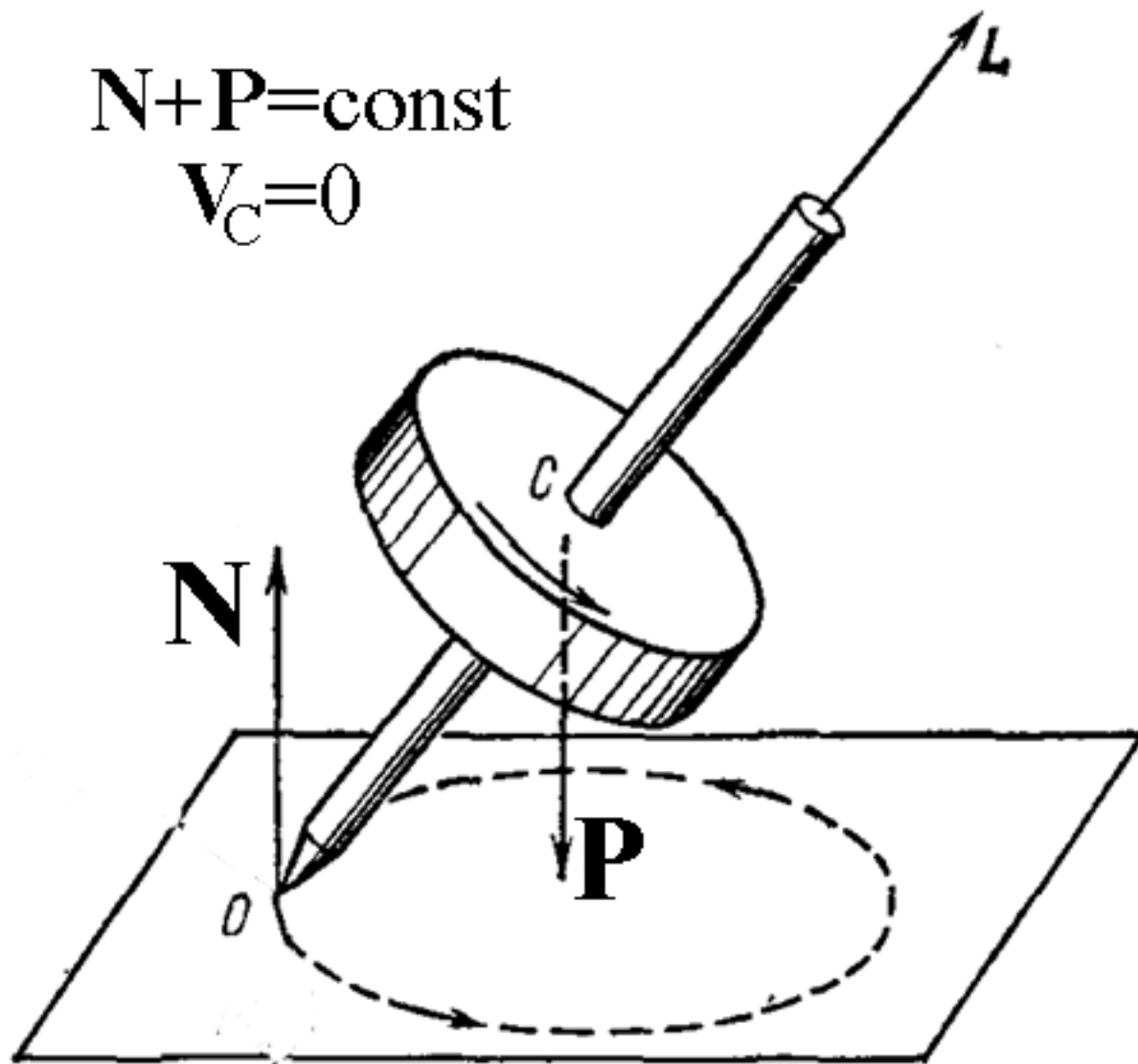


Нобелевские лауреаты по физике Нильс Бор и Вольфганг Паули изучают китайский волчок, 31.03.1951

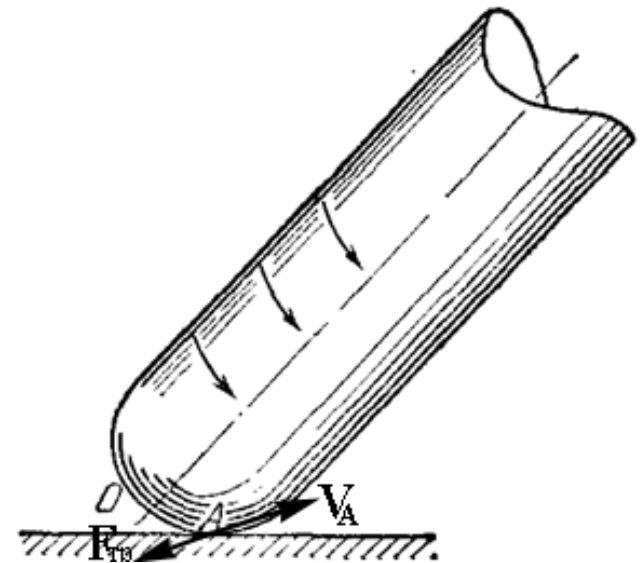
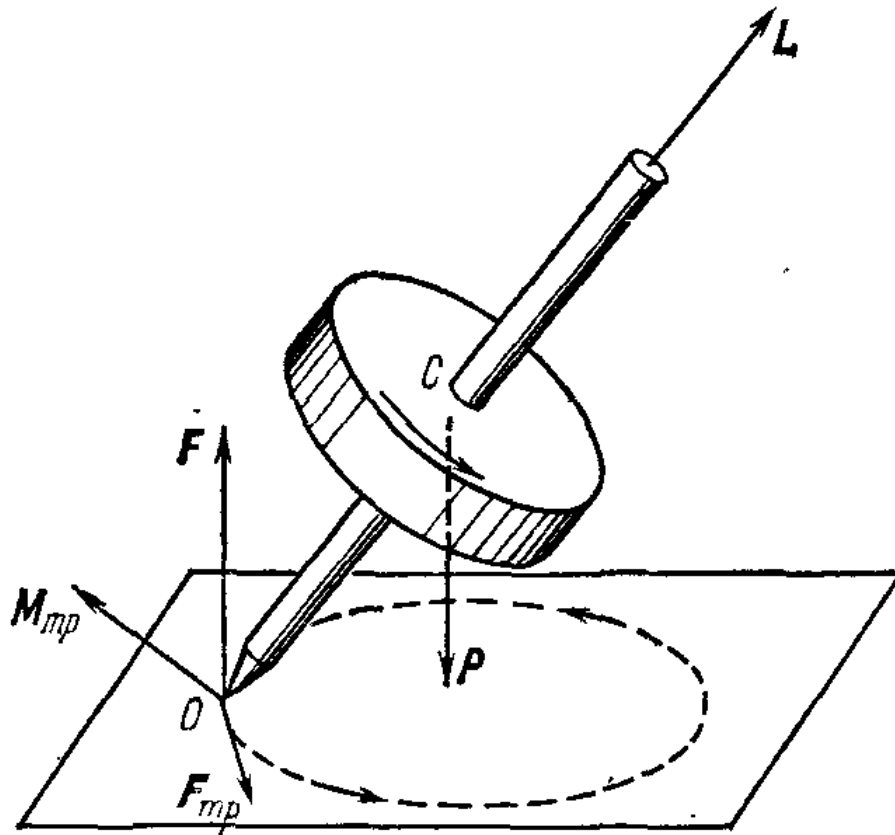
Движение волчка в отсутствии силы трения.

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} = \text{const}$$

$$\mathbf{V}_C = 0$$



Действие силы трения скольжения на волчок



Сила трения скольжения $F_{тр}$ действует в направлении прецессии точки опоры и стремится ускорить эту прецессию. Момент $M_{тр}$ силы трения поднимает центр массы волчка. Дополнительное давление на точку опоры приводит к увеличению силы ее реакции: $N > P$, $N + P \neq 0$

Сила трения скольжения поднимает центр массы китайского волчка

