

ЛЕКЦИЯ 8

Столкновения

Понятие столкновения.

Упругое и неупругое столкновения.

Векторные диаграммы.

Самопроизвольный распад частиц.

■ Элементарная теория удара.

Удар – явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости точек изменяются на конечную величину.

Ударные силы – силы взаимодействия при соударении тел (удар молота, столкновения экипажей).

Время удара – очень малый промежуток времени, в течении которого происходит удар (контакт соударяющихся поверхностей). В силу этого ударные силы могут достигать очень больших значений, при которых возможно изменение скоростей точек на конечную величину. Соотношение между конечным изменением скорости и величиной ударной силы определяется **теоремой об изменении количества движения**:

$$m(\bar{v}_1 - \bar{v}_0) = \bar{S} \quad \text{ - основное уравнение удара.} \quad \text{Здесь} \quad \bar{S} = \int \bar{F} dt \quad \text{ - импульс ударной силы.}$$

Импульс ударной силы является конечной величиной не смотря на то, что интегрирование должно выполняться практически на бесконечно малом интервале времени (времени удара). Точный закон изменения ударной силы в течении времени удара, как впрочем и само время удара, как правило, остаются неизвестным и интеграл заменяется произведением некоторого среднего значения силы на время удара:

В силу того, что ударные силы много больше по величине других сил (неударных), последними пренебрегают. В силу малости времени удара, возникающие перемещения точек во время удара ($v_{cp} \cdot \tau$)

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt \approx \bar{F}_{cp} \tau.$$

При рассмотрении механической системы во время удара из всех теорем динамики используется лишь **теорема об изменении количества движения системы** и для вращающейся системы ее аналог – **теорема об изменении момента количества движения системы**:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}^e. \quad \text{В проекции, например, на ось } x: \quad Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_x^e.$$

$$\bar{K}_{O1} - \bar{K}_{O0} = \sum \bar{M}_O(\bar{S}^e). \quad \text{В проекции, например, на ось } z \text{ (относительно оси } z): \quad K_{1z} - K_{0z} = \sum m_z(\bar{S}^e).$$

Теорема об изменении кинетической энергии использоваться практически не может, поскольку перемещения во время удара пренебрегаются и работа ударных сил не может быть вычислена.

- **Удар шара о неподвижную поверхность** – Рассматривается поступательное движение шара массой m со скоростью v перпендикулярно неподвижной массивной поверхности (преграде) – **прямой удар**. Например, шар падает с высоты h_0 и ударяется о горизонтальную поверхность со скоростью v .

Различают две стадии (фазы) удара:

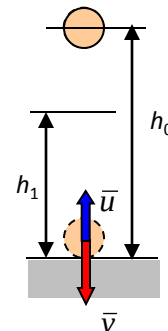
1. Переход кинетической энергии движения в потенциальную энергию деформации. При этом скорость падает до нуля, часть энергии расходуется на нагрев тела.
2. Переход потенциальной энергии в кинетическую при восстановлении первоначальной формы тела за счет упругих сил. Из-за наличия остаточных (пластических) деформаций и нагрева тела кинетическая энергия полностью не восстанавливается и скорость u отделения шара от поверхности будет меньше, чем скорость до удара ($u < v$).

Отношение модуля скорости шара в конце удара к модулю его скорости в начале удара – **коэффициент восстановления при ударе**:

$$k = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|}.$$

Коэффициент восстановления можно определить опытным путем:

$$k = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_0}} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0}}.$$



Коэффициент восстановления может изменяться от 0 до 1. При $k = 0$ – абсолютно неупругий удар (шар не отскакивает от преграды), при $k = 1$ – абсолютно упругий удар (нет потери энергии при деформации, нет нагрева).

Реальные материалы всегда имеют такие потери энергии и коэффициент восстановления даже для достаточно упругих материалов лишь приближается в той или иной степени к единице. Кроме того коэффициент восстановления зависит от скорости, при которой происходит удар ($k = k(v)$). Поэтому сравнение значений коэффициентов восстановления должно выполняться при одной и той же скорости. Например, при скорости $v = 3$ м/с: стекло – $k = 0.94$; кость – $k = 0.89$; сталь – $k = 0.56$; дерево – $k = 0.50$.

Можно показать, что коэффициент восстановления определяет так же соотношение между импульсами ударной силы в двух фазах:

Основное уравнение удара для первой фазы: $0 - mv = \int_{\tau_1} N_1 dt = S_1$, для второй фазы:

$$mu - 0 = \int_{\tau_2} N_2 dt = S_2.$$



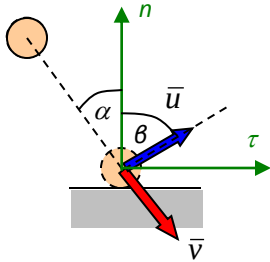
$$k = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Отсюда, импульс второй фазы и суммарный импульс ударной силы в двух фазах зависят от коэффициента восстановления:

$$S_2 = kS_1.$$

$$S = S_1 + S_2 = S_1 + kS_1 = (1 + k)S_1 = (1 + k)mv.$$

Рассмотрим теперь поступательное движение шара массой m со скоростью $\bar{v}$, составляющей некоторый угол (угол падения) к нормали неподвижной массивной поверхности (преграде) – **косой удар**.



Запишем основное уравнение удара:

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{S}$$

Спроецируем на нормаль и касательную к поверхности:

$$m(u_n - v_n) = m(u \cos \beta + v \cos \alpha) = S;$$

$$m(u_\tau - v_\tau) = m(u \sin \beta - v \sin \alpha) = 0. \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Коэффициент восстановления:

$$k = \frac{|\bar{u}_n|}{|\bar{v}_n|} = \frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{v \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta \cdot v \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Поскольку коэффициент восстановления $k < 1$, то **угол отражения больше угла падения**. Угол отражения равен углу падения только в случае абсолютно упругого удара ($k = 1$).

Модуль скорости после удара:

$$u = \sqrt{u_\tau^2 + u_n^2} = \sqrt{v_\tau^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + k^2 (v \cos \alpha)^2} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}.$$

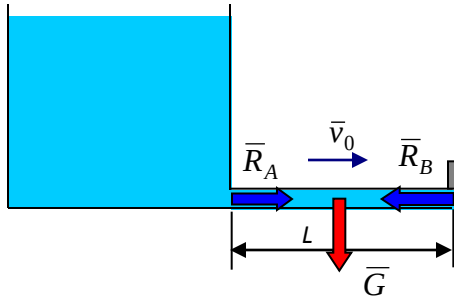
При очень больших углах падения, близких к прямому углу, скорость после удара приближается к скорости до удара ($u \rightarrow v$).

Импульс ударной силы:

$$S = mu \cos \beta + mv \cos \alpha = mv(\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} \cdot \cos \beta + \cos \alpha).$$

При очень больших углах падения, близких к прямому углу, импульс ударной силы приближается к нулю ($S \rightarrow 0$). На этих свойствах, связанных с большими углами падения, основывается эффект запуска “блинчиков” метанием плоских камней (голышей) под острым углом к водной поверхности.

- **Гидравлический удар в трубах** – при резком закрывании задвижки в магистральных трубопроводах может произойти ударное воздействие на элемент запирающего устройства и саму трубу (резко возрастает давление в системе). Рассмотрим трубу длиной L , по которой движется жидкость под некоторым давлением.



Пусть в некоторый момент поток резко прекращается опусканием задвижки.

Запишем теорему об изменении количества движения для объема жидкости, находящейся под давлением в трубе:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e = \bar{S}(\bar{G}) + \bar{S}(\bar{R}_A) + \bar{S}(\bar{R}_B).$$

Спроецируем уравнение на ось x , совпадающей с осью трубы:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \int_{\Delta t} (R_A - R_B) dt = \int_{\Delta t} (p_A - p_B) A dt = \int_{\Delta t} \Delta p A dt.$$

Здесь Δp – разность давлений, A – площадь поперечного сечения потока, Δt – время, за которое ударная волна пройдет расстояние L .

Характер изменения ударной силы (разности давлений) неизвестен. Ударный импульс заменим произведением средней разности давлений на площадь поперечного сечения потока и время импульса:

$$\int_{\Delta t} \Delta p A dt = A \Delta p_{cp} \Delta t.$$

Количество движения жидкости в начальный и конечный моменты:

$$Q_{0x} = Mv_0 = \rho ALv_0; \quad Q_{1x} = 0.$$

Подставим эти выражения в уравнение разности проекций количеств движения:

$$-\rho ALv_0 = A \Delta p_{cp} \Delta t. \quad \Rightarrow \quad -\rho \frac{L}{\Delta t} v_0 = \Delta p_{cp}. \quad \Rightarrow \quad -\rho c v_0 = \Delta p_{cp}.$$

С использованием коэффициента объемного веса получаем **формулу Жуковского**:

$$\frac{\Delta p_{cp}}{\gamma} = \frac{c v_0}{g}.$$

Таким образом, повышение давления не зависит от длины трубы и пропорционально скорости течения жидкости.

Скорость распространения ударной волны в жидкости:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.07 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \cdot 9.81}{1000}} = 1425 \text{ м/с}$$

Здесь E – модуль упругости воды $2.07 \cdot 10^4$ кгс/см².

Поскольку при гидравлическом ударе происходит также деформация трубы, влияющая на изменение плотности жидкости **Жуковским** была получена формула для скорости распространения волны с учетом этого:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E d}{E_m \delta}}}.$$

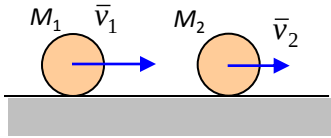
Здесь E_m – модуль материала трубы, d – диаметр трубы, δ – толщина стенки трубы.

Следовательно, гидравлический удар зависит от скорости и будет сильнее в трубах малого диаметра и трубах, изготовленных из материалов с более высоким модулем упругости (например, модуль упругости стали почти в два раз больше модуля упругости меди).

Здесь c – скорость распространения ударной волны.

Знак минус означает, что $R_B > R_A$ и его можно далее опустить.

- **Прямой центральный удар двух тел** – Рассмотрим соударение двух движущихся тел со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) массами M_1 и M_2 .



1. В первой фазе удара ударная сила взаимодействия возрастает от нуля до максимального значения (деформация нарастает до момента выравнивания скоростей). Проекция на горизонтальную ось теоремы об изменении количества движения для всей системы дает:

$$(M_1 + M_2)u - M_1v_1 - M_2v_2 = 0.$$



$$u = \frac{M_1v_1 + M_2v_2}{M_1 + M_2}.$$

Для определения величины механического взаимодействия (импульса) составим такое же уравнение для одного тела, например, 1:

Замечания:

1. В частном случае равенства масс ($M_1 = M_2$) и абсолютно упругого удара ($k=1$) скорость тела 1 после удара будет равна скорости тела 2 до удара и наоборот. Т.е. если тело 2, например, как при игре в бильярд, покоилось, то после удара телом 1 тело 2 получит скорость тела 1, а тело 1 остановится.

2. Проверить полученные соотношения можно подставив их в закон сохранения количества движения:

$$M_1v_1 + M_2v_2 = M_1u_1 + M_2u_2.$$

3. **Отношения модулей относительных скоростей до и после удара определяют коэффициент восстановления** (или наоборот).

Для этого подставим вычтем выражение для скорости u , (в синей рамке) из аналогичного ему выражение для скорости u_2 :

Используем выражение, полученное для импульса первой фазы:

Определим модуль ударного импульса, приложенного к каждому телу за весь период упругого удара (за две фазы):

$$S_2 = S_1 = S_1^I + S_1^{II} = S_1^I + kS_1^I = (1+k)S_1^I.$$

$$S_2 = S_1 = (1+k) \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} (v_2 - v_1).$$

С использованием коэффициента восстановления можно записать:

$$M_1(u_1 - u) = kS_1^I.$$

Поделим это уравнение на **уравнение в красной рамке**:

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k. \quad \Rightarrow \quad u_1 = k(u - v_1) + u = u(1+k) - kv_1.$$

Подставим выражение для скорости u :

$$u_1 = \frac{M_1v_1 + M_2v_2}{M_1 + M_2} (1+k) - kv_1. \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{M_1v_1 + M_2v_2 + kM_1v_1 + kM_2v_2 - M_1kv_1 - M_2kv_1}{M_1 + M_2}.$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{M_1v_1 + M_2v_2 + kM_2(v_2 - v_1)}{M_1 + M_2}. \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{M_1v_1 + \boxed{M_2v_2} + kM_2(v_2 - v_1) + \boxed{M_2v_1} - \boxed{M_2v_1}}{M_1 + M_2}. \quad \Rightarrow \quad u_1 = v_1 + \frac{(k+1)M_2(v_2 - v_1)}{M_1 + M_2}.$$

Заметим, что разность скоростей ($v_2 - v_1$) опять представляет собой *относительную* скорость (скорость сближения) и поскольку $v_2 < v_1$, то скорость тела 1 уменьшается и это уменьшение пропорционально массе тела 2 и относительной скорости. Аналогично можно определить скорость тела 2:

$$u_2 = v_2 - \frac{(k+1)M_1(v_2 - v_1)}{M_1 + M_2}.$$

Здесь скорость тела 2 увеличивается и это увеличение пропорционально массе тела 1.