

ЛЕКЦИЯ 20-21

Колебания

- 1 Сложение колебаний с одинаковыми частотами.
- 2 Сложение колебаний с близкими частотами (биения).
- 3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Сложение колебаний

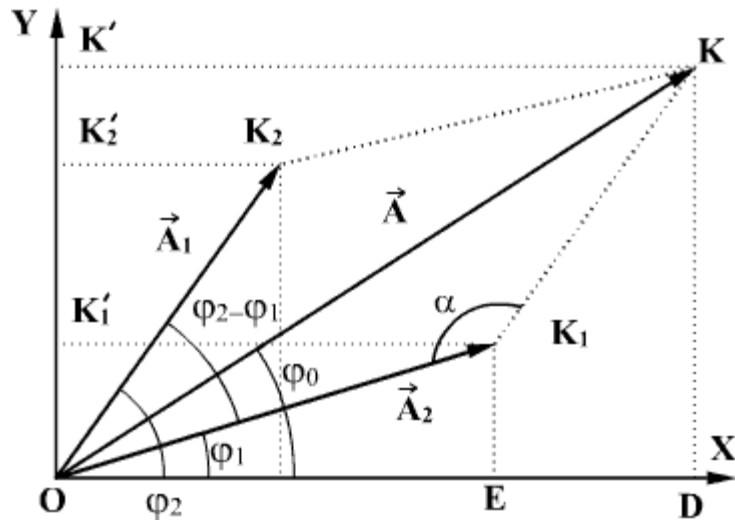
Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2 , которые запишутся в следующем образом:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Представим оба колебания с помощью векторов A_1 и A_2 . Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор A

Сложение колебаний



A_1 и A_2 - амплитуды складываемых колебаний под углами φ_1 и φ_2 к оси x

A - вектор амплитуды суммарного колебания.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Определим модуль амплитуды A результирующего колебания. В $\triangle OK_1K$ угол $OK_1K = [\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)]$ (из равенства противоположных углов параллелограмма).

Следовательно $2(\varphi_2 - \varphi_1) + 2\alpha = 2\pi$

Отсюда $\alpha = [\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)]$

Согласно теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Начальная фаза φ_0 результирующего колебания определяется из $\triangle OKD$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{KD}{OD} = \frac{KC + CD}{OE + ED} = \frac{A_2 \sin \varphi_2 + A_1 \sin \varphi_1}{A_2 \cos \varphi_2 + A_1 \cos \varphi_1}$$

Сложение колебаний

Проанализируем выражение для амплитуды.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

1) Если разность фаз обоих колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1)$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме A_1 и A_2 .

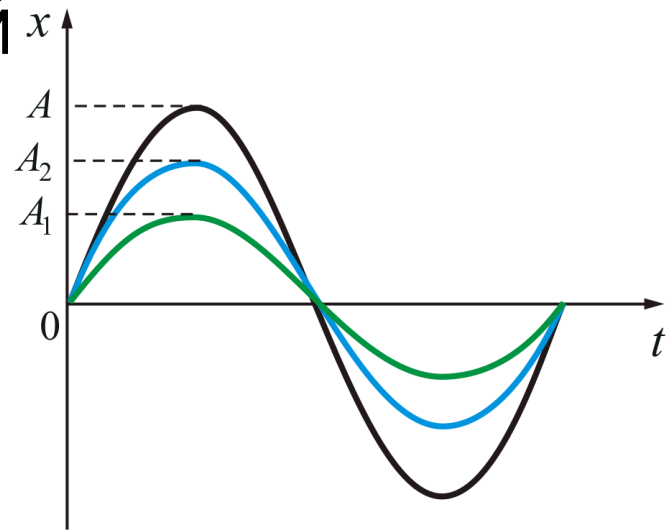
2) Если разность фаз обоих колебаний $(\varphi_2 - \varphi_1)$ равна $+\pi$ или $-\pi$, т.е. оба колебания находятся в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна $|A_1 - A_2|$.

Сложение колебаний

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний.

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) тогда $A = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний

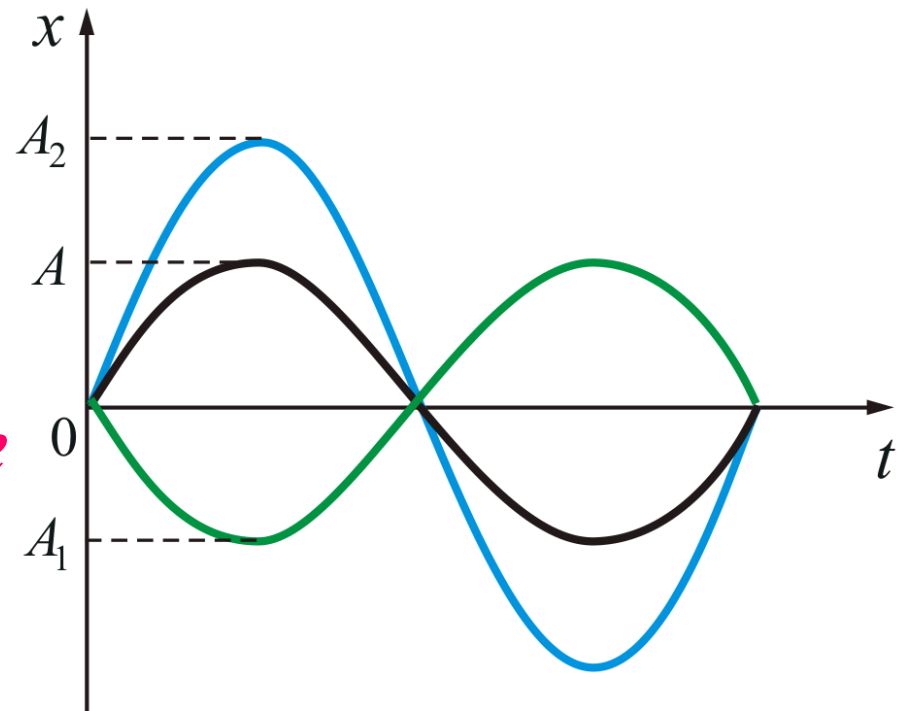
колебания *синфазны*



Сложение колебаний

2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m+1)\pi$ ($m=0,1,2,\dots$) тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна разности амплитуд складываемых колебаний.

колебания в *противофазе*



Биения

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **БИЕНИЯМИ**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны a , а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид: $x_1 = a \cos \omega t$, $x_2 = a \cos(\omega + \Delta\omega)t$.

Складывая эти выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем

$$x = a(\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t) = (2a \cos \Delta\omega/2t) \cos \omega t,$$

Во втором сомножителе мы пренебрегли $\Delta\omega/2$, т.к. $\Delta\omega/2 \ll \omega$

Результирующее колебание x можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда a_6 которого изменяется по следующему периодическому закону

$$a_6 = |2a \cos \Delta\omega/2t|,$$

$$x = (2a \cos \Delta\omega/2t) \cos \omega t$$

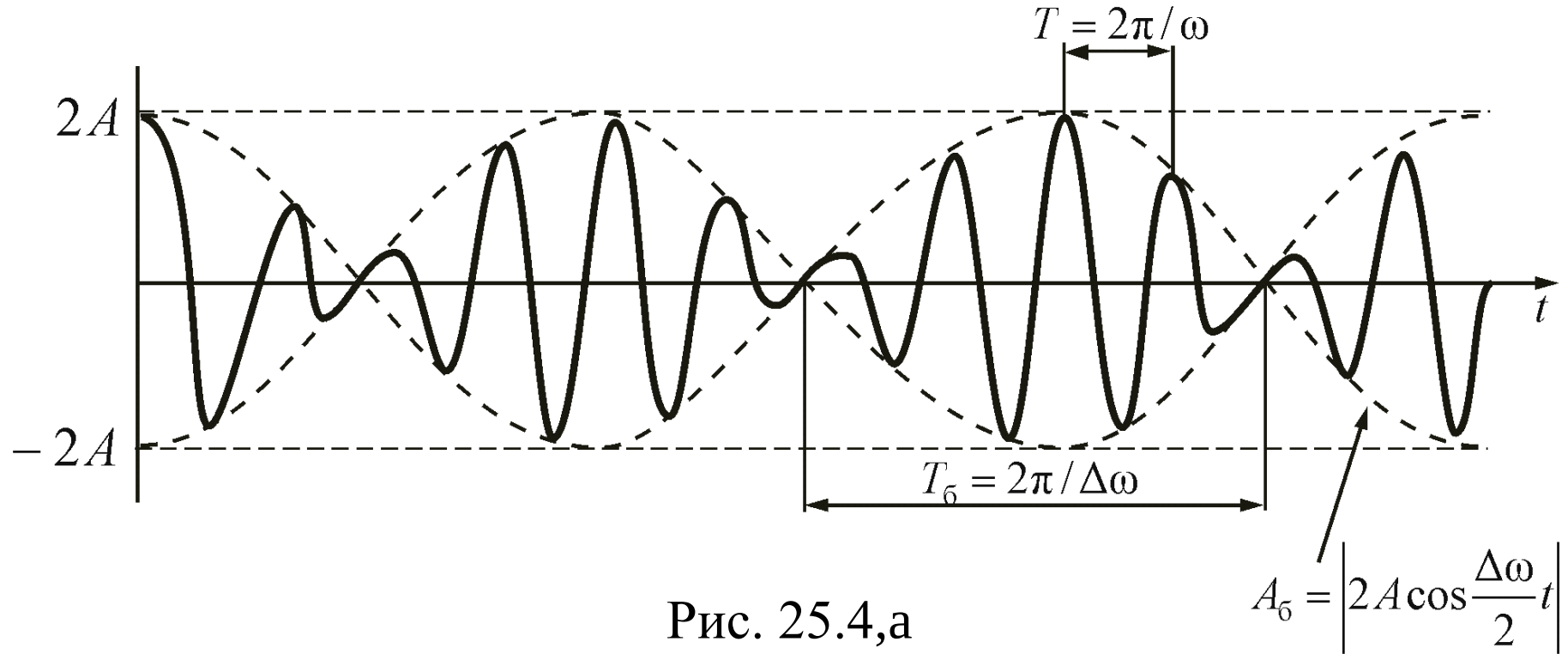
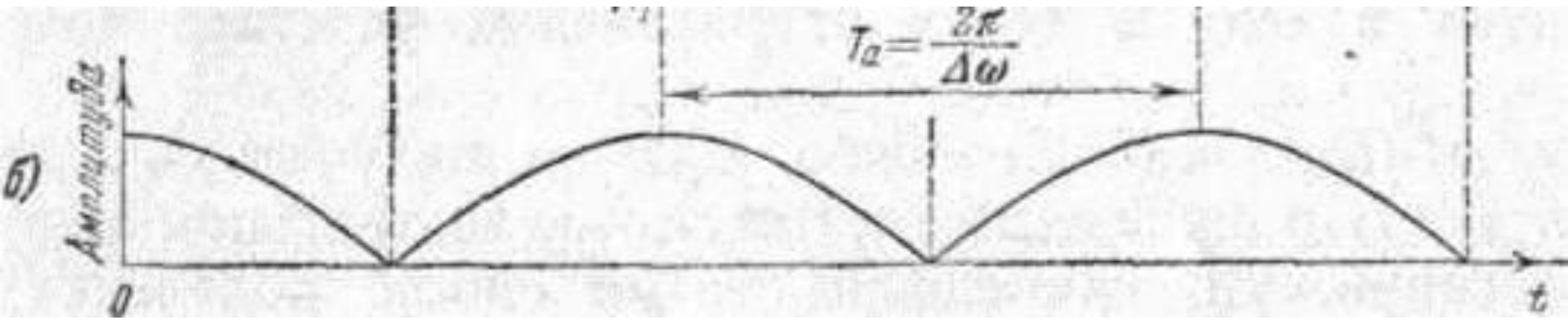


Рис. 25.4,а

$$x = a(\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t) = (2a\cos\Delta\omega/2t)\cos\omega t$$

$2a\cos\Delta\omega/2t$ изменяется гораздо медленнее, чем $\cos\omega t$. Ввиду условия $\Delta\omega/2 \ll \omega$ за то время, за которое множитель $\cos\omega t$



совершает несколько полных колебаний, $2a \cos \Delta\omega/2t$ почти не изменится. Это дает основание рассматривать данное колебание как гармоническое колебание частоты ω , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону. Выражением этого закона не может быть $2a \cos \Delta\omega/2t$, т.к. он изменяется в пределах от $-2a$ до $+2a$, в то время как амплитуда по определению — положительная величина. График амплитуды показан на рис. Аналитическое выражение для амплитуды, очевидно, имеет вид $a_6 = |2a \cos \Delta\omega/2t|$.

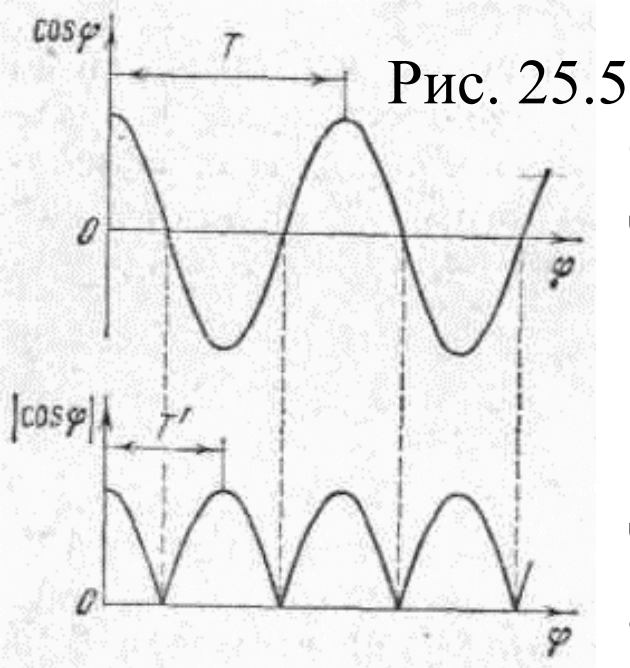


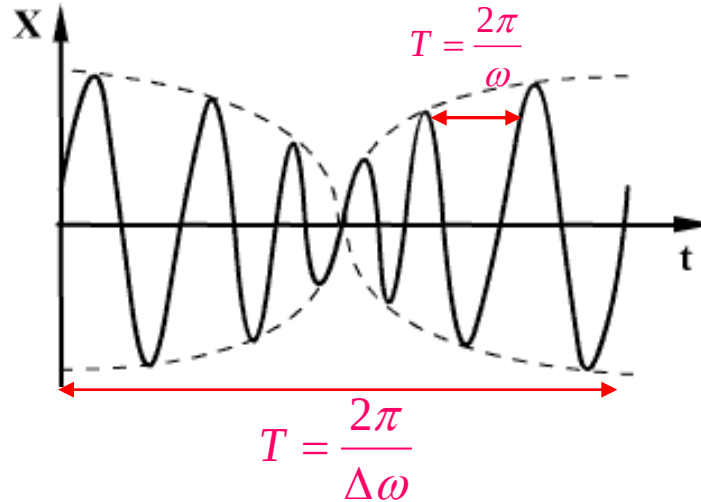
Рис. 25.5

Функция $|\cos$ – периодическая функция с частотой, в 2 раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля (см. рис. на котором сопоставлены графики косинуса и его модуля), т.е. с частотой $\Delta\omega$. Т.о., частота пульсаций амплитуды – её называют частотой биений – равна разности частот складываемых колебаний.

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями - наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

Биения

Биения - гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой



частоты двух складываемых колебаний мало отличаются друг от друга, амплитуды одинаковы и начальные фазы $\varphi_0=0$

$$x_1 = A \cos(\omega t)$$

$$x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega) t$$

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \cos(\omega t)$$

Число **n** биений в секунду определяется разностью частот складываемых колебаний **$n = \nu_1 - \nu_2$**

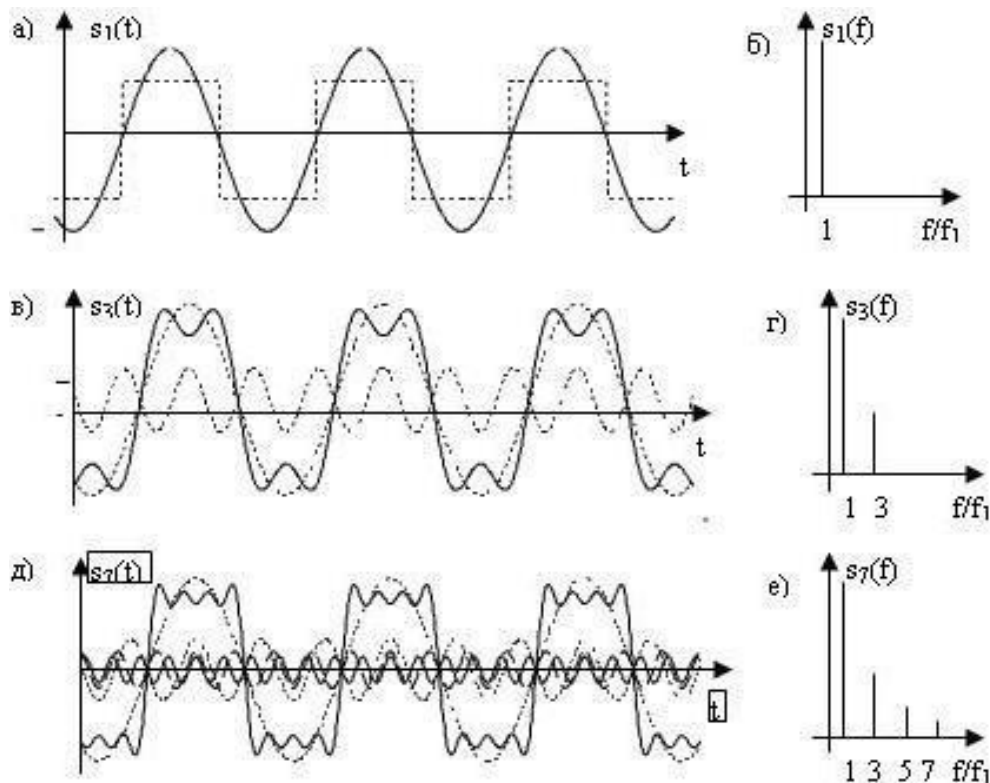
Гармонический анализ

Любые сложные периодические колебания $S = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами кратными циклической частоте ω_0 :

$$S(t)=f(t)=a_0/2+a_1\cos(\omega_0t+\varphi)+a_2\cos(2\omega_0t+\varphi_2)+..+a_n\cos(n\omega_0t+\varphi_n)$$

Представление периодической функции в таком виде связывают с понятием ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ, ИЛИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУРЬЕ. Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами ω_0 , $2\omega_0$, $3\omega_0$, . . . , называются ПЕРВОЙ (ИЛИ ОСНОВНОЙ),

Графическое представление спектра сигналов выполняют в виде набора вертикальных отрезков, начинающихся на оси абсцисс (на оси частот). При этом положение отрезка на оси абсцисс (от начала координат) отражает частоту соответствующей гармоники, а длина отрезка соответствует амплитуде этой гармоники.



С увеличением количества гармоник форма синтезированного сигнала все более приближается к прямоугольной, а различие между прямоугольной волной и сигналом, образованным суммой гармонических составляющих, становится все меньше.

Формирование прямоугольного сигнала (меандра) из суммы первых гармоник: а), в), д) - временное представление первых гармоник и их суммы; б), г), е) - спектральное представление соответствующих наборов гармоник

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Найдем результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , которые происходят во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y . Начало отсчета для простоты выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запишем

$$(1) \quad \begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = B \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

где α — разность фаз обоих колебаний, A и B равны амплитудам складываемых колебаний. Уравнение траектории результирующего колебания определим из $\frac{x}{A} = \cos \omega t$

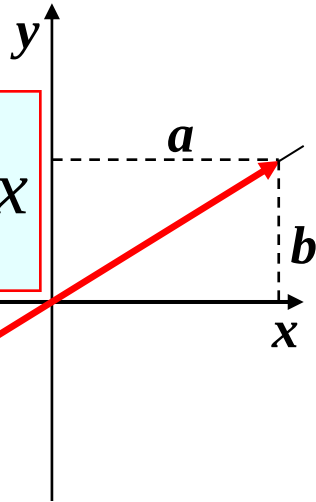
Записывая складываемые к

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$$

и заменяя во втором уравнении $\cos \omega t$ на $\frac{x}{A}$ и $\sin \omega t$ на $\sqrt{1 - (\frac{x}{A})^2}$, найдем после несложных преобразований уравнение эллипса, у которого оси ориентируются по координатным осям:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.



A. Разность фаз $\varphi = 0$. В этом случае уравнение эллипса принимает вид

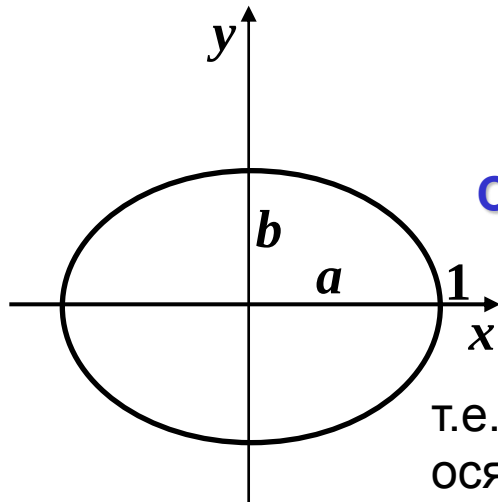
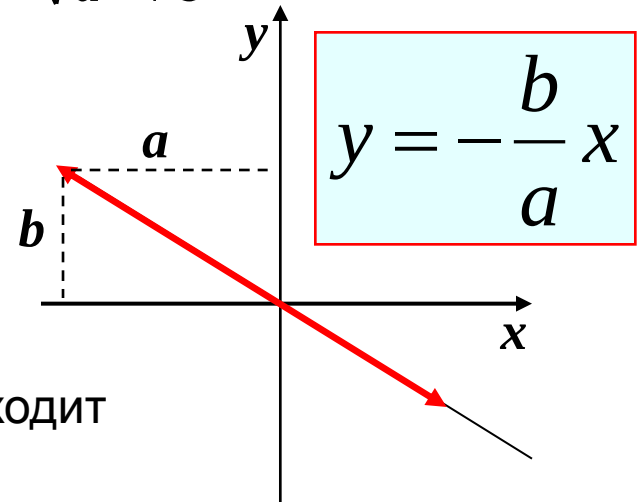
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t$$

Резльтирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с частотой ω и амплитудой $\sqrt{a^2 + b^2}$

B. Разность фаз $\varphi \pm \pi$. В этом случае уравнение эллипса принимает вид

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

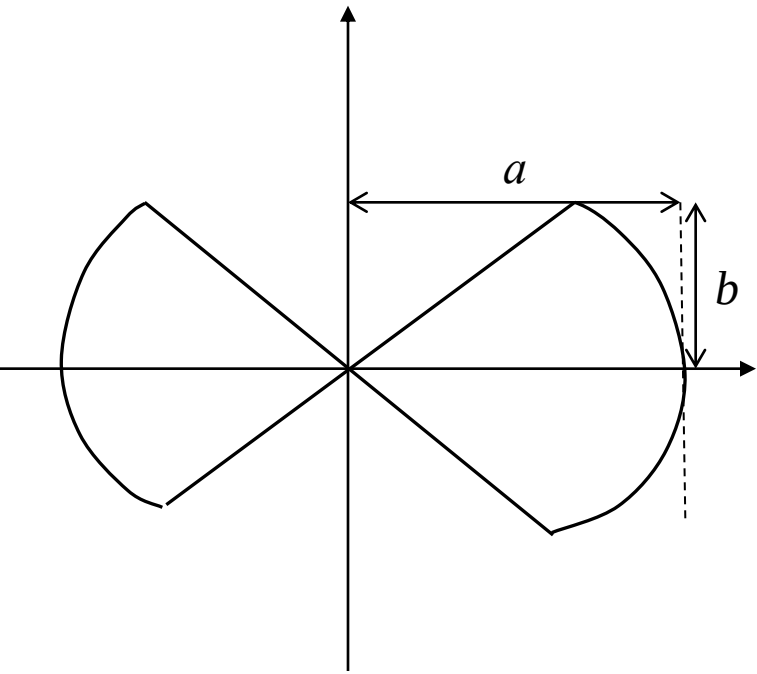


C. При $\varphi \pm \pi/2$, уравнение переходит

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

т.е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний.

Фигуры Лиссажу.



Если частоты взаимно-перпендикулярных колебаний не одинаковы, но **кратны**, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу**.

отношение частот 1:2 и разность фаз $\pi/2$

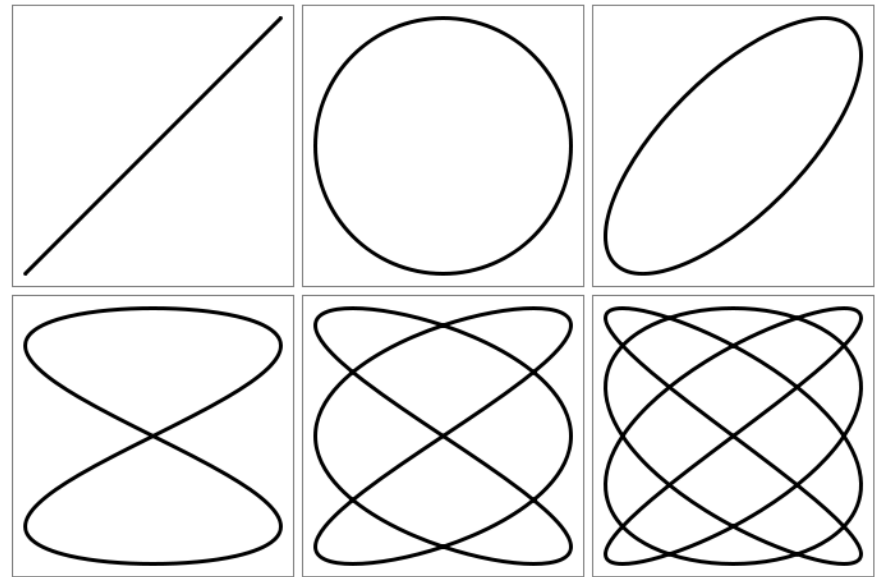
$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \cos (2\omega t + \pi/2)$$

Фигуры Лиссажу.

Фигу́ры Лиссажу́ — замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Впервые изучены французским учёным Жюлем Антуаном Лиссажу (Lissajous).

Вид фигур зависит от соотношения между периодами (частотами), фазами и амплитудами обоих колебаний. В простейшем случае равенства обоих периодов фигуры представляют собой эллипсы, которые при разности фаз 0 или π вырождаются в отрезки прямых, а при разности фаз $\pi/2$ и равенстве амплитуд превращаются в окружность. Если периоды обоих колебаний неточно совпадают, то разность фаз всё время меняется, вследствие чего эллипс всё время деформируется.



$$\begin{cases} x(t) = A \sin(at + \delta) \\ y(t) = B \sin(bt) \end{cases}$$

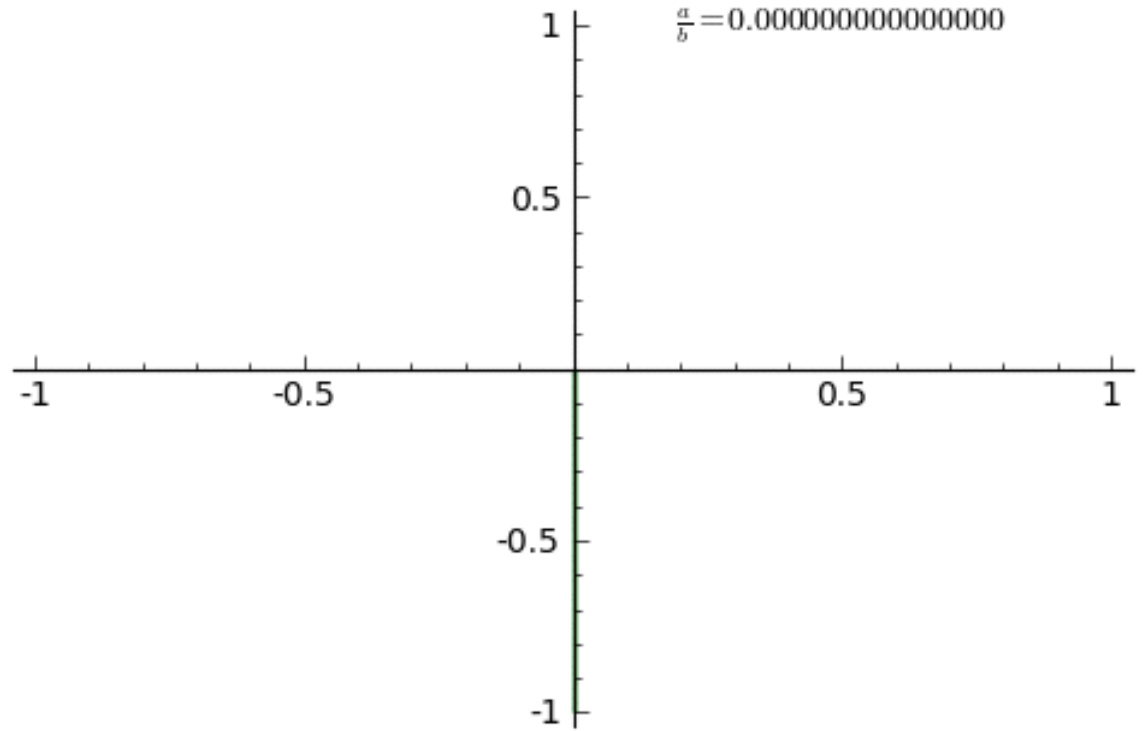
Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и расположены по обе стороны от них на расстояниях, равных амплитудам колебаний.

Фигуры Лиссажу.

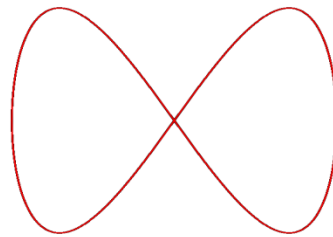
$$\begin{cases} x(t) = A \sin(at + \delta) \\ y(t) = B \sin(bt) \end{cases}$$

Анимация показывает изменение кривых при постоянно возрастающем соотношении a/b от 0 до 1 с шагом 0.01. ($\delta=0$)

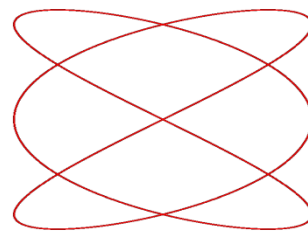
При существенно различных периодах фигуры Лиссажу не наблюдаются. Однако, **если периоды относятся как целые числа**, то через промежуток времени, равный наименьшему кратному обоим периодам, движущаяся точка снова возвращается в то же положение — получаются фигуры Лиссажу более сложной формы.



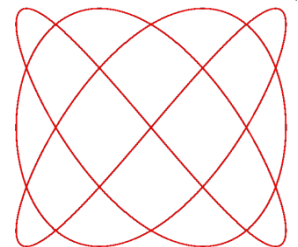
Примеры фигур Лиссажу при $\delta = \pi/2$,



$a = 1, b = 2$ (1:2)



$a = 3, b = 2$ (3:2)



$a = 3, b = 4$ (3:4)