Министерство образования республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Н. А. АЛЕШКЕВИЧ, Д. Л. КОВАЛЕНКО

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ ПО СПЕЦКУРСУ
для студентов специальности 1 – 31 04 01 03 «Физика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1 – 31 04 01 03 15 «Физическая метрология и автоматизация эксперимента»

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
2008

УДК 006.91(075.8)
ББК 30.10я73.
А 497

Рецензенты:
кафедра оптики учреждения образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно – методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Алешкевич, Н. А.
А 497 Основы теории измерений: тексты лекций по спецкурсу «Основы теории измерений» для студентов специальности 1-31 04 01 03 «Физика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1 – 31 04 01 03 15 «Физическая метрология и автоматизация эксперимента» / Н. А. Алешкевич, Д. Л. Коваленко; М-во обр. РБ, Гомельский государственный университет им. Ф, Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 111 с.

Тексты лекций по спецкурсу «Основы теории измерений» призваны оказать помощь студентам в овладении теоретическими вопросами метрологии и анализа погрешностей измерений и адресованы студентам специализации «Физическая метрология и автоматизация эксперимента», может быть полезно инженерам и научным работникам, занимающихся проведением измерительных экспериментов и обработкой их результатов.

УДК 006.91(075.8)
ББК 30.10я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проведение научных исследований, функционирование промышленных предприятий непосредственно связано с проведением многочисленных измерений. Каждую секунду в мире производятся многие миллиарды измерительных операций, результаты которых используются для обеспечения надлежащего качества и технического уровня выпускаемой продукции, обеспечения безопасной и безаварийной работы транспорта, для медицинских и экологических диагнозов и других важных целей. Практически нет ни одной сферы деятельности человека, где бы интенсивно не использовались результаты измерений, испытаний и контроля.

Основу научной и инженерной деятельности составляет получение, обработка и интерпретация экспериментальных данных. Полученные в результате экспериментов численные значения могут быть далее использованы (в практике или теории) лишь в том случае, если они достоверны. Известно, что любая величина может быть измерена лишь с некоторой определяемой разными факторами точностью. Если взять любую экспериментальную работу, посвященную измерениям какой-либо величины, то обнаружиться, что в ней обязательно встречаются словосочетания “среднее значение”, “среднеквадратичная ошибка измерений”, “дисперсия”, “доверительная вероятность” и др. Данные термины являются основополагающими в теории измерений и характеризуют измеренную величину и погрешность измерения.

Важно, чтобы, начиная с самых первых шагов своей экспериментальной деятельности, студенты понимали, что такое точность измерений, как правильно спланировать эксперимент, чтобы получить результат с требуемой точностью, какова степень достоверности полученных результатов. Все это - основа культуры будущего учителя физики.

Целью данного курса лекций является оказание помощи студентам в овладении методами измерения физических величин, расчете погрешностей и способов их обнаружения, приобретении навыков обработки результатов измерений, моделировании физических процессов, явлений и процедур, оценивание их параметров, обеспечение единства измерений способы и средства достижения требуемой точности эксперимента. Формирование у студентов современных представлений о теории измерений, методах измерения физических и нефизических величин, подготовка к изучению и практическому освоению будущей профессиональной деятельности.

Лекция 1 Системы физических величин, их единиц измерения и размерности

1.1 Предмет и задачи метрологии
1.2 Физическая величина, единица физической величины
1.3 Международная система единиц (СИ)
1.4 Размерность физической величины

1.1 Предмет и задачи метрологии

В практической жизни человек всюду имеет дело с измерениями. Действительно, человечество на всем протяжении своего развития сталкивалось с необходимостью определения и оценки характерных свойств тех предметов и явлений, которые его окружали. Причем, если вначале число этих свойств было ограниченным и знания о них были элементарными (длина, масса, время), то с течением времени и развитием науки и техники информация о них резко увеличилась как количественно (в настоящее время круг величин, подлежащих измерению, значительно расширился, включив механические, тепловые, электрические, световые и другие величины), так и качественно. Соответственно, также с течением времени, менялось и определение понятия метрология.

Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего мира, раскрывая человеку действующие в природе закономерности. Математика, механика, физика стали именоваться точными науками только потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные соотношения, выражающие объективные законы природы.

Великий русский ученый Д. И. Менделеев, которого закономерно считают основоположником современной метрологии, определил метрологию как науку: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немыслима без меры».

Отраслью науки, изучающей измерения, является метрология. Слово «метрология» образовано из двух греческих слов: «метрон» – мера и «логос» учение. Дословный перевод слова «метрология» – учение о мерах.

Для проведения измерения необходимо не только наличие материальных объектов и физических явлений, но и тех технических средств, которыми производят измерения, а также методов, позволяющих грамотно осуществлять процесс измерений.

Так постепенно от описательного определения мы приходим к определению метрологии как науки об измерениях. Измерения служат не только основой научно-технических знаний, но имеют первостепенное значение для учета материальных ресурсов, для торговли, для обеспечения качества продукции, взаимозаменяемости узлов и деталей и совершенствования технологии, для обеспечения безопасности труда и других видов человеческой деятельности.

Все вышеизложенное позволило сформулировать современное определение метрологии следующим образом.

Метрология - *наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.*

В настоящее время установлено следующее определение измерения: измерение есть нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Единство измерений - такое состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности измерений известны с заданной вероятностью. Единство измерений необходимо для того, чтобы можно было сопоставить результаты измерений, выполненных в разных местах, в разное время, с использованием разных методов и средств измерений.

Точность измерений характеризуется близостью их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Таким образом, важнейшей задачей метрологии является обеспечение единства и необходимой точности измерений.

Как следует из определения метрологии, к кругу вопросов, рассматриваемых как метрологические, следует отнести: физические величины; единицы физических величин; измерение физических величин; принципы, методы и методики измерений; средства измерительной техники; результаты измерений; погрешности средств измерений; погрешности измерений; обеспечение единства измерений (эталоны, поверочные схемы, метрологическая служба).

Большинство проводимых измерений в народном хозяйстве - это не самоцель, а промежуточная операция для достижения конечной цели - управления технологическими процессами; учета материальных и энергетических ресурсов; испытания и контроля параметров сырья, полуфабрикатов, продукции и т. п. Таким образом, результат измерений имеет такое большое значение, что требуется регламентация со стороны государства многих норм, требований и правил, используемых в процессе измерений, а в более общем случае, в обеспечении единства измерений в стране.

Метрологию принято делить на две части: теоретическую и прикладную, каждая из которых решает определенный круг задая.

Основные задачи теоретической метрологии:

– разработка новых принципов и методов измерений;

– разработка и совершенствование теоретических основ измерительной техники, прежде всего теории измерений;

– разработка научных основ обеспечения единства мер и измерений;

– создание и совершенствование теоретических основ системы единиц, эталонов и образцовых измерительных средств. Пример такого поиска – изменение единицы длины;

– разработка вопросов теории погрешностей: оценка точности измерения нестационарных процессов; оценка точности многоблочных и автоматизированных измерительных систем.

Основные задачи прикладной метрологии:

– экспериментальные исследования физических явлений и процессов, способных составить основу новых эталонов, в большей степени отвечающих перспективным требованиям практики. По своему содержанию и целям эти работы практически смыкаются с общефизическими исследованиями. К ним, в частности, относятся исследования коллективных квантовых явлений микромира, уточнение фундаментальных физических констант;

– экспериментальные исследования свойств эталонов физических величин с целью установления их метрологических характеристик и потенциальных возможностей. Изученные эталоны применяют для поверочных целей и в экспериментальных исследованиях в качестве прецизионных инструментов наряду с другими изделиями научного и аналитического приборостроения;

– экспериментальное изучение свойств измерительных приборов, датчиков, стандартных образцов;

– создание и совершенствование законодательных основ измерительной техники;

– организация поверочных работ. Из-за влияния различных факторов в средствах измерений протекают деградационные процессы, в результате чего метрологические характеристики средств измерений не остаются постоянными и требуют периодической поверки. Основная цель поверочных процедур – обеспечение единства измерений;

– организация работ по определению качества продукции и ее сертификации Оптимизация измерительного эксперимента, повышение точности измерений;

Таким образом прикладная метрология направлена на решение проблем обеспечения нормального функционирования измерительной техники, единства измерений. Она воплощает в практической деятельности достижения теоретической метрологии и в ряде случаев стимулирует ее развитие.

Область метрологии, включающая комплексы взаимосвязанных и взаимообусловленных общих правил, требований и норм, а также другие вопросы, нуждающиеся в регламентации и контроле со стороны государства, направленные на обеспечение единства измерений и единообразия средств измерений, называется **законодательной метрологией.**

1.2 Физическая величина, единица физической величины

Понятие о физической величине - одно из наиболее общих понятий в физике и метрологии.

Физическая величина - это свойство общее в качественном отношении многим физическим объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта.

Индивидуальность в количественном отношении следует понимать в том смысле, что свойство может быть для одного объекта в определенное число раз больше или меньше, чем для другого.

Мы оперируем такими физическими величинами, как длина, время, температура, сила, давление, скорость и многими другими. Все они определяют общие в качественном отношении физические свойства, количественные же характеристики их могут быть совершенно различными.

Вместе с тем, объектами измерений могут быть не только физические величины, но и экономические, измерения (органолептические), основанные на использовании органов чувств человека (оценка спортивных выступлений в фигурном катании, гимнастике) и т. д. Другими словами, термин «измерение» не ограничен нахождением значения физической величины, так как часто измеряют и нефизические величины. Применяются измерения и в нематериальной сфере. Так, в математике широко используются меры неопределенности, значимости и другие. Эти величины принципиально отличаются от реальных тем, что не подвержены изменениям вследствие внешних воздействий, для их измерений не требуются технические средства измерений.

В общем смысле величины можно сгруппировать по признакам: реальные, включающие в себя физические и нефизические величины; идеальные, включающие в себя математические величины, причем физические можно измерить, нефизические можно оценить или вычислить, математические - вычислить.

Метрология занимается изучением, обработкой, передачей и хранением физических величин и единиц их измерения.

Единица физической величины - это физическая величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице. С древних времен люди пользовались различными единицами для количественного оценивания расстояния, массы тел, продолжительности дня и т. д. Самые древние из единиц относятся к антропометрическим, т. е. те, которые отождествлялись с названиями частей человеческого тела. Например, ладонь (ширина четырех пальцев без большого), пядь (расстояние между пальцами расставленного большого и среднего пальцев), фут (длина ступни), шаг и др.

С развитием человеческого общества антропометрические единицы заменялись другими. Так, в Англии в XIV в. были узаконены дюйм (равный длине трех приставленных друг к другу ячменных зерен), фут (ширина 64 ячменных зерен, положенных бок о бок) и др. В России была установлена точная величина аршина и полусажени (длиной в 14 английских дюйма).

Начали появляться так называемые сопряженные единицы, т. е. единицы, находящиеся во взаимной связи - *верста, сажень, аршин (1 верста = 500 саженям = 1500 аршинам).*

Различные меры применялись не только в различных государствах, но и внутри отдельного государства, что к началу XVIII в. привело к хаосу мер и единиц. Достаточно сказать, что для измерения длины в Европе использовалось около 50 различных по размеру миль.

Развитие науки, техники, торговли потребовало ликвидации, многочисленности единиц. Решение этой проблемы позволило создать метрическую систему мер, в основу которой были положены единицы длины, площади, объема и массы. Впервые это произошло во Франции в конце XVIII века. Основанная на единице длины - метре, она и получила название метрической. Метр был получен путем геодезических измерений и равнялся одной десятимиллионной части четверти дуги парижского меридиана.

Исторически первой системой единиц физических величин была принятая в 1791 г. Национальным собранием Франции **метрическая система мер**. Она не являлась еще системой единиц в современном понимании, а включала в себя единицы длин, площадей, объемов, вместимостей и веса, в основу которых были положены две единицы: метр и килограмм.

В 1875 г. после подписания Метрической конвенции метрическая система мер получила международное признание. Однако метрическая система не являлась системой единиц в том смысле, какой придают этому понятию в настоящее время, поскольку в нее входят единицы весьма ограниченного числа величин - длины, массы, времени, площади, объема (вместимости).После подписания Метрической конвенции было разработано множество систем единиц для различных областей измерений.

Система Гаусса. Впервые понятие системы единиц физических величин было введено немецким математиком К.Гауссом (1832). Идея Гаусса состояла в следующем. Сначала выбирается несколько величин, независимых друг от друга. Данные физические величины называются основными, а их единицы - основными единицами системы единиц. Основные величины выбираются так, что бы, пользуясь формулами, выражающими связь между физическими величинами, можно было образовать единицы других величин. Единицы, полученные с помощью формул и выражений через основные единицы, Гаусс назвал производными единицами.

Пользуясь своей идеей Гаусс построил систему единиц магнитных величин. Основными единицами этой системы были выбраны: миллиметр – единица длины, миллиграмм - единица массы, секунда - единица времени.

Хотя система Гаусса не получила широкого распространения из-за малого размера основных единиц, идеи Гаусса оказались весьма плодотворными и все последующие системы единиц строились на предложенных принципах.

Система СГС. Система единиц физических величин СГС, в которой основными единицами являются сантиметр как единица длины, грамм как единица массы и секунда как единица времени, была установлена в 1881 г. В системе СГС с использованием указанных трех основных единиц установлены производные единицы механических и акустических величин. С использованием единицы термодинамической температуры - кельвина - и единицы силы света - канделы - система СГС распространяется на область тепловых и оптических величин.

Система МКС. Основные единицы системы МКС: метр - единица длины, килограмм - единица массы, секунда - единица времени. Эта система была предложена в 1901 г. итальянским инженером Джорджи и содержала кроме основных производные единицы механических и акустических величин.

Система МКСА. В отличие от системы МКС здесь была ведена четвертая основная единица ампер (единица силы тока).

Система МТС. Данная система была разработана во Франции и узаконена ее правительством в 1919 г. Основные единицы системы МТС: метр – единица длины, тонна – единица массы, секунда – единица времени. Данная система была принята и в СССР и в соответствии с государственным стандартом применялась более 20 лет (1933-1955)..

Система МКГСС. Применение килограмма как единицы веса, а в последующем как единицы силы вообще, привело в конце XIX века к формированию системы единиц физических величин с тремя основными единицами: метр - единица длины, килограмм-сила - единица силы и секунда - единица времени. Основной недостаток системы МКГСС – весьма ограниченные возможности применения в физике.

Таким образом, система единиц физических величин - это совокупность основных и производных единиц, относящихся к некоторой системе величин и образованная в соответствии с принятыми принципами.

1.3 Международная система единиц (СИ)

Наличие ряда систем единиц физических величин, а также значительного числа внесистемных единиц, неудобства, связанные с пересчетом при переходе от одной системы единиц к другой, требовало унификации единиц измерений. Рост научно-технических и экономических связей между разными странами обусловливал необходимость такой унификации в международном масштабе. Требовалась единая система единиц физических величин, практически удобная и охватывающая различные области измерений. При этом она должна была сохранить принцип когерентности (равенство единице коэффициента пропорциональности в уравнениях связи между физическими величинами).

В 1954 г. X Генеральная конференция по мерам и весам установила шесть основных единиц (метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин и свеча) практической системы единиц. Система, основанная на утвержденных в 1954 г. шести основных единицах, была названа Международной системой единиц, сокращенно СИ (SI - начальные буквы французского наименования Systeme International).

Основные и дополнительные единицы СИ с указанием сокращенных обозначений русскими и латинскими буквами приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные и дополнительные единицы СИ

Величина	Единица измерения	Сокращенное обозначение единицы	
		русское	международное
Основные			
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	ампер	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	К	K
Сила света	кандела	кд	cd
Количество вещества	моль	моль	mol

Основные единицы. Определения основных единиц, соответствующие решениям Генеральной конференции по мерам и весам, следующие.

Метр равен длине пути, проходимого светом в вакууме за 1/299792458 долю секунды.

Килограмм равен массе международного прототипа килограмма.

Секунда равна 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывает на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Кельвин равен 1/273.16 части термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде - 12 массой 0.012 кг.

Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

Производные единицы СИ. Производные единицы Международной системы единиц образуются с помощью простейших уравнений между величинами, в которых числовые коэффициенты равны единице. Так, для линейной скорости в качестве определяющего уравнения можно воспользоваться выражением для скорости равномерного прямолинейного движения $v = l / t$. При длине пройденного пути (в метрах) и времени t, за которое пройден этот путь (в секундах), скорость выражается в метрах в секунду (м/с). Поэтому единица скорости СИ - *метр в секунду* - это скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.

Если в определяющее уравнение входит числовой коэффициент, то для образования производной единицы в правую часть уравнения следует подставлять такие числовые значения исходных величин, чтобы числовое значение определяемой производной единицы было равно единице. Например, единица кинетической энергии СИ - килограмм $\cdot$ метр в квадрате на секунду в квадрате - это кинетическая энергия тела массой 2 кг, движущегося со скоростью 1 м/с, или кинетическая энергия тела массой 1 кг, движущегося со скоростью $\sqrt{2}$ м/с. Эта единица имеет особое наименование - *джоуль* (сокращенное обозначение Дж).

Кратные и дольные единицы. Наиболее прогрессивным способом образования кратных и дольных единиц является принятая в метрической системе мер десятичная кратность между большими и меньшими единицами.

В таблице 2 приводятся множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования.

Таблица 2 – Множители и приставки кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		русское	международное
10^{18}	экса	Э	*E*
10^{15}	пета	П	*P*
10^{12}	тера	Т	*T*

10^{9}	гига	Г	*G*
10^{6}	мега	М	*M*
10^{3}	кило	к	*k*
10^{2}	гекто	г	*h*
10^{1}	дека	да	*da*
10^{-1}	деци	д	*d*
10^{-2}	санти	с	*c*
10^{-3}	милли	м	*m*
10^{-6}	микро	мк	μ
10^{-9}	нано	н	*n*
10^{-12}	пико	п	*p*
10^{-15}	фемто	ф	*f*
10^{-18}	атто	а	*a*

Следует учитывать, что при образовании кратных и дольных единиц площади и объема с помощью приставок может возникнуть двойственность прочтения в зависимости от того, куда добавляется приставка. Так, сокращенное обозначение 1 км^2 можно трактовать и как 1 квадратный километр и как 1000 квадратных метров, что, очевидно, не одно и то же (1 квадратный километр = 1.000.000 квадратных метров). В соответствии с международными правилами кратные и дольные единицы площади и объема следует образовывать, присоединяя приставки к исходным единицам.

Основными достоинствами и преимуществами системы СИ перед другими системами единиц являются:

– универсальность, т. е. охват всех областей науки и техники;

– унификация всех областей и видов измерений;

– упрощение записи формул в физике, химии, а также в технических науках в связи с отсутствием переводных коэффициентов;

– уменьшение числа допускаемых единиц;

– единая система образования кратных и дольных единиц, имеющих собственные наименования;

– облегчение педагогического процесса в средней и высшей школах, так как отпадает необходимость в изучении множества систем единиц и внесистемных единиц;

– лучшее взаимопонимание при развитии научно-технических и экономических связей между различными странами.

1.4 Размерность физической величины

Размерность физической величины – одна из важнейших ее характеристик, которую можно определить как буквенное выражение, отражающее связь данной величины с величинами, принятыми за основные в рассматриваемой системе величин. Так, система величин, которая именуется Международной системой единиц, содержит семь основных системных величин: **l, m, t, I, T, ν** и **J**, где l – длина, m – масса, t – время, I – сила электрического тока, T – термодинамическая температура, ν – количество вещества, J – сила света. Для этих величин условно приняты следующие размерности: для длины – L, массы – M, времени – T, силы электрического тока – I, термодинамической температуры – Θ, количества вещества – N и силы света – J. Размерности записывают прописными буквами и печатают прямым шрифтом.

Размерность величины *x* обозначается через dim *x*. Например:

$$\dim t = \mathrm{T};\ \dim l = \mathrm{L};\ \dim m = \mathrm{M}$$

Над размерностями величин, как и над самими величинами, можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Показатель степени, в которую возведена размерность основной величины, входящей в степенной одночлен, называют показателем размерности.

Размерность производных физических величин определяется исходя из уравнения связи между физическими величинами. Например,

$$\dim \upsilon = \frac{\dim l}{\dim t} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1};\ \dim a = \frac{\dim \upsilon}{\dim t} = \frac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2};$$

$$\dim F = \dim m \cdot \dim a = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2};\ \dim A = \dim F \cdot \dim l = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{2}\cdot\mathrm{T}^{-2}.$$

Различают как размерные, так и безразмерные физические величины. К первым относят такие величины, в размерностях которых хотя бы один из показателей размерности не равен нулю. Безразмерными физическими величинами называют физические величины, в размерностях которых все показатели размерности равны нулю.

По поводу физического смысла размерностей физических величин существуют различные взгляды. М.Планк писал: «Ясно, что размерность какой-либо физической величины не есть свойство, связанное с существом ее, но представляет просто некоторую условность, определяемую выбором системы измерений». Другой точки зрения придерживался известный ученый А.Зоммерфельд. Он связывал выбор основных физических величин и их размерностей с самой сущностью физических величин.

Важно знание не столько размерностей физических величин, сколько использование их для освоения физических знаний. В этой связи интересным является тот факт, что во многих областях физики и смежных науках применяется метод исследования, который получил название анализа размерностей.

Анализ размерности - метод, используемый физиками для построения обоснованных гипотез о взаимосвязи различных размерных параметров сложной физической системы. Иногда анализ размерности можно использовать для получения готовых формул (с точностью до безразмерной константы). Суть метода заключается в том, что из параметров, характеризующих систему, составляется выражение, имеющее нужную размерность.

Особенно плодотворным он оказывается в тех случаях, когда нахождение искомой закономерности прямым путем либо встречает значительные математические трудности, либо требует знания таких деталей, которые заранее неизвестны». Применение метода анализа размерностей началось со времени И.Ньютона. Его развивали и уточняли У.Томсон, Дж.Рэлей. Э.Ферми утверждал, что действительно понимающие природу того или иного явления должны уметь получать основные закономерности из соображений размерностей

Лекция 2 Измерение физических величин

2.1 Виды измерений

Измерение физических величин заключается в сопоставлении какой-либо величины с однородной величиной, принятой за единицу. В теории измерений (метрологии) используется термин "***измерение***", под которым понимается *совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины*. Следует отметить, что термин "измерение" в таком понятии значительно сокращает область его применения, так как широко применяются измерения (органолептические), основанные на использовании органов чувств человека (например, оценка спортивных выступлений в фигурном катании, гимнастике). Другими словами, термин "измерение" не ограничен нахождением значения физической величины, так как часто измеряют и нефизические величины. Производным от термина «измерение» является термин «измерять», широко используемый на практике. Встречаются термины «мерить», «обмерять», «замерять», но применение их в метрологии недопустимо.

Измерения, выполняемые с помощью специальных технических средств, **называют инструментальными**. Простейшим примером таких измерений является определение размера детали линейкой с делениями, т. е. сравнение размера детали с единицей длины, хранимой линейкой.

Для упорядочения измерительной деятельности измерения классифицируют по следующим признакам:

– общим приемам получения результатов измерений - **прямые, косвенные, совместные** и **совокупные;**
– числу измерений в серии - **однократные** и **многократные**;
– метрологическому назначению - **технические** и **метрологические**;
– характеристике точности - **равноточные** и **неравноточные**;
– отношению к изменению измеряемой величины - **статические** и **динамические**;
– выражению результата измерений - **абсолютные** и **относительные**.

Прямые измерения - измерения, при которых искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных (измерения массы на весах, температуры термометром, длины с помощью линейных мер). Прямые измерения можно выразить формулой Q = X, где Q - искомое значение измеряемой величины, а X - значение, непосредственно получаемое из опытных данных.

При прямых измерениях экспериментальным операциям подвергают измеряемую величину, которую сравнивают с мерой непосредственно или же с помощью измерительных приборов, градуированных в требуемых единицах. Примерами прямых служат измерения длины тела линейкой, массы при помощи весов и др. Прямые измерения широко применяются в машиностроении, а также при контроле технологических процессов (измерение давления, температуры и др.).

Косвенные измерения - измерения, при которых искомое значение находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, полученными прямыми измерениями *(определение плотности однородного тела по его массе и геометрическим размерам, удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения)*.

Значение измеряемой величины находят путем вычисления по формуле $Q = F(x_1, x_2 \ldots x_n)$, где Q- искомое значение косвенно измеряемой величины; F- функциональная зависимость, которая заранее известна, $x_1, x_2 \ldots x_n$ - значения величин, измеренных прямым способом.

Примеры косвенных измерений: определение объема тела по прямым измерениям его геометрических размеров, нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения.

Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно измерить непосредственно или когда прямое измерение дает менее точный результат. Роль их особенно велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например размеров астрономического или внутриатомного порядка.

Совокупные измерения - измерения нескольких однородных величин, при которых искомое значение величин находят решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин *(измерения, при которых масса отдельных гирь набора находится по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь)*.

Примером совокупных измерений является определение массы отдельных гирь набора (калибровка по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь).

Совместные измерения - одновременные измерения двух или нескольких неодноименных величин для нахождения зависимости между ними *(проводимые одновременно измерения приращения длины образца в зависимости от изменений его температуры и определение коэффициента линейного расширения)*.

В качестве примера можно назвать измерение электрического сопротивления при 20^0С и температурных коэффициентов измерительного резистора по данным прямых измерений его сопротивления при различных температурах.

Абсолютные измерения - измерения, основанные на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и использовании физических констант.

Относительные измерения - получение отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или изменения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную.

Однократное измерение - измерение, выполняемое один раз (измерение конкретного времени по часам).

Многократные измерения - измерения одной и той же физической величины, результат которых получают из нескольких следующих друг за другом измерений. Обычно многократными измерениями считаются те, которые производятся свыше трех раз.

Технические измерения - измерения, выполняемые при помощи рабочих средств измерений с целью контроля и управления научными экспериментами, контроля параметров изделий и т. д. (измерение давления воздуха в автомобильной камере).

Метрологические измерения - измерения при помощи эталонов и образцовых средств измерений с целью нововведения единиц физических величин или передачи их размеров рабочим средствам измерений.

Равноточные измерения - ряд измерений какой-либо величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях.

Неравноточные измерения - ряд измерений какой-либо величины, выполненных различными по точности средствами измерений и в разных условиях.

Статические измерения - измерения физической величины, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения (измерения размера детали при нормальной температуре).

Динамические измерения - измерения физической величины, размер которой изменяется с течением времени *(измерения расстояния до уровня земли со снижающегося самолета)*.

2.2 Средства измерений

Средства измерений – технические средства, применяемые для проведения экспериментальной части измерений и имеющие нормированные метрологические свойства. Средства измерений являются носителями единиц, в которых хотят выразить измеряемые величины. В связи с большим количеством видов измеряемых величин принципы действия средства измерений весьма разнообразны. Существуют средства измерений, в основе действия которых лежат механические, электрические, электронные, магнитные, оптические, термические, химические и другие явления, а также их сочетания. Кроме чисто измерительных целей, средства измерений широко используются также в устройствах контроля, сигнализации, регулирования, управления производственными процессами, а также для сбора всякого рода информации, подлежащей в дальнейшем обработке с помощью вычислительных машин.

Для практического измерения единицы величины применяются технические средства, которые имеют нормированные погрешности и называются средствами измерений. К средствам измерений относятся: **меры, измерительные приборы**, **измерительные установки и системы**, **измерительные преобразователи и измерительные принадлежности.**

Мера - средство измерений, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера *(гиря - мера массы, генератор - мера частоты электрических колебаний)*.

Меры, в свою очередь, подразделяют на **однозначные** и **многозначные** меры.

Однозначная мера - мера, воспроизводящая физическую величину одного размера *(плоскопараллельная концевая мера длины, нормальный элемент, конденсатор постоянной емкости)*.

Многозначная мера - мера, воспроизводящая ряд одноименных физических величин различного размера *(линейка с миллиметровыми делениями, конденсатор переменной емкости)*.

Набор мер - специально подобранный комплект мер, применяемых не только по отдельности, но и в различных сочетаниях с целью воспроизведения ряда одноименных величин различного размера (*набор гирь, набор плоскопараллельных концевых мер длины)*.

Измерительные приборы - это средства измерений, которые позволяют получать измерительную информацию в форме, удобной для восприятия пользователем. Различаются измерительные приборы прямого действия и приборы сравнения. В зависимости от метода регистрации и формы представления результата измерения измерительные приборы делятся на **аналоговые** (шкальными) и **цифровые**.

Аналоговые приборы состоят из **шкалы**, представляющей собой совокупность отметок и чисел, изображающих ряд последовательных значений измеряемой величны, и **указателя** (стрелки, электронного луча и других), связанных с подвижной системой прибора.

Отметки шкалы с представленными числовыми значениями называют числовыми отметками шкалы. **Основные характеристики шкалы - длина деления** шкалы, выражающаяся расстоянием между осями двух соседних штрихов шкалы, и **цена деления** шкалы, представляющая значение измеряемой величины, вызывающей перемещение указателя на одно деление.

Диапазон измерений представляет собой часть диапазона показаний, для которого нормированы пределы допускаемых погрешностей средств измерений. Наименьшее и наибольшее значения диапазона измерений называют соответственно **нижним** и **верхним пределами измерений**.

Значение величины, определяемое по отсчетному устройству средства измерений и выраженное в принятых единицах этой величины; называют **показанием средства измерений**.

Приборы прямого действия отображают измеряемую величину на показывающем устройстве, имеющем соответствующую градуировку в единицах этой величины. Изменения рода физической величины при этом не происходит. *К приборам прямого действия относят, например, амперметры, вольтметры, термометры и т.п.*

Приборы сравнения предназначаются для сравнения измеряемых величин с величинами, значения которых известны. Такие приборы широко используются в научных целях, а также и на практике для измерения таких величин, как яркость источников излучения, давление воздуха и др.

Измерительные установки и системы - это совокупность средств измерений, объединенных по функциональному признаку со вспомогательными устройствами, для измерения одной или нескольких физических величин объекта измерений. Обычно такие системы автоматизированы и обеспечивают ввод информации в систему, автоматизацию самого процесса измерения, обработку и отображение результатов измерений для восприятия их пользователем.

Измерительный преобразователь - это средство измерений, которое служит для преобразования сигнала измерительной информации в форму, удобную для обработки или хранения, а также передачи в показывающее устройство. Измерительные преобразователи либо входят в конструктивную схему измерительного прибора, либо применяются совместно с ним, но сигнал преобразователя не поддается непосредственному восприятию наблюдателем. Например, преобразователь может быть необходим для передачи информации в память компьютера, для усиления напряжения и т.д. *Преобразователи подразделяются на* ***первичные*** *(непосредственно воспринимающие измеряемую величину),* ***передающие****, на выходе которых величина приобретает форму, удобную для регистрации или передачи на расстояние;* ***промежуточные****, работающие в сочетании с первичными и не влияющие на изменение рода физической величины.*

Измерительные принадлежности - это вспомогательные средства измерений величин. Они необходимы для вычисления поправок к результатам измерений, если требуется высокая степень точности. *Например, термометр может быть вспомогательным средством, если показания прибора достоверны при строго регламентированный температуре; психро-*

метр - если строго оговаривается влажность окружающей среды. Следует учитывать, что измерительные принадлежности вносят определенные погрешности в результат измерений, связанные с погрешностью самого вспомогательного средства.

По метрологическому назначению средства измерений делят на два вида - **рабочие** средства измерений и **эталоны**. Рабочие средства измерений применяют для определения параметров (характеристик) технических устройств, технологических процессов, окружающей среды и др. Рабочие средства могут быть лабораторными (для научных исследований), производственными или учебными (для обеспечения и контроля заданных характеристик технологических процессов), полевыми (для самолетов, автомобилей, судов и т.п.). Каждый из этих видов рабочих средств отличается особыми показателями. Так, лабораторные средства измерений - самые точные и чувствительные, а их показания характеризуются высокой стабильностью. Производственные (учебные) обладают устойчивостью к воздействиям различных факторов производственного процесса: температуры, влажности, вибрации и т.п., что может сказаться на достоверности и точности показаний приборов. Полевые работают в условиях, постоянно изменяющихся в широких пределах внешних воздействий.

2.3 Методы и методики измерений

Выбор метода зависит от вида измеряемой величины, ее размера, точности результата измерений, быстроты его получения, условий, при которых проводятся измерения, и ряда других признаков (длину можно измерить линейкой, микрометром и т. д.).

Под термином **метод измерений** подразумевается способ решения измерительной задачи, характеризуемый его теоретическим обоснованием и разработкой основных приемов применения средств измерений. Существует более простое определение понятия метода измерений. **Метод измерений - совокупность приемов использования принципов и средств измерений.**

Принцип измерений - это совокупность физических явлении, на которых основаны измерения. *Например, температуру можно измерять платиновым термометром (принцип измерения - зависимость сопротивления платины от температуры) и термоэлектрическим термометром (принцип измерения - зависимость ТЭДС от разности температур).*

Каждую физическую величину можно измерить несколькими методами, которые имеют особенности как технического, так и методического характера. С методической стороны методы измерений поддаются систематизации и обобщению по характерным признакам.

Основными методами являются:

Метод непосредственной оценки, в котором значение измеряемой величины определяют непосредственно по отсчетным устройствам измерительного прибора прямого действия (отсчет по часам, барометру-анероиду, термометру).

Метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой (измерения массы на рычажных весах с уравновешиванием гирями; измерение напряжения постоянного тока на компенсаторе сравнением с ЭДС параллельного элемента).

Метод замещения - разновидность метода сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой (взвешивание с поочередным помещением измеряемой массы груза и гирь на одну и ту же чашу весов).

Контактный и бесконтактный методы - методы, при которых чувствительный элемент прибора приводится или не приводится в контакт с объектом измерений (измерения диаметра вала измерительной скобой осуществляется контактным методом; температуры в доменной печи - бесконтактным методом).

Дифференциальный метод характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод позволяет получить результат высокой точности при использовании относительно грубых средств измерения.

Пример 2.1. Измерить длину x стержня, если известна длина l (l < x) меры. Из рисунка 2.1, $x = l + a$ *(a — измеряемая величина).*

Действительные значения $a_д$ *будут отличаться от измеренного a на величину погрешности Δ:* $a_д = a \pm \Delta = \alpha(1 \pm \Delta/\alpha)$.

Тогда $x = l + \alpha \pm \Delta = (l + a)(l \pm \frac{\Delta}{l+\alpha})$. *Поскольку* $l >> a$, *то* $\frac{\Delta}{(l+1)} << \frac{\Delta}{a}$

Пусть $\Delta = 0.1$*мм,* $l = 1000$*мм,* $a = 10$*мм.*

Тогда: $\frac{0{,}1}{1010} = 0{,}0001(0{,}01\%) << \frac{0{,}1}{10} = 0{,}01(1\%)$

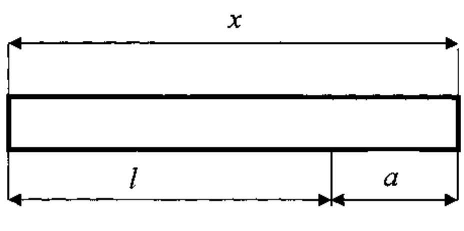

Рисунок 2.1 – Дифференциальный метод измерения

Нулевой метод аналогичен дифференциальному, но разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю. *Другими словами н**улевой метод** - это метод сравнивания с мерой, в котором результирующий* *эффект воздействия измеряемой величины и меры на прибор сводят к нулю (взвешивание на равноплечих весах - безмене, шкальных весах)*.

При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины. Рассмотрим, например, неравноплечие весы (рисунок 2.2, *а*), где $P_1 1_1 = P_2 l_2$. *В* электротехнике - это мосты для измерения индуктивности, емкости, сопротивления (рисунок 2.2, *б*). Здесь $r_1 r_2 = r_x r_3$ откуда $r_x = r_1 r_2 / r_3$. В общем случае совпадение сравниваемых величин регистрируется нуль-индикатором (И).

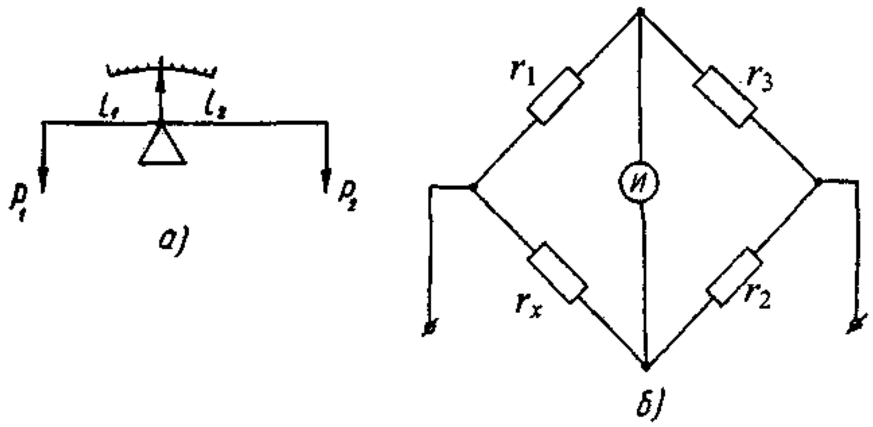

Рисунок 2.2 – Нулевой метод измерения: а – схема механических весов; б – схема электрического моста

Кроме того, можно выделить **нестандартизованные методы:**

– ***метод противопоставления***, при котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения. Например, измерения массы на равноплечих весах с помещением измеряемой массы и уравновешивающих ее гирь на двух чашках весов;

– ***метод совпадений,*** где разность между сравниваемыми величинами измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов. *Например, при измерении длины штангенциркулем наблюдают совпадение отметок на шкалах штангенциркуля и нониуса; при измерении частоты вращения стробоскопом – метки на вращающемся объекте с момента вспышек известной частоты.*

Выбор метода зависит от его теоретической проработки, конкретных средств измерений. *Например, для решения такой измерительной задачи, как определение высоты телебашни, можно использовать один из следующих методов:*

– *измерить высоту телебашни рулеткой (метод сравнения с мерой);*
– *на вертолете подняться до уровня телебашни и определить расстояние по высотомеру (метод непосредственной оценки);*
– *вычислить высоту телебашни, используя тригонометрические функции прямоугольного треугольника, т. е. измеряя горизонтальное рас-*

стояние до телебашни и вертикальный угол, образованный основанием и вершиной телецентра (метод косвенных измерений).

Методы измерений предусматривают разработку основных приемов применения средств измерений, а методика их проведения представляет собой требования к выбору средств измерений, последовательность выполнения операций, соблюдение установленных условий измерений, числа измерений, способов обработки их результатов.

Строгое определение понятия методика измерений стандартами не определено, однако, с учетом имеющегося опыта разработок методик измерений в стране его можно сформулировать так: **методика измерений** - это установленная совокупность операций и правил, выполнение которых при измерении обеспечивает получение результатов измерений в соответствии с данным методом.

2.4 Результаты измерений

Измерение - это процесс, завершающим этапом которого является результат измерений. Например, токарь в процессе изготовления детали периодически для контроля проводит измерения с помощью штангенциркуля; на основании получаемых результатов он принимает решение о дальнейшей обработке детали. Результатом измерений является именно значение величины, которое удалось получить при помощи того или иного средства измерений.

В результате измерения должны быть определены три величины:

1) число, выражающее отношение измеряемой физической величины к общепринятой единице измерения,

$$A = \frac{X}{x}, \tag{2.1}$$

где A – числовое значение измеряемой величины; X – измеряемая величина; x – единица измерения;

2) погрешность результата измерения;

3) доверительная вероятность допущенной погрешности (при обычных технических измерениях погрешность определяется с вероятностью 95 %).

Доверительная вероятность допущенной погрешности зависит от важности производимых измерений (чем более важны и ответственны измерения, тем более высокая доверительная вероятность допущенной погрешности должна быть задана).

Часто в полученный результат измерения вводят поправки, поэтому значение величины до и после введения поправки будет различным. Это находит отражение в применяемой терминологии.

Неисправленный результат измерения - значение физической величины, полученное при помощи средств измерений до введения поправок;

исправленный результат измерения - значение физической величины, полученное при помощи средств измерений и уточненное путем введения в него необходимых поправок.

В отдельных случаях результат измерений имеет небольшое значение, в других случаях результат измерений играет исключительно большую роль. Например, неправильный результат измерения давления у человека может сказаться на его здоровье. Диапазон значимости целей, для которых проводятся измерения, определяет диапазон требований, предъявляемых к качеству измерений.

К основным характеристикам качества измерений относятся точность, правильность, сходимость и воспроизводимость.

Точность измерений - качество измерений, отражающее близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Правильность измерений - качество измерений, отражающее близость к нулю систематических погрешностей в их результатах.

Сходимость измерений - качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в одинаковых условиях повторно одними и теми же средствами измерений, одним и тем же методом.

Воспроизводимость измерений - качество измерений, отражающее близость друг к другу результатов измерений, выполняемых в различных условиях (в различное время, в различных местах, различными методами и средствами).

В практике метрологических работ широко используется также термин **«достоверность измерений»**, по существу являющийся синонимом термина «точность измерения».

Даже самое тщательное проведение измерения вне зависимости от его точности и метода не позволяет получить истинного значения измеряемой величины. Так как истинное значение измеряемой величины остается неизвестным, а при проведении повторных измерений мы несколько приближаемся к нему, то для оценки степени приближения к истинному значению используются положения теории вероятностей. Эта теория дает возможность оценивать вероятностные границы погрешностей, за пределы которых они не выходят.

Достоверность измерений характеризует степень доверия к полученным результатам измерений. Это позволяет для каждого конкретного случая выбирать методы и средства измерений, обеспечивающие получение результата с заданной точностью.

Лекция 3 Погрешности измерений

3.1 Классификация погрешностей

При измерении любой физической величины, как бы тщательно не выполнялись измерения, принципиально невозможно получить ее истинное значение, то есть свободный от искажений результат. Величина этих искажений и причины их проявления обусловлены разнообразными факторами, например, несовершенством методики и средств измерений, изменениями условий измерений из-за наличия случайных помех, индивидуальными способностями экспериментатора и другими. Искажения, которые получаются при любом измерении, приводит к погрешности измерения.

Введение понятия «погрешность» требует определения и четкого разграничения трех понятий: *истинного* и *действительного значений* измеряемой физической величины и *результата измерения*.

Истинное значение $x_и$ ***физической величины*** – это значение, идеальным образом отражающее свойство данного объекта как в количественном, так и в качественном отношении. Оно не зависит от средств нашего познания и является той абсолютной истиной, к которой мы стремимся, пытаясь выразить ее в виде числовых значений. На практике истинное значение практически всегда неизвестно (в редких случаях оно может быть определено с применением первичных или вторичных эталонов), поэтому его приходится заменять понятием «действительное значение».

Действительное значение $x_д$ ***физической величины*** – значение, найденное экспериментально и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели оно может быть использовано вместо него. Действительное значение может быть получено при помощи рабочих эталонов.

Результат измерения (измеренное значение) x представляет собой приближенную оценку истинного значения величины, найденную путем измерения (результат, полученный с помощью рабочего средства измерения).

Изложенное позволяет сформулировать **два постулата метрологии**:

1. *Истинное значение определяемой величины существует, и оно постоянно.*

2. Истинное значение измеряемой величины отыскать невозможно. Отсюда следует, что результат измерения х, как правило, математически связан с измеряемой величиной вероятностной зависимостью.

При практическом использовании тех или иных измерений важно оценить их точность. Термин «*точность измерений*», т. е. степень приближения результатов измерения к некоторому действительному значению, не имеет строгого определения и используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки используется понятие «*погрешность»* (чем меньше погрешность, тем выше точность).

Понятие *«погрешность*» – одно из центральных в метрологии, а оценка погрешности измерений — одно из важных мероприятий по обеспечению единства измерений. В метрологии используются понятия «*погрешность результата измерения*» и «*погрешность средства измерения*».

Погрешность измерения $\Delta x_{изм}$ **–** это отклонение результата измерения *x* от истинного (действительного) $x_и$ $(x_д)$ значения измеряемой величины:

$$\Delta x_{изм} = x - x_и\,, \qquad или \qquad \Delta x_{изм} = x - x_д\,. \qquad (3.1)$$

Погрешность средства измерения - отклонение показания средства измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины. Оно характеризует точность результатов измерений, проводимых данным средством. Эти два понятия во многом близки друг к другу и классифицируются по одинаковым признакам.

Погрешность измерения включает в себя множество различных составляющих, которые можно классифицировать по различным признакам. В настоящее время классификация погрешностей содержит около 30 видов (см. пример классификации на рисунке 3.1).

Погрешности измерения можно разделить:

– по характеру (закономерностям) проявления или изменения от измерения к измерению – на *случайные, систематические и грубые промахи,*

– по формам числового выражения – *абсолютные, относительные и приведенные*;

– по источникам возникновения – на *методические, инструментальные, субъективные (погрешности оператора)*, которые, в свою очередь, могут быть как случайными, так и систематическими;

– по характеру изменения во времени – на *статические и динамические*;

– по характеру принадлежности (близости) результатов наблюдений к основной совокупности выделяют *грубые погрешности и промахи*.

– по уровню имеющейся информации – *определенные* и *неопределенные*;

– по формам используемых оценок - *среднее квадратическое значение, доверительные границы погрешности и др.;*

– по возможности выявления и исключения из результатов измерения – на *выявленные* и *невыявленные, устранимые* и *неустранимые, исключенные и неисключенные*;

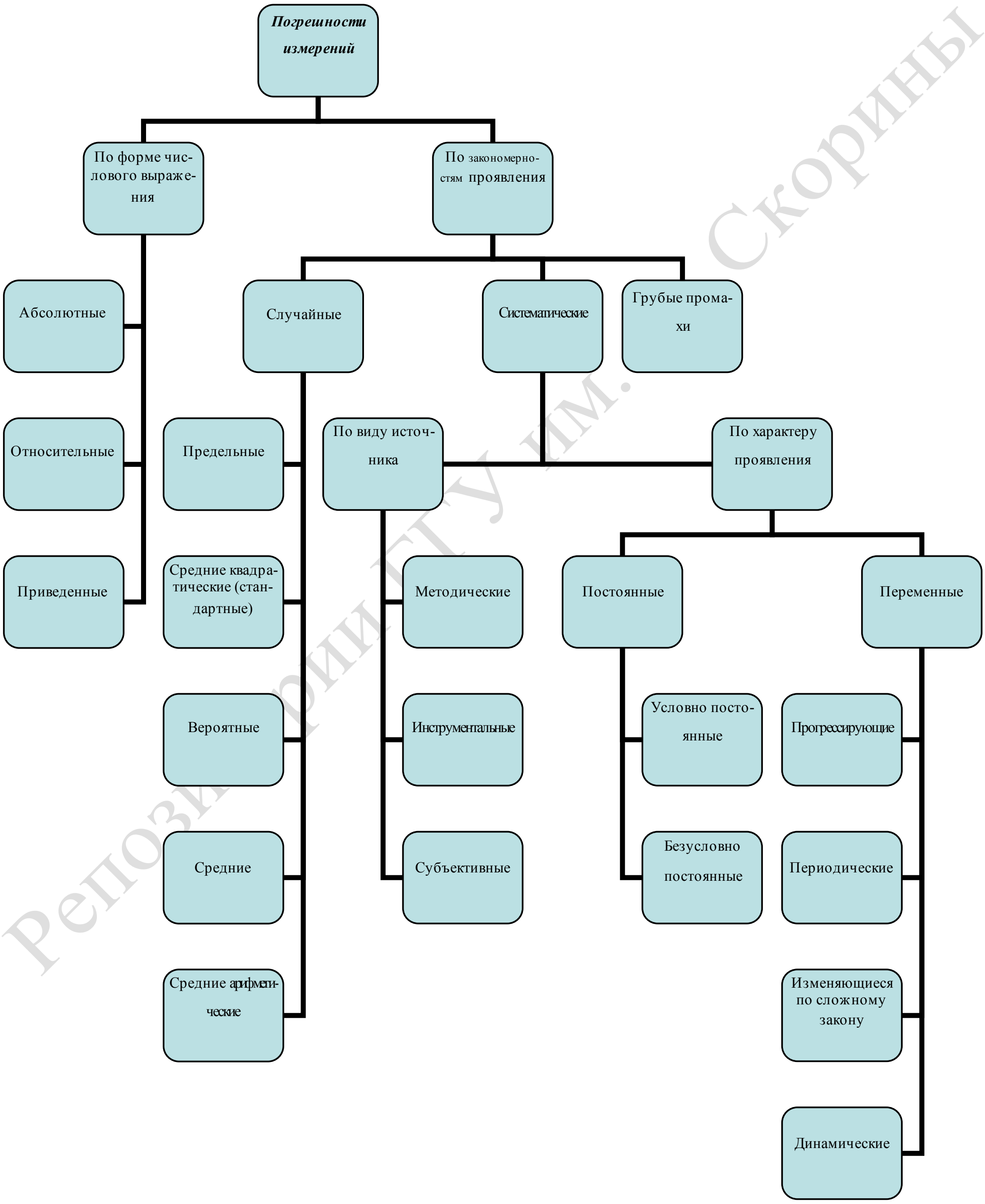

Рисунок 3.1 – Классификация погрешностей измерения.

3.2 Систематические погрешности

Систематическая погрешность θ – это составляющая погрешности измерения, которая остаётся постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях.

К систематическим погрешностям измерений можно отнести те составляющие, для которых можно считать доказанным наличие функциональных связей с вызывающими их аргументами. Для них можно предложить следующее определение: *систематическая погрешность – закономерно изменяющаяся составляющая погрешности измерений.*

Формально это записывается в виде

$$\theta = F(\varphi, \psi \ldots), \qquad (3.2)$$

где φ, ψ – аргументы, вызывающие систематическую погрешность. Главной особенностью систематической погрешности является принципиальная возможность ее выявления, прогнозирования и однозначной оценки, если удается узнать вид функции и значения аргументов.

Одной из основных задач обработки результатов эксперимента является выявление, оценка величины и, по возможности, устранение всех систематических погрешностей. Изменяющиеся систематические погрешности выявляются легче постоянных. Для выявления постоянной систематической погрешности необходимо выполнить измерения хотя бы двумя различными способами или методами. Обнаруженные и оцененные систематические погрешности исключаются из результатов путем введения поправок.

В зависимости от причин возникновения систематические погрешности подразделяют на следующие виды:

1 Погрешности метода или модели, которые обычно называют ***методическими погрешностями***, например: определение плотности вещества без учета имеющихся в нем примесей, использование формул, не совсем точно описывающих явление, и др.

2 Погрешности воздействия ***внешних факторов***: внешних тепловых, радиационных, гравитационных, электрических и магнитных полей.

3 Погрешности, возникающие из-за неточности действий или личных качеств оператора (экспериментатора), называемые ***субъективными погрешностями***.

4 ***Инструментальные (приборные, аппаратурные) погрешности***, обусловленные схемными, конструктивными и технологическими несо-

вершенствами средств измерения, их состоянием в процессе эксплуатации. *Например, смещение начала отсчета, неточность градуировки шкалы прибора, использование прибора вне допустимых пределов его эксплуатации, неправильное положение прибора и т. п. За исключением смещения начала отсчета, приборные погрешности относятся к разряду неустранимых погрешностей.*

В общем случае систематическая погрешность обусловлена суммарным воздействием перечисленных факторов, многие из которых невозможно рассчитать, подавить или выявить в данном эксперименте. Самым простым способом выявления суммарной систематической погрешности было бы сопоставление результатов измерений, полученных с помощью серийного (рабочего) и более точного образцового приборов. Разность результатов измерений даст суммарную систематическую погрешность, вносимую серийным прибором в результат измерения. Однако такой способ выявления систематической погрешности является слишком дорогим. Поэтому на практике различные составляющие систематической погрешности пытаются устранить с помощью экспериментальных или математических приемов путем введения поправок в результаты наблюдений при условии, что погрешность данного вида по величине и знаку известна. После внесения поправок влияние систематической погрешности данного вида на результат и погрешность измерения устраняется полностью. Если же систематическая погрешность неизвестна, но имеет известные границы изменения, то её учитывают в результате измерения.

В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на *элементарные* и *изменяющиеся по сложному закону*.

Элементарные погрешности можно условно разделить на *постоянные, прогрессирующие (прогрессивные)* и *периодические*. Прогрессирующими называют монотонно возрастающие или монотонно убывающие погрешности. Периодические погрешности – погрешности, изменение которых можно описать периодической функцией. Погрешности, изменяющиеся по сложному закону, образуются при объединении нескольких систематических погрешностей.

Систематическая погрешность может иметь не только элементарный, но и более сложный характер, который можно аппроксимировать функцией, включающей приведенные простые составляющие.

Сложная систематическая погрешность, включающая постоянную, прогрессирующую и периодическую составляющую, в общем виде может быть описана выражением

$$\Delta_S = a + b\psi + d\sin\varphi, \qquad (3.3)$$

где a – постоянная составляющая сложной систематической погрешности; ψ, φ – соответственно аргументы прогрессирующей и периодической составляющих сложной систематической погрешности.

3.3 Случайная погрешность

Случайная погрешность δ – это составляющая погрешности измерения, проявляющаяся в виде непредсказуемых отклонений от истинного значения физической величины, меняющихся от одного наблюдения к другому. Данная погрешность обусловлена влиянием на результаты измерения множества факторов, воздействие которых на каждое отдельное измерение невозможно учесть или заранее предсказать. *Такими причинами могут быть перепады напряжения в сети, вибрация установки, изменения атмосферного давления, температуры, электрических, магнитных и радиационных полей, а также ошибки, связанные с действиями самого экспериментатора (неправильное считывание показаний приборов, различная скорость реакции и т. п.).* Случайную погрешность нельзя исключить из результатов измерений, однако, пользуясь статистическими методами, можно учесть её влияние на оценку истинного значения измеряемой величины.

В процессе измерения оба вида погрешностей проявляются одновременно, и погрешность измерения можно представить в виде суммы:

$$\Delta_{изм} = \delta + \theta, \qquad (3.4)$$

где δ - случайная погрешность, а θ - систематическая погрешности.

Полная погрешность измерения, являющаяся суммой указанных составляющих, может быть представлена в абсолютном, относительном или нормированном виде.

Абсолютная погрешность – это погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины. Наряду с абсолютной погрешностью часто используется термин абсолютное значение погрешности, под которым понимают значение погрешности без учета ее знака. Эти два понятия различны.

Абсолютная погрешность определяется как разность

$$\Delta = x - x_и \qquad \text{или} \qquad \Delta = x - x_д. \qquad (3.5)$$

Относительная погрешность – это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к результату измерения:

$$\varepsilon = \pm\frac{\Delta}{x}100\% \quad \text{или} \quad \varepsilon = \pm\frac{\Delta}{x_д}100\% \ . \tag{3.6}$$

Приведенная погрешность – это погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерения (приборной погрешности) к некоторой постоянной величине, называемой *нормирующим значением* и имеющей размерность измеряемой величины.

$$\gamma = \pm\,(\Delta/x_N\,)100\%, \tag{3.7}$$

где x_N – нормированное значение величины. В качестве нормирующего множителя может выступать, например, максимальное значение шкалы прибора (верхний предел показаний прибора). Понятие приведенной погрешности относится только к средствам измерений.

3.4 Грубые погрешности и промахи

Погрешности, которые нельзя отнести ни к случайным, ни к систематическим из-за совершенно иного механизма образования и принципиально отличного значения, называют грубыми погрешностями измерений или промахами.

Грубая погрешность – погрешность измерения, значительно превышающая погрешности большинства результатов наблюдений. Такие погрешности могут возникать вследствие резкого изменения внешних условий эксперимента: внезапного изменения температуры, напряжения в сети и т. п. Грубые погрешности обнаруживают статистическими методами и соответствующие результаты измерений, как не отражающие закономерностей поведения измеряемой величины, исключают из рассмотрения.

Промах – это вид грубой погрешности, зависящий от наблюдателя и связанный с неправильным обращением со средствами измерений: неверными отсчетами показаний приборов, описками при записи результатов, невнимательностью экспериментатора, путаницей номеров образцов и т. п. Промахи обнаруживают нестатистическими методами и результаты наблюдений, содержащие промахи, как заведомо неправильные, исключают из рассмотрения. *Указанные составляющие, как правило, не зависят друг от друга, что допускает их раздельное рассмотрение.*

Очевидно, что причинами возникновения грубой погрешности могут быть промах оператора при снятии отсчета или его записи, ошибка в реализации методики измерений, сбой в измерительной цепи прибора или незамеченное импульсное изменение влияющей физической величины. Причины появления результатов с грубыми погрешностями резко выпадают из ряда механизмов, формирующих систематические или случайные составляющие погрешности измерений.

«Результат измерения с грубой погрешностью» фактически вызван ошибкой, допущенной при измерении. Такие погрешности в принципе непредсказуемы, а их значения невозможно прогнозировать с учетом вероятности как это делают для случайных погрешностей. Фактически к результатам с грубыми погрешностями относят либо такие, которые явно не соответствуют ожидаемому результату измерений (нелепые результаты), либо экстремальные значения, отличия которых от средних значений массива выражены не столь откровенно, но принадлежность которых к данному массиву результатов имеет весьма малую вероятность.

По значимости все погрешности (составляющие и интегральные) можно делить на значимые и пренебрежимо малые. К пренебрежимо малым составляющим погрешностям относят погрешности, которые значительно меньше доминирующих составляющих. Формальное соотношение между пренебрежимо малой $\Delta_{\min}$ и доминирующей $\Delta_{\max}$ составляющими можно записать в виде

$$\Delta_{\min} << \Delta_{\max} . \tag{3.8}$$

Пожалуй, любую отдельную случайную или систематическую составляющую гарантированно можно отнести к пренебрежимо малым погрешностям, если она на порядок меньше доминирующей составляющей одной и той же интегральной погрешности. Пренебрежимо малые погрешности при объединении всех составляющих Δ_i в оценку интегральной погрешности Δ практически не оказывают влияния на окончательный результат, что формально можно записать как

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \ldots \cdot \Delta_i \cdot \ldots \cdot \Delta_n \approx \Delta_2 \cdot \ldots \cdot \Delta_i \cdot \ldots \cdot \Delta_n , \tag{3.9}$$

где $\Delta_1 = \Delta_{\min} << \Delta_{\max}$.

Пренебрежимо малой интегральной погрешностью измерения можно считать такую, которая не является препятствием для замены истинного значения физической величины полученным результатом. В соответствии со стандартом за действительное значение физической величины принимают такое значение, которое получено экспериментально (в результате измерений) и настолько близко к истинному, что для данной задачи измерений может заменить истинное ввиду несущественности различия между ними

$$X_{ä} \approx \tilde{O}_{è}\,, \tag{3.10}$$

где $X_{ä}$ – действительное значение физической величины; $X_и$ – истинное значение физической величины.

Если различие между истинным значением физической величины $X_и$ и результатом ее измерения $X_д$ мы считаем пренебрежимо малым, можно записать

$$\Delta_{ä} \approx 0\,, \tag{3.11}$$

где $\Delta_{ä}$ – погрешность измерения действительного значения физической величины.

Для одной и той же физической величины могут рассматриваться разные действительные значения. Близость их к истинному значению зависит от задачи, которая поставлена при измерении. Очевидно, что для установления годности объекта по заданному параметру точность измерения физической величины может быть значительно ниже, чем при исследовании точности технологического процесса обработки того же объекта или при сортировке однородных объектов на группы для последующей селективной сборки. Установление действительного значения измеряемой физической величины должно предваряться выбором допустимой погрешности измерений, которая и будет представлять собой предел пренебрежимо малого значения погрешности результата измерений.

3.5 Статические и динамические погрешности

В зависимости от режима измерения погрешности принято делить на статические и динамические. Статическая погрешность измерений (статическая погрешность) – погрешность результата измерений, свойственная условиям статического измерения. Динамическая погрешность измерений (динамическая погрешность) – погрешность результата измерений, свойственная условиям динамического измерения. При этом под статическим понимают измерение не изменяющейся по размеру, а под динамическим – изменяющейся физической величины.

Динамической погрешностью средства измерений называется составляющая погрешности, дополнительная к статической, и возникающая при измерении в динамическом режиме. В соответствии с определением

$$\Delta_{дин} = \Delta_{д.р} - \Delta_{ст.р}, \qquad (3.12)$$

где $\Delta_{дин}$ – динамическая погрешность средства измерения; $\Delta_{д.р}$ – погрешность средства измерения при использовании его в динамическом режиме; $\Delta_{ст.р}$ – статическая погрешность средства измерения (погрешность при использовании средства измерений в статическом режиме).

Логически обоснованной представляется следующая укрупненная классификация погрешностей измерений по степени полноты информации об их характере и значениях:

– определенные погрешности,
– неопределенные погрешности.

К определенным можно отнести любые известные по числовому значению и знаку погрешности. Известными могут стать, например те составляющие погрешности измерений, которые имеют достаточно жесткую функциональную связь с вызывающими их аргументами. Такие погрешности по сути совпадают с систематическими и принципиально могут быть выявлены и исключены из результатов измерений, их значения можно прогнозировать. Определенной можно считать также любую (в том числе и уже зафиксированную случайную или даже грубую) погрешность, числовое значение и знак которой получены экспериментальными методами. Определенные погрешности в при достаточной полноте информации могут быть исключены из результатов измерений.

К неопределенным погрешностям следует отнести невыявленные систематические, а также погрешности случайные (собственно случайные) и грубые погрешности, значения которых не были определены экспериментально. При исключении определенных погрешностей абсолютная точность невозможна, поэтому приходится относить к неопределенным неисключенные остатки погрешностей.

Неисключенная систематическая погрешность – составляющая погрешности результата измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок на влияние систематических погрешностей или систематической погрешностью, поправка на действие которой не введена вследствие ее малости .

Систематическими составляющими, значения которых существенно меньше случайных погрешностей ($\theta < 0{,}8\delta$), пренебрегают. Такие погрешности относят к пренебрежимо малым неисключенным систематическим составляющим погрешности измерения.

Лекция 4 Случайные величины и их описание

4.1 Случайное событие
4.2 Случайная величина, закон распределения
4.3 Генеральная совокупность и выборка
4.4 Распределение результатов измерений, гистограмма

4.1 Случайное событие

Пусть при выполнении определенных условий происходит некоторое событие, которое будем называть «событием *А*». Каждый случай выполнения этих условий принято называть опытом или испытанием. Возможны три ситуации:

1. Событие *А* происходит всякий раз при осуществлении опыта или испытания. Такое событие называется *достоверным*.

2. Событие не происходит никогда (ни в одном испытании). Такое событие называется *невозможным.*

3. В каждом данном испытании событие *А* может произойти, но может и не произойти, причем точно указать, в каком испытании оно произойдет, а в каком – нет, заранее невозможно. Такое событие называют **случайным**, исход испытания также является случайным.

Предсказание исхода того или иного испытания (произойдёт или не произойдет событие *А* в данном испытании) основывается на накопленном опыте. Для ситуаций 1 и 2 можно дать точное предсказание исхода будущего испытания. В ситуации 3 предсказание можно сделать лишь грубо ("в среднем"), указав, что событие может произойти лишь в такой-то доле от общего числа испытаний.

Несмотря на случайность исходов отдельных испытаний, при многократном их повторении мы можем наблюдать вполне определенные средние результаты. Тенденция стремления результатов испытаний к некоторому общему среднему результату при увеличении числа испытаний получила название **статистической устойчивости**, существование которой основывается на предшествующем опыте или интуиции. *Классическим примером являются опыты с подбрасыванием монеты. Выпадение герба при падении монеты в разных сериях испытаний происходит в числе испытаний, близком к половине общего их числа в серии.* При увеличении числа испытаний в серии число выпадений герба всё больше приближается к половине общего числа испытаний в серии, т. е. к некоторому неслучайному показателю.

Пусть в N испытаниях событие A произошло $n(A)$ раз. Отношение $n(A)/N$ называется относительной частотой или просто **частотой появле-**

ния события А. Если провести несколько серий опытов по N испытаний в каждой, то отношение $n(A)/N$ будет различным для разных серий, но при увеличении N это отношение будет стремиться к некоторому постоянному числу, называемому вероятностью появления события A:

$$n(A)/N \to P(A) \text{ при } N \to \infty . \tag{4.1}$$

Вероятность является объективной характеристикой и математическим выражением возможности появления случайного события A в каждом отдельном испытании. Нетрудно видеть, что вероятность принимает значения, лежащие в интервале от нуля до единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$, причем для достоверного события $P(A) = 1$ ($n(A) = N$), для невозможного события $P(A) = 0$ ($n(A) = 0$).

Физическое содержание события A может быть различным. Таким событием может быть выпадение герба при бросании монеты, рождение мальчика или девочки, превышение температурой воздуха заданного уровня в течение выбранных суток и др.

Если появление одного из событий делает невозможным появление других в данном испытании, то такие события называются *несовместимыми*. Если в каждом испытании должно обязательно произойти одно из событий некоторой группы, то эти события образуют *полную группу*. Если события к тому же несовместимы, то они образуют *полную группу несовместимых событий*.

Пусть события A_1, ..., A_N образуют полную группу и несовместимы. Тогда появление любого из этих событий в данном испытании есть достоверное событие, вероятность которого равна единице, то есть

$$P(A_1 \text{ или } A_2, \dots \text{ или } A_N) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) = 1 . \tag{4.2}$$

Если же вероятности этих событий равны между собой, то

$$\sum_{k=1}^{N} P(A_k) = NP(A_k) = 1, \text{ откуда } P(A_k) = 1/N . \tag{4.3}$$

Классическим примером рассмотренной ситуации является выпадение некоторого числа очков при бросании игральной кости, представляющей собой кубик с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, нанесенными на гранях. Выпадение каждой грани является случайным событием. Если кубик считать идеальным, то вероятности выпадения всех граней одинаковы. Выпадение одной из них исключает выпадение других, и события, состоящие в выпадении 1...6 очков, образуют полную группу несовместимых событий. Вероятность выпасть любому из указанных чисел равна 1/6. Вероятность получить число очков не менее 3 при одном бросании равна вероятности выпадения чисел 3, 4, 5, 6, т. е. (1/6)4 = 2/3.

4.2 Случайная величина, закон распределения

Пусть некоторая величина X в ряде испытаний может принимать различные числовые значения. Если значение величины X в каждом данном испытании не может быть указано заранее (непредсказуемо), то величина X называется **случайной величиной**. Другими словами *случайной* называют величину, которая в результате опыта (наблюдения, измерения) принимает одно возможное, но заранее неизвестное значение. Случайная величина может быть **дискретной** или **непрерывной**.

Если случайная величина может принимать бесконечное множество значений, причем эти значения могут быть сколь угодно близки друг к другу, то такая величина называется ***непрерывной случайной величиной.*** Если же случайная величина может принимать лишь дискретные значения, то она называется ***дискретной случайной величиной***.

Примеры непрерывной случайной величины*: сопротивление резистора (экземпляра) из партии со значением $R = 1$ кОм $\pm$ 10%; коэффициент усиления β транзистора (экземпляра), для которого по техническим условиям $\beta \geq 20$.*

Примеры дискретных случайных величин: *число отказов электронного устройства (ЭУ) за рассматриваемый календарный период времени, например два года (возможные значения 0, 1, 2, 3, 4, ...); частота попадания сопротивления резистора, взятого из партии с сопротивлением $R = 1$ кОм $\pm$ 10%, в диапазон (950…1000 Ом) при десяти наблюдениях (возможные значения 0, 1/10, 2/10, 3/10, ..., 9/10, 1)*.

Охарактеризовать случайную величину можно при помощи *закона распределения*.

Под **законом распределения случайной величины** понимается соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями принятия этих значений. Это соответствие может быть задано в виде таблицы, графика или математической формулы.

Ряд распределения. Под рядом распределения *понимают таблицу вида*, показанного на рисунке 4.1. Здесь случайная величина n – число отказов ЭУ за два года эксплуатации; $p(n)$ – вероятность значения n.

n	0	1	2	3	4	…
$p(n)$	0,1	0,25	0,3	0,15	0,1	…

Рисунок 4.1 – Ряд распределения

Многоугольник распределения. Под многоугольником распределения понимают фигуру, изображённую на рисунке 4.2 (для случайной величины n, рассмотренной в предыдущем вопросе).

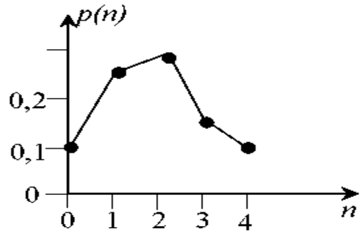

Рисунок 4.2 – Многоугольник распределения

Функция распределения. Наиболее универсальный способ описания случайных величин заключается в отыскании их интегральных или дифференциальных функций распределения.

Под **интегральной функцией распределения** результатов наблюдений понимается зависимость вероятности того, что результат наблюдения X в i-м опыте окажется меньшим некоторого текущего значения x_i, от самой величины x. Другими словами под функцией распределения случайной величины X для текущего значения x понимают вероятность не события $X = x$, а вероятность события $X < x$. Обозначают это как

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.4}$$

На рисунке 4.3 показаны примеры функций распределения вероятности.

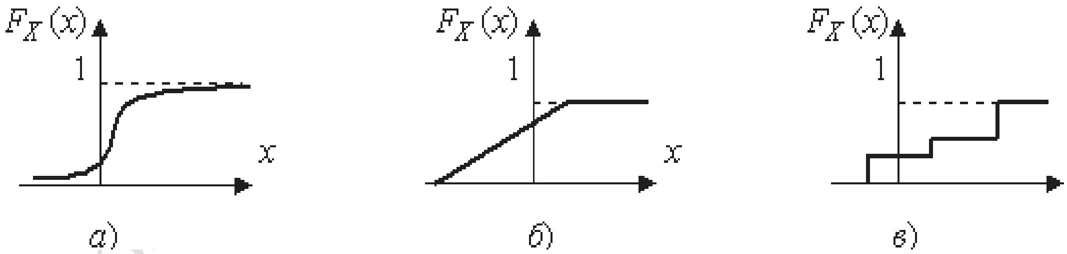

Рисунок 4.3 – Интегральные функции распределения

Свойства функции $F(x)$:

1 $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

2 $F(x = -\infty) = 0$.

3 $F(x = +\infty) = 1$

Более наглядным является описание свойств результатов наблюдений и случайных погрешностей с помощью дифференциальной функции распределения, иначе называемой *плотностью распределения вероятностей,* свойства которой будут рассмотрены ниже

4.3 Генеральная совокупность и выборка

В основе любых измерений лежат прямые измерения, в ходе которых находят некоторое числовое значение физической величины.

Каждая отдельная измерительная операция (отсчет, замер) называется ***наблюдением,*** а получаемое при этом значение физической величины – ***результатом наблюдения***. В связи с тем, что результат отдельного наблюдения включает в себя неизвестные погрешности, для решения поставленной выше задачи нахождения оценки значения физической величины в процессе измерения проводят *серию наблюдений*. Получаемые в серии результаты наблюдений подвержены как систематическим, так и случайным отклонениям от истинного значения физической величины. Такие заранее непредсказуемые в каждом данном наблюдении результаты представляют собой случайную величину. Многократное повторное проведение опыта позволяет установить статистические закономерности, которым удовлетворяет данная случайная величина, и найти результат измерения.

При каждом наблюдении мы получаем некоторое возможное значение физической величины.

Всё множество значений, которые измеряемая величина может принимать в эксперименте, называется **генеральной совокупностью.** Это множество может быть как конечным, так и бесконечным. Большинство физических величин имеют непрерывный набор возможных значений, множество которых является бесконечным. Говорят, что такие величины имеют генеральную совокупность бесконечного объёма.

Генеральная совокупность несет полную информацию об измеряемой величине и позволяет (в отсутствие систематических погрешностей), несмотря на случайный характер результатов отдельных наблюдений, найти истинное значение x_0 физической величины. В случае физической величины с непрерывным набором значений для нахождения истинного значения необходимо провести бесконечное число наблюдений, что невозможно. Поэтому на практике ограничиваются конечным числом наблюдений (от единиц до нескольких десятков). Полученный при этом ряд значений физической величины: x_1, x_2, ..., x_N называют ***выборкой из генеральной совокупности*** или просто ***выборкой***. Число N результатов наблюдений в выборке называют *объёмом выборки.*

Результаты наблюдений, входящие в выборку, можно упорядочить, т. е. расположить их в порядке возрастания или убывания: $x_1 \le x_2 \le ... \le x_N$. Полученную выборку называют упорядоченной или ***ранжированной***. Величина $R = x_{max} - x_{min}$ называется ***размахом выборки***.

4.4 Распределение результатов измерений, гистограмма

Чтобы получить представление о законе распределения измеряемой величины, экспериментальные данные группируют. Для этого весь интервал значений величины от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (рисунок 4.4) разбивают на несколько равных отрезков, называемых интервалами группировки данных, шириной Δ и центрами x_k, так что k-й интервал ($k = 1, 2, \ldots, K$) имеет границы ($x_k - \Delta / 2$, $x_k + \Delta / 2$).

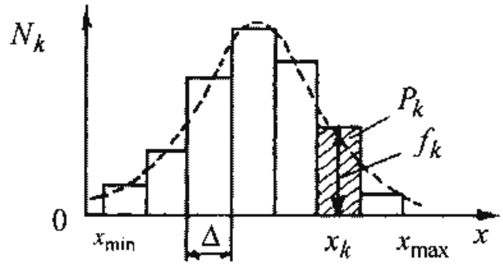

Рисунок 4.4 – Гистограмма

Далее распределяют значения x_i по интервалам. Число точек N_k, оказавшихся внутри k-го интервала, даёт число попаданий измеряемой величины в этот интервал. Общее число точек, оказавшихся внутри всех интервалов разбиения, должно быть равно полному числу N результатов наблюдений в исходной выборке.

Над каждым интервалом Δ_k строится прямоугольник высотой

$$f_k = N_k / (N \Delta). \tag{4.5}$$

Совокупность прямоугольников называется **гистограммой** (рис. 4.4).

При построении гистограмм интервалы разбиения не следует брать очень большими или очень маленькими. Так, в первом случае прямоугольники на гистограмме будут иметь примерно одинаковую высоту, а во втором – могут появиться интервалы, в которые не попадет ни одного значения случайной величины. Чтобы этого не происходило, придерживаются следующих правил:

– число интервалов группировки данных K рассчитывают по формуле

$$K = 1 + 3.2 \lg N, \tag{4.6}$$

где N – объем выборки.

– если число K получается дробным, то его округляют до ближайшего меньшего целого. Ширину интервалов берут равной

$$\Delta = (x_{\max} - x_{\min})/K. \tag{4.7}$$

Высоты и площади прямоугольников на гистограмме имеют следующий смысл. Поскольку относительные частоты $P_k = N_k / N$ приближенно равны вероятности попадания результата каждого отдельного наблюдения в данный интервал, то высота каждого прямоугольника на гистограмме

$$f_k = N_k / N\Delta = P_k / \Delta \tag{4.8}$$

есть вероятность, приходящаяся на единицу длины интервала разбиения или ***плотность вероятности*** попадания случайной величины в интервал Δ_k с центром в точке x_k.

Площадь каждого прямоугольника $f_k\,\Delta = N_k / N = P_k$ есть вероятность попадания результата в интервал Δ_k. Сумма площадей прямоугольников, основания которых находятся внутри некоторого интервала $[x_1, x_2]$, равна вероятности для каждого отдельного наугад взятого результата попасть в этот интервал.

Нетрудно убедиться, что сумма площадей всех прямоугольников равна единице:

$$\sum_{k=1}^{K} P_k = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k} N_k = \frac{N}{N} = 1. \tag{4.9}$$

Это означает, что попадание произвольного результата наблюдения в какой-либо из интервалов разбиения в промежутке ($x_{\max}$, $x_{\min}$) есть достоверное событие.

Из рисунка 4.4 видно, что результаты наблюдений распределены около некоторого значения, абсцисса которого соответствует центру самого высокого прямоугольника на гистограмме. По обе стороны данного прямоугольника расположены прямоугольники убывающих высот и площадей. Учитывая, что высоты прямоугольников f_k имеют смысл плотности вероятности попадания измеряемой величины в интервал Δ_k, можно сказать, что гистограмма дает представление о законе распределения измеряемой величины.

Зная координаты центров интервалов разбиения x_k и количества попаданий N_k значений измеряемой величины в интервалы, можно найти среднее значение измеряемой величины $\bar{x}$ и величину S_x^2, характеризующую разброс результатов наблюдений около среднего значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum N_k x_k = \sum P_k x_k, \tag{4.10}$$

$$S_x^2 = \frac{\sum N_k (x_k - \bar{x})^2}{N-1} \approx \sum P_k (x_k - \bar{x})^2, \tag{4.11}$$

где при большом объеме выборки $N - 1 \approx N$. Величину S_x^2 называют *эмпирической дисперсией*, а $S_x = \sqrt{S_x^2}$ – *среднеквадратическим отклонением* результатов наблюдений от среднего (СКО x). Параметр S_x характеризует ширину распределения значений случайной величины около среднего значения.

Если число наблюдений взять очень большим ($N \to \infty$), т. е. от выборки перейти к генеральной совокупности, а ширины интервалов разбиения очень маленькими, то ломаная огибающая гистограммы перейдет в плавную кривую, называемую ***функцией плотности распределения вероятности измеряемой** величины*, которую будем обозначать $f(x)$. В этом случае суммы (4.9) заменятся интегралами, а вероятности P_k – вероятностями $dP(x)$ попадания случайной величины в интервал ($x, x + dx$). Если случайная величина распределена в интервале (a, b) (заметим, что границы интервала могут быть и бесконечными: $a = -\infty,\ b = \infty$), то выражения (4.9)–(4.11) будут иметь вид

$$\int_a^b dP(x) = \int_a^b f(x)dx = 1, \tag{4.12}$$

$$\bar{x} = \int_a^b x dP(x) = \int_a^b x f(x)dx, \tag{4.13}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \bar{x})^2 dP(x) = \int_a^b (x - \bar{x})^2 f(x)dx, \tag{4.14}$$

где $f(x) = dP(x)/dx$ есть плотность вероятности распределения случайной величины или просто плотность вероятности; $\bar{x}$, σ^2 – генеральные среднее и дисперсия, величина $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ называется *стандартным отклонением*.

Равенство (4.12) называют *условием нормировки* функции плотности вероятности. Это условие требует, чтобы площадь под графиком функции вероятности всегда была равна единице.

Задачей эксперимента является нахождение истинного значения x_0 физической величины, которое может быть найдено, если имеется генеральная совокупность всех значений искомой величины X. Однако, в связи с тем, что количество наблюдений в выборке конечно, в опыте находят некоторое приближенное к x_0 значение $\bar{x}$, называемое *оценкой истинного значения*, и указывают интервал, в который истинное значение x_0 попадает с заданной вероятностью P. Этот интервал называют *доверительным интервалом*, а вероятность P – *доверительной вероятностью*.

В качестве оценки истинного значения согласно (4.10) выбирают среднее арифметическое результатов наблюдений в выборке

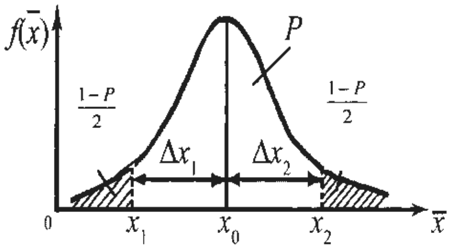

Рисунок 4.5 – Нахождение доверительного интервала

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}, \tag{4.15}$$

которое называют *выборочным средним*. Среднее $\bar{x}$ также является случайной величиной, и если повторить опыт по его нахождению несколько раз, то получим выборку средних X: $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ..., $\bar{x}_k$, которые также будут отличаться друг от друга случайным образом, однако разброс средних значений будет заметно меньше разброса результатов отдельных наблюдений в каждой выборке.

Для нахождения доверительного интервала необходимо знать распределение средних значений $f(\bar{x})$ около x_0. Зная вид $f(\bar{x})$, можно построить интервал, в который истинное значение x_0 попадает с вероятностью P. Для этого на оси абсцисс (рисунок 4.5) находят точки x_1 и x_2 такие, чтобы площади под графиком $f(\bar{x})$ слева от x_1 и справа от x_2 равнялись бы одной и той же величине $1 - P\,/2$. Тогда площадь под графиком $f(\bar{x})$ в интервале (x_1, x_2) будет равна значению вероятности P, и для произвольного полученного в опыте среднего значения можно написать: $x_1 < \bar{x} < x_2$ с вероятностью P:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0 - \Delta x_1}^{x_0 + \Delta x_2} f(x)dx. \tag{4.16}$$

Границы интервала можно также записать в виде $x_1 = x_0 - \Delta x_1$, $x_2 = x_0 + \Delta x_2$. Если распределение $f(\bar{x})$ симметрично, то $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$. Величину Δx в этом случае называют *случайной доверительной погрешностью* результата измерения.

Лекция 5 Характеристики случайной величины, законы распределения

5.1 Понятие центра распределения
5.2 Моменты распределений случайной величины
5.3 Основные законы распределения

Закон распределения непрерывной случайной величины - собирательный термин, используемый для обозначения способов математического описания непрерывной случайной величины. Закон распределения может быть задан функцией распределения *F(x)* как универсальной характеристикой описания любых случайных величин и (или) плотностью распределения *w(x)*, которая существует только для непрерывных случайных величин. Функции *F(x)* и *w(x)* несут о непрерывной случайной величине одну и ту же информацию, но в разной форме. Для их определения необходимо проведение весьма длительных и кропотливых исследований и вычислений.

В большинстве случаев бывает достаточно охарактеризовать случайные величины с помощью ограниченного числа специальных параметров, основными из которых являются: *центр распределения*; *начальные и центральные моменты* и производные от них коэффициенты – *математическое ожидание (МО), среднее квадратическое отклонение (СКО), эксцесс, контрэксцесс* и *коэффициент асимметрии.*

5.1 Понятие центра распределения

Координата центра распределения показывает положение случайной величины на числовой оси и может быть найдена несколькими способами. Наиболее фундаментальным является центр симметрии, т.е. нахождение такой точки $X_м$ на оси x, слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины одинаковы и равны 0,5:

$$F(X_м) = \int_{-\infty}^{X_м} p(x)\,dx = \int_{X_м}^{+\infty} p(x)\,dx = 0{,}5. \qquad (5.1)$$

Точку $X_м$ называют *медианой* или 50%-ным квантилем. Для ее нахождения у распределения случайной величины должен существовать только нулевой начальный момент.

Можно определить центр распределения как центр тяжести распределения, т.е. такой точки $\overline{X}$, относительно которой опрокидывающий момент геометрической фигуры, огибающей которой является кривая p(x), равен нулю:

$$\overline{X} = m_x = a_1\left[X\right] = M\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx. \qquad (5.2)$$

Эта точка называется **математическим ожиданием**. При симметричной кривой *p(x)* в качестве центра может использоваться абсцисса **моды,** т.е. максимума распределения $X_м$. Однако существуют распределения, у которых нет моды, например равномерное. Распределения с одним максимумом называются *одномодальными,* с двумя – *двухмодалъными* и т.д. Те из них, у которых в средней части расположен не максимум, а минимум, называются *антимодальными.*

Для *двухмодалъных* распределений применяется оценка центра в виде *центра сгибов:*

$$X_c = \frac{(x_{c1} + x_{c2})}{2}, \qquad (5.3)$$

где x_{c1}, x_{c2} – сгибы, т.е. абсциссы точек, в которых распределение достигает своих максимумов.

Для ограниченных распределений (равномерного, трапецеидального и др.) применяется оценка в виде *центра размаха:*

$$X_p = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \qquad (5.4)$$

где x_1, x_2 – первый и последний члены вариационного ряда, соответствующего распределению.

Разные оценки центра имеют различную эффективность. При статистической обработке экспериментальных данных важно использовать наиболее эффективную из них, т.е. оценку, имеющую минимальную дисперсию. Это связано с тем, что погрешность в определении $X_ц$ влечет за собой неправильную оценку СКО, границ доверительного интервала, эксцесса, контрэксцесса, вида распределения и др., т.е. всех последующих оценок, кроме энтропийных.

5.2 Моменты распределений случайной величины

Все моменты представляют собой некоторые средние значения, причем если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, то моменты называют ***начальными,*** а если от центра распределения, то ***центральными.*** Начальные и центральные моменты *r*-го порядка определяются соответственно по формулам

$$\alpha_r\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x) dx; \quad \mu_r\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^r p(x) dx. \qquad (5.5)$$

Нулевой начальный момент равен единице. Он используется для задания условия нормирования плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 p(x)\,dx = 1. \tag{5.6}$$

Также с помощью начального момента нулевого порядка вводится понятие медианы распределения. **Первый** начальный момент – математическое ожидание m_x случайной величины:

$$m_x = a_1[x] = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,dx\ . \tag{5.7}$$

Для результатов измерений оно представляет собой оценку истинного значения измеряемой величины. Начальные и центральные моменты случайной погрешности совпадают между собой и с центральными моментами результатов измерений: $a_г[\Delta] = \mu_r[\Delta] = \mu_r[x]$, поскольку m_x случайной погрешности равно нулю. Следует также отметить, что первый центральный момент тождественно равен нулю. Важное значение имеет **второй** центральный момент

$$D[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x)\,dx, \tag{5.8}$$

называемый ***дисперсией*** и являющийся характеристикой рассеивания случайной величины относительно математического ожидания. Значительно чаще в качестве меры рассеивания используется ***среднее квадратическое отклонение***

$$\sigma = \sqrt{D[x]} \tag{5.9}$$

имеющее такую же размерность, как и математическое ожидание. Для примера на рисунке 5.1 показан вид нормального распределения при различных значениях СКО.

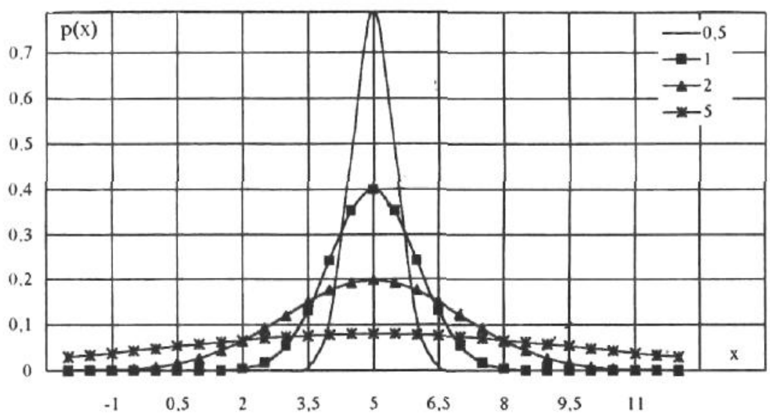

Рисунок 5.1 – Вид нормального распределения при $X_ц = 5$ и $СКО = 0{,}5;\ 1;\ 2$ и 5

Математическое ожидание и дисперсия являются наиболее часто применяемыми моментами, поскольку они определяют важные черты распределения: положение центра и степень разбросанности результатов относительно него. *Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.*

Третий центральный момент служит характеристикой асимметрии, или скошенности распределения.

$$\mu_3[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^3 p(x)\,dx. \tag{5.10}$$

С его использованием вводится ***коэффициент асимметрии***

$$\nu = \frac{\mu_3[x]}{\sigma^3}. \tag{5.11}$$

Для нормального распределения коэффициент асимметрии равен нулю. Вид законов распределения при различных значениях коэффициента асимметрии приведен на рисунке 5.2,а.

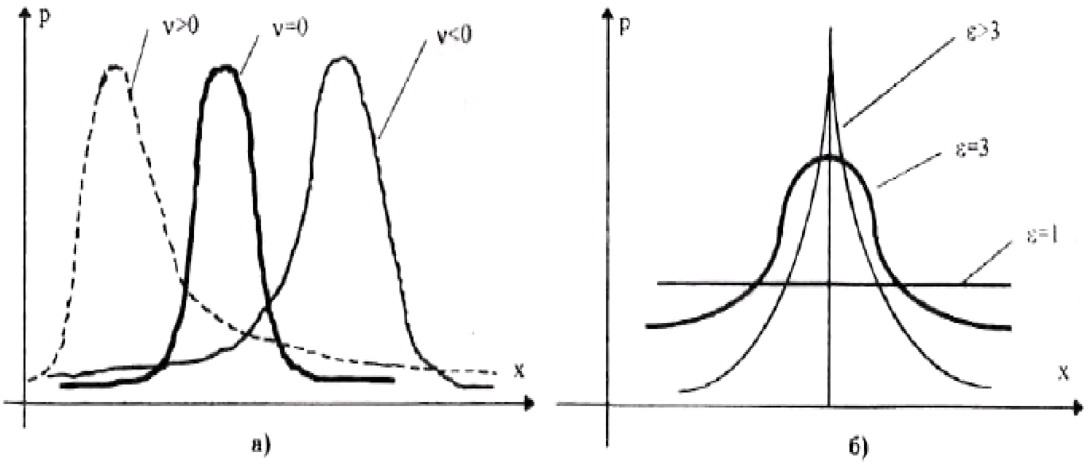

Рисунок 5.2 – Вид дифференциальной функции распределения при различных значениях коэффициента асимметрии (а) и эксцесса (б)

Четвертый центральный момент служит для характеристики плоско– или островершинности распределения.

$$\mu_4[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^4 p(x)\,dx. \tag{5.12}$$

Эти свойства описываются с помощью ***эксцесса***

$$\varepsilon' = \frac{\mu_4[x]}{\sigma^4 - 3}. \tag{5.13}$$

Значения коэффициента ε' лежат в диапазоне от *–2* до ∞. Для нормального распределения он равен 0. Чаще эксцесс задается формулой:

$$\varepsilon = \frac{\mu_4(x)}{\sigma^4}. \qquad (5.14)$$

Его значения лежат в диапазоне от *1* до ∞. Для нормального распределения он равен трем. Вид дифференциальной функции распределения при различных значениях эксцесса показан на рисунке 5.2,*б*.

Для удобства часто используют ***контрэксцесс***

$$k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \qquad (5.15)$$

Значения контрэксцесса лежат в пределах от *0* до *1*. Для нормального закона он равен *0,577*.

5.3 Основные законы распределения

Использование на практике вероятностного подхода к оценке погрешностей результатов измерений, прежде всего, предполагает знание аналитической модели закона распределения рассматриваемой погрешности. Встречающиеся в метрологии распределения достаточно разнообразны. Известно, что примерно 50% распределений принадлежат к классу экспоненциальных, 30% являются уплощенными, а остальные 20% – различными видами двухмодальных распределений.

Множество законов распределения случайных величин, используемых в метрологии, целесообразно классифицировать следующим образом:

– трапецеидальные (плосковершинные) распределения;
– уплощенные (приблизительно плосковершинные) распределения;
– экспоненциальные распределения;
– семейство распределений Стьюдента;
– двухмодальные распределения.

5.3.1 Трапецеидальные распределения

К трапецеидальным распределениям относятся: *равномерное, собственно трапецеидальное* и *треугольное (Симпсона)*. Равномерное распределение (рисунок 5.3,*а*) описывается уравнением

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < X_ц - a, \quad x > X_ц + a \\ \frac{1}{2}, & X_ц - a \le x \le X_ц + a \end{cases}. \qquad (5.16)$$

Трапецеидальное распределение (рисунок 5.3,б) образуется как композиция двух равномерных распределений шириной a_1 и a_2:

$$P(x)=\begin{cases} 0, & x < X_ц - a, x > X_ц + a \\ \dfrac{x - X_ц + a}{a^2 - u^2}, & X_ц - a \le x \le X_ц - b \\ \dfrac{1}{a+b} & X_ц + b \le x \le X_ц + b \\ \dfrac{X_ц + a - x}{a^2 - b^2}, & X_ц + b \le x \le X_ц + a \end{cases} \quad (5.17)$$

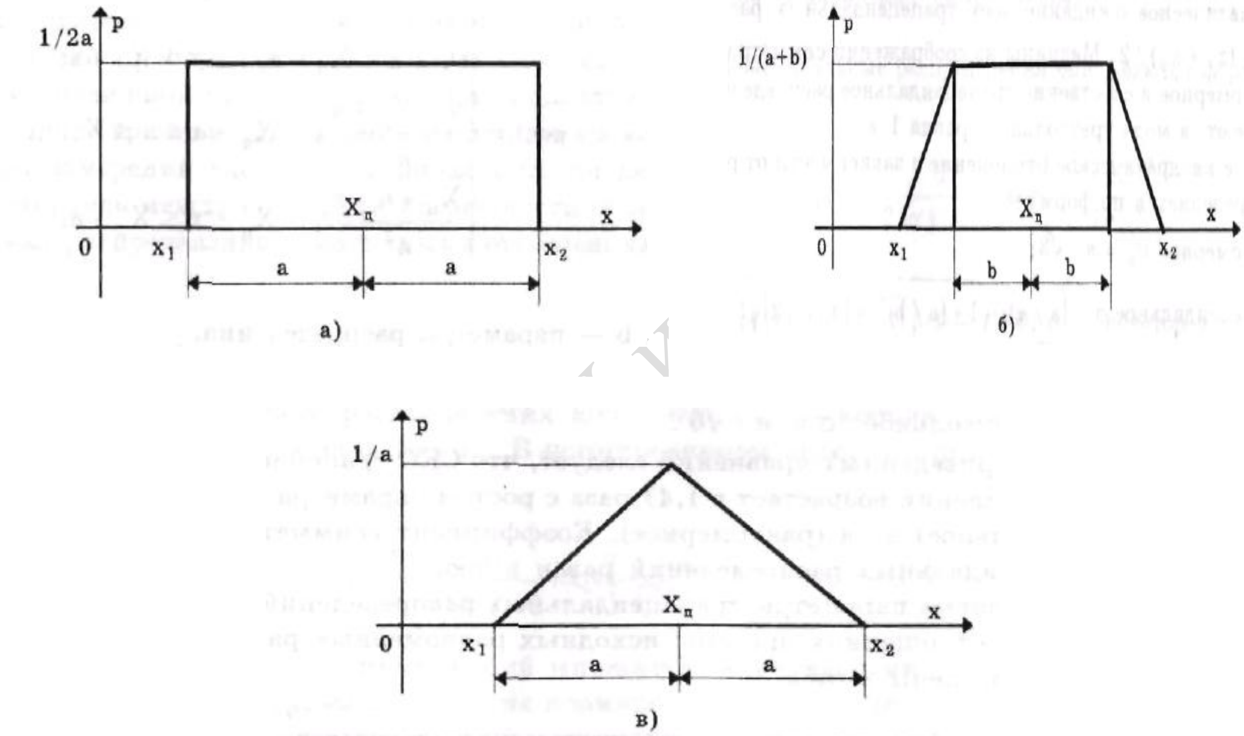

Рисунок 5.3 – Виды распределений: а – равномерное; б – трапецеидальное; в – треугольное (Симпсона)

Треугольное (Симпсона) распределение (рисунок 5.3,в) – это частный случай трапецеидального, для которого размеры исходных равномерных распределений одинаковы: $a_1 = a_2$:

$$P(x)=\begin{cases} 0, & x < X_ц - a, x > X_ц + a \\ \dfrac{x - X_ц + a}{a^2}, & X_ц - a \le x \le X_ц \\ \dfrac{X_ц + a - x}{a^2}, & X_ц + x \le x \le X_ц + a \end{cases} \quad (5.18)$$

где $X_ц$, a, b – параметры распределения.

Математическое ожидание всех трапецеидальных распределений

$$X_ц = (x_1+x_2)/2\ . \qquad (5.19)$$

Медианы из соображений симметрии равны математическим ожиданиям. Равномерное и собственно трапецеидальное распределения моды не имеют, а мода треугольного равна $1/a$.

Среднее квадратическое отклонение в зависимости от распределения определяется по формуле:

– равномерное $\sigma_p = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$;

– трапецеидальное $\sigma = \left(\dfrac{a}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2} = \dfrac{\sigma_p}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}$

– треугольное $\sigma = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Из приведенных уравнений следует, что *СКО* трапецеидальных распределений возрастает в 1,41 раза с ростом параметра b от нуля (треугольное) до a (равномерное). Коэффициент асимметрии всех трапецеидальных распределений равен нулю.

5.3.2 Экспоненциальные распределения

Экспоненциальные распределения описываются формулой

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)}\exp\left(-\left|\frac{x-X_ц}{\lambda\sigma}\right|^{\alpha}\right), \qquad (5.20)$$

где $\lambda = \sqrt{\dfrac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$; σ – СКО; α – некоторая характерная для данного распределения константа; $X_ц$ – координата центра; $Г(x)$ – гамма-функция. В нормированном виде, т.е. при $X_ц = 0$ и $\sigma\lambda = 1$,

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}\exp\left(-|x|^{\alpha}\right) = A(\alpha)\exp\left(-|x|^{\alpha}\right), \qquad (5.21)$$

где $A(\alpha)$ – нормирующий множитель распределения.

Интегральная функция нормированного экспоненциального распределения описывается выражением

$$F(x,\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-|x|^{\alpha}\right) dx\,. \qquad (5.22)$$

Интеграл, входящий в эту формулу, выражается через элементарные функции только при *α = 1/n, n = 1; 2; 3; ...*

Нормальное распределение (распределение Гаусса). Наибольшее распространение получил нормальный закон распределения, называемый часто *распределением Гаусса:*

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - X_ц)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (5.22)$$

где σ – параметр рассеивания распределения, равный *СКО*; $X_ц$ – центр распределения, равный математическому ожиданию. Вид нормального распределения показан на рис. 5.1.

Широкое использование нормального распределения на практике объясняется центральной предельной теоремой теории вероятностей, утверждающей, что распределение случайных погрешностей будет близко к нормальному всякий раз, когда результаты наблюдений формируются под действием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

При введении новой переменной $t = (x – X_ц)/\sigma$ из (5.22) получается нормированное нормальное распределение, интегральная и дифференциальная функции которого соответственно равны:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-0,5t^2} dt\,; \;\; p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5t^2}\,. \qquad (5.23)$$

Нормирование приводит к переносу начала координат в центр распределения и выражению абсциссы в долях СКО. Значения интегральной и дифференциальной функций нормированного нормального распределения сведены в таблицы, которые можно найти в литературе по теории вероятностей.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-0,5t^2} dt \qquad (5.24)$$

называют *функцией Лапласа.* Для нее справедливы следующие равенства: $\Phi(-\infty) = -0,5;\ \Phi(0) = 0;\ \Phi(+\infty) = 0,5;\ \Phi(t) = -\Phi(t).$

Функция Лапласа используется для определения значений интегральных функций нормальных распределений. Функция $F(t)$ связана с функцией Лапласа формулой

$$F(t)=0{,}5+\Phi(t). \tag{5.25}$$

Поскольку интеграл в (5.24) не выражается через элементарные функции, то значения функции Лапласа для различных значений t табулированы.

5.3.3 Уплощенные распределения

Данные распределения представляют собой композицию равномерного и какого-либо экспоненциального распределения. Вид одного из них показан на рисунке 5.4. Уплощенные распределения отличаются от экспоненциальных с показателем α >2 тем, что при почти плоской вершине имеют длинные, медленно спадающие "хвосты", в то время как экспоненциальные распределения при α>>2 обрываются тем круче, чем более плоской является их вершина.

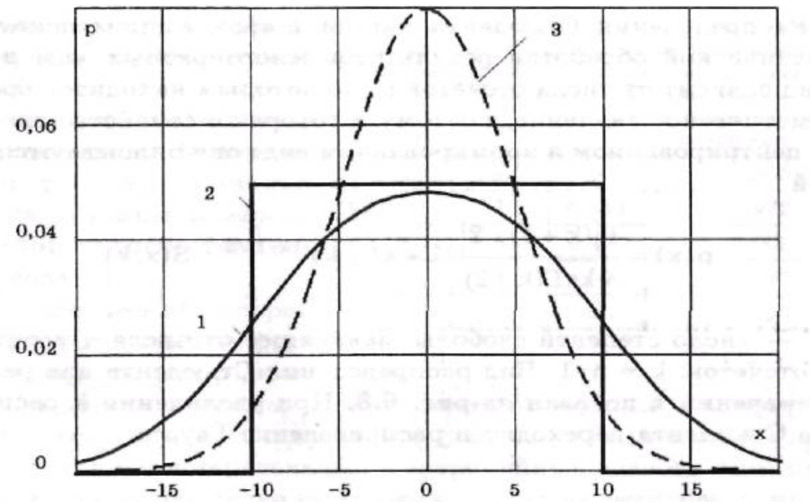

Рисунок 5.4 – Уплощенное распределение (1), полученное как композиция равномерного (2) и нормального (3) распределений с *СКО*, равными $10\sqrt{5}$ и *5* соответственно

Основными параметрами, определяющими форму таких распределений, являются:

– показатель относительного содержания в композиции равномерной составляющей

$$C_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_{экс}}, \tag{5.26}$$

где $\sigma_р$, $\sigma_{экс}$ – СКО равномерного и экспоненциального распределений;

– показатель α экспоненциальной составляющей.

Вес $p = \dfrac{\sigma^2_{экс}}{(\sigma^2_{экс} + \sigma^2_p)}$ относительной дисперсии $\sigma^2_{экс}$ в суммарной дисперсии $(\sigma^2_{экс} + \sigma^2_p)$ как правило, не превышает 10%. Однако его влияние на форму кривой *p(x)* будет значительным. Другая особенность уплощенных распределений: при том же значении эксцесса энтропийный коэффициент у них существенно меньше, чем у экспоненциальных распределений.

5.3.4 Семейство распределений Стьюдента

Эти законы описывают плотность распределения вероятности среднего арифметического, вычисленного по выборке из *n* случайных отсчетов нормально распределенной генеральной совокупности. Распределения Стьюдента нашли широкое применение при статистической обработке результатов многократных измерений. Их вид зависит от числа отсчетов *n*, по которым находится среднее арифметическое значение, поэтому и говорят о семействе законов. В центрированном и нормированном виде они описываются формулой:

$$p(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} = S(x,k), \qquad (5.25)$$

где *k* – число степеней свободы, зависящее от числа *n* усредняющих отсчетов: *k = n–1*. Вид распределения Стьюдента для различных значений *k* показан на рисунке 5.5. При увеличении *k* распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

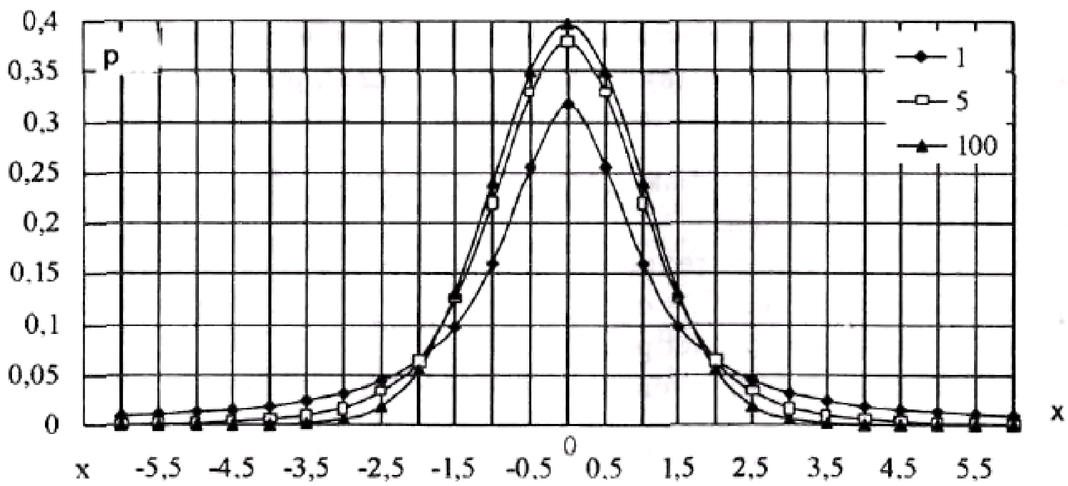

Рисунок 5.5 – Распределение Стьюдента при степенях свободы, равных *1* (распределение Коши), *5 и 100*

Распределения Стьюдента имеют ряд особенностей:

– при $n \leq 3$ их *СКО* становится равным бесконечности, т.е. дисперсионная оценка ширины разброса не работает (перестает существовать);

– классический аппарат моментов для оценки формы и ширины распределения Стьюдента с малым числом степеней свободы оказывается не работоспособным, и их ширина и форма могут быть оценены лишь с использованием доверительных и энтропийных оценок. Этим распределение Стьюдента резко отличается от других распределений.

Разновидностью распределения Стьюдента является ***распределение Коши,*** Оно важно тем, что ему подчиняется распределение отношения двух нормально распределенных центрированных случайных величин. Распределение Коши – это предельное распределение семейства законов Стьюдента с минимально возможным числом степеней свободы, равным единице ($k=1$) :

$$p(x)=\frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2)(1+x^2)}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}. \qquad (5.26)$$

В общем виде (не нормированном и не центрированном) распределение Коши имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{A\pi\left[1+\left((x-X_ц)/A\right)^2\right]}, \qquad (5.27)$$

где A, $X_ц$ – параметры распределения.

Свойства распределения Коши резко отличаются от свойств экспоненциальных распределений, а именно:

– дисперсия и *СКО* не существуют, так как определяющий их интеграл расходится. Они будут бесконечно увеличиваться при росте числа экспериментальных данных. Оценка ширины распределения может быть произведена только на основе теории информации;

– оценка центра в виде среднего арифметического для распределения Коши неправомочна, так как ее рассеяние $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ равно бесконечности;

– математическое ожидание не существует;

– для определения $X_ц$ необходимо использовать медиану;

– эксцесс равен бесконечности, а контрэксцесс равен нулю;

5.3.5 Двухмодальные распределения

К двухмодальным относятся *дискретное двузначное, арксинусоидальное и двухмодальные остро– и кругловершинные* распределения.

Дискретное двузначное распределение – это распределение, при котором с равными вероятностями встречаются только два значения случайной величины. В центрированном виде (рисунок 5.6) оно описывается формулой

$$p(x) = 0{,}5\delta(x + A) + 0{,}5(x - A), \qquad (5.28)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $\pm A$ – возможные значения случайной величины.

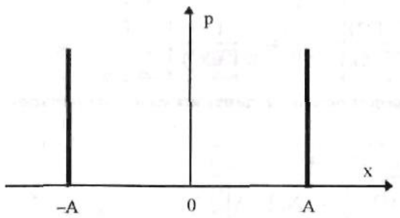

Рисунок 5.6 – Дискретное двузначное распределение

При дискретном двузначном распределении *СКО* равно значению параметра A, $\varepsilon = 1$, $\kappa = 1$.

Дискретное двузначное распределение может быть приближенно представлено в виде суммы двух нормальных распределений с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку m_x и при стремлении к нулю их *СКО*:

$$p(x) = \lim\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+A)^2}{2\sigma^2}}\right]. \qquad (5.29)$$

Остро– и кругловершинные двухмодальные распределения получаются как композиция дискретного двузначного и экспоненциального распределений с различными значениями коэффициента *а* (рисунок 5.7). При α < 2 получаются островершинные, при α > 2 – кругловершинные распределения.

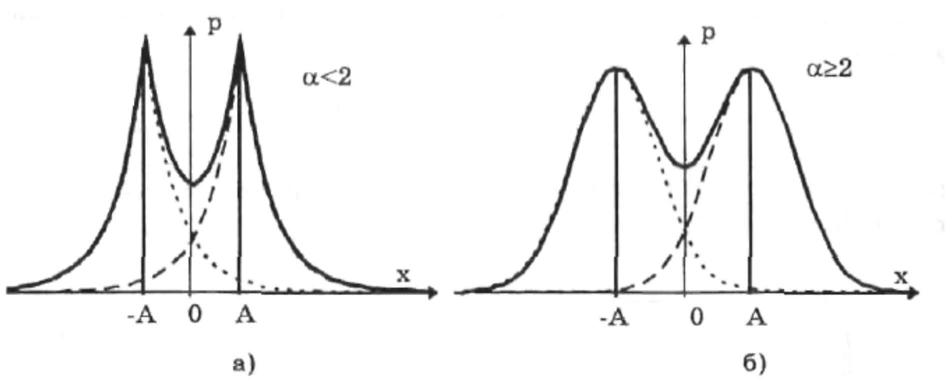

Рисунок 5.7 – Островершинные (а) и кругловершинные (б) двухмодальные распределения

Основными параметрами таких распределений являются:

– показатель относительного содержания в композиции дискретной составляющей

$$C_Д = \frac{c_Д}{\sigma_{экс}} = \frac{A}{\sigma_{экс}}, \tag{5.30}$$

где $\sigma_д$ и $\sigma_{экс}$ – *СКО* дискретного и экспоненциального распределений. Как правило, $C_Д \in (0; 2)$.

Чем больше показатель $C_д$, тем больше провал. При $C_д = 0$ провал на графике распределения отсутствует;

– показатель степени а для экспоненциальных распределений, который обычно лежит в пределах от 0,5 до 2.

Островершинные распределения получаются при использовании некоторых высокоточных цифровых вольтметров, а кругловершинные распределения имеют погрешности от механического гистерезиса элементов приборов и датчиков.

Лекция 6 Оценивание параметров генеральной совокупности

6.1 Точечные оценки параметров распределения
6.2 Оценка с помощью интервалов
6.3 Методы исключения грубых погрешностей

6.1 Точечные оценки параметров распределения

Мы подошли к решению вопроса о том, как на основании полученной в эксперименте группы результатов наблюдений оценить истинное значение, т.е. найти результат измерений, как оценить его точность, т.е. меру его приближения к истинному значению.

Рассмотренные в рамках предыдущей лекции функции распределения описывают поведение непрерывных случайных величин, т.е. величин, возможные значения которых неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал. На практике все результаты измерений и случайные погрешности являются величинами дискретными, т.е. величинами x_i возможные значения которых отделимы друг от друга и поддаются счету. При использовании дискретных случайных величин возникает задача нахождения точечных оценок параметров их функций распределения на основании *выборок* – ряда значений x_i принимаемых случайной величиной x в n независимых опытах. Используемая выборка должна быть ***репрезентативной*** (представительной), т.е. должна достаточно хорошо представлять пропорции генеральной совокупности.

Оценка параметра называется ***точечной,*** если она выражается одним числом. Задача нахождения точечных оценок – частный случай статистической задачи нахождения оценок параметров функции распределения случайной величины на основании выборки. Любая точечная оценка, вычисленная на основании опытных данных, является их функцией и поэтому сама должна представлять собой случайную величину с распределением, зависящим от распределения исходной случайной величины, в том числе от самого оцениваемого параметра и от числа опытов n.

Точечные оценки могут быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Состоятельной называется оценка, которая при увеличении объема выборки стремится по вероятности к истинному значению числовой характеристики.

Несмещенной называется оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемой числовой характеристике (параметру).

Оценка называется ***эффективной***, если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки данного параметра, т.е. *наиболее эффективной* *считают ту из нескольких возможных несмещенных оценок, которая имеет наименьшую дисперсию.*

Требование несмещенности на практике не всегда целесообразно, так как оценка с небольшим смещением и малой дисперсией может оказаться предпочтительнее несмещенной оценки с большой дисперсией. На практике не всегда удается удовлетворить одновременно все три этих требования, однако выбору оценки должен предшествовать ее критический анализ со всех перечисленных точек зрения.

Наиболее распространенным методом получения оценок является, ***метод наибольшего (максимального) правдоподобия,*** теоретически обоснованный математиком Р. Фишером, который приводит к асимптотически несмещенным и эффективным оценкам с приближенно нормальным распределением. Среди других методов можно назвать **методы моментов** и **наименьших квадратов**.

Точечной оценкой математического ожидания результата измерений является *среднее арифметическое значение* измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \tag{6.1}$$

При любом законе распределения оно является состоятельной и несмещенной оценкой, а также наиболее эффективной по критерию наименьших квадратов.

Точечная оценка дисперсии, определяемая по формуле

$$\tilde{D}[x] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \ , \tag{6.2}$$

является несмещенной и состоятельной.

Среднеквадратическое отклонение случайной величины x определяется как корень квадратный из дисперсии. Соответственно его оценка может быть найдена путем извлечения корня из оценки дисперсии. Однако эта операция является нелинейной процедурой, приводящей к смещенности получаемой таким образом оценки. Для исправления оценки СКО вводят поправочный множитель $k(n)$, зависящий от числа наблюдений n. Он изменяется от $k(3)=1{,}13$ до $k(\infty) = 1{,}03$.

Оценка среднего квадратического отклонения

$$\tilde{\sigma} = S_x = k(n)\sqrt{\tilde{D}[x]} = k(n)\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \ . \tag{6.3}$$

Полученные оценки математического ожидания и *СКО* являются случайными величинами. Это проявляется в том, что при повторениях серий из n наблюдений каждый раз будут получаться различные оценки $\bar{x}$ и $\tilde{\sigma}$.

Рассеяние этих оценок целесообразно оценивать с помощью *СКО* $S_{\bar{x}}$ и S_σ. Оценка *СКО* среднего арифметического значения

$$S_x = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{6.4}$$

Оценка среднего квадратического отклонения

$$S_\sigma = \tilde{\sigma}(S_x) = \frac{S_x\sqrt{\varepsilon - 1}}{2\sqrt{n}}. \tag{6.5}$$

Отсюда следует, что относительная погрешность определения *СКО* может быть оценена как

$$\frac{S_\sigma}{S_x} = \frac{\sqrt{\varepsilon - 1}}{2\sqrt{n}}. \tag{6.6}$$

Она зависит только от эксцесса и числа наблюдений в выборке и не зависит от *СКО*, т.е. той точности, с которой производятся измерения. Ввиду того, что большое число измерений проводится относительно редко, погрешность определения, а может быть весьма существенной. В любом случае она больше погрешности из-за смещенности оценки, обусловленной извлечением квадратного корня и устраняемой поправочным множителем *k(n)*. В связи с этим на практике пренебрегают учетом смещенности оценки *СКО* отдельных наблюдений и определяют его по формуле

$$\tilde{\sigma} = S_x = \sqrt{\tilde{D}[x]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \tag{6.7}$$

т.е. считают $k(n)=1$.

Иногда оказывается удобнее использовать следующие формулы для расчета оценок *СКО* отдельных наблюдений и результата измерения:

$$S_x = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \tilde{x}^2\right]};\ S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \tilde{x}^2\right]}. \tag{6.8}$$

Точечные оценки других параметров распределений используются значительно реже. Оценки коэффициента асимметрии и эксцесса находятся по формулам

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{nS_x^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3; \tag{6.9}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{nS_x^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4. \tag{6.10}$$

Определение рассеяния оценок коэффициента асимметрии и эксцесса описывается различными формулами в зависимости от вида распределения.

6.2 Оценка с помощью интервалов

Рассмотренные точечные оценки параметров распределения дают оценку в виде числа, наиболее близкого к значению неизвестного параметра. Такие оценки используют только при большом числе измерений. Чем меньше объем выборки, тем легче допустить ошибку при выборе параметра. Для практики важно не только получить точечную оценку, но и определить интервал, называемый *доверительным,* между границами которого с заданной *доверительной вероятностью*

$$P\{x_H < \tilde{o} < \tilde{o}_B\} = 1 - q, \tag{6.11}$$

где q – уровень значимости; $x_н$, $x_в$ – нижняя и верхняя границы интервала, находится истинное значение оцениваемого параметра.

В общем случае доверительные интервалы можно строить на основе ***неравенства Чебышева***. При любом законе распределения случайной величины, обладающей моментами первых двух порядков, верхняя граница вероятности попадания отклонения случайной величины x от центра распределения $x_ц$ интервал tS_x описывается неравенством Чебышева

$$P\left\{\left|x - \tilde{o}_{\ddot{o}}\right| \le tS_x\right\} \ge 1 - \frac{1}{t^2}, \tag{6.12}$$

где S_x – оценка *СКО* распределения; t – положительное число.

Для нахождения доверительного интервала не требуется знать закон распределения результатов наблюдений, но нужно знать оценку *СКО*. Полученные с помощью неравенства Чебышева интервалы оказываются слишком широкими для практики. Так, доверительной вероятности 0,9 для многих законов распределений соответствует доверительный интервал $1{,}6S_x$. Неравенство Чебышева дает в данном случае $3{,}16S_x$. В связи с этим оно не получило широкого распространения.

В метрологической практике используют главным образом *квантильные оценки* доверительного интервала. Под *100Р-процентным квантилем* x_p понимают абсциссу такой вертикальной линии, слева от которой площадь под кривой плотности распределения равна *Р%.* Иначе говоря, *квантиль* – это значение случайной величины (погрешности) с заданной доверительной вероятностью *Р*. Например, медиана распределения является 50%-иым квантилем $x_{0,5}$.

На практике 25- и 75%-ный квантили принято называть *сгибами,* или *квантилями распределения.* Между ними заключено 50% всех возможных значений случайной величины, а остальные 50% лежат вне их. Интервал значений случайной величины x между $x_{0,05}$ и $x_{0,95}$ охватывает 90% всех ее возможных значений и называется *интерквантильным промежутком с 90%-ной вероятностью.* Его протяженность равна $d_{0,9} = x_{0,95} - x_{0,05}$.

На основании такого подхода вводится понятие *квантильных значений погрешности,* т.е. значений погрешности с заданной доверительной вероятностью P – границ интервала неопределенности

$$\pm\Delta_Д = \pm(x_p - x_{1-p})/2 = \pm d_p/2. \tag{6.13}$$

На его протяженности встречается $P\%$ значений случайной величины (погрешности), а $q = (1-P)\%$ общего их числа остаются за пределами этого интервала.

Для получения интервальной оценки нормально распределенной случайной величины необходимо:

– определить точечную оценку *МО* $\bar{x}$ и *СКО* S_x случайной величины;

– выбрать доверительную вероятность P из рекомендуемого ряда значений *0,90; 0,95; 0,99*;

– найти верхнюю $x_В$ и нижнюю $x_Н$ границы в соответствии с уравнениями

$$F(x_Н) = \frac{q}{2} = 1 - \frac{P}{2} \quad \text{и} \quad F(x_В) = 1 - \frac{q}{2} = 1 + \frac{P}{2}. \tag{6.14}$$

Значения $x_н$ и $x_в$ определяются из таблиц значений интегральной функции распределения $F(t)$ или функции Лапласа $\Phi(t)$.

Полученный доверительный интервал удовлетворяет условию

$$P\left\{\frac{\bar{x} - z_p S_x}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + \frac{z_p S_x}{\sqrt{n}}\right\} = 2F(z_p), \tag{6.15}$$

где n – число измеренных значений; z_P – аргумент функции Лапласа $\Phi(t)$, отвечающей вероятности $P/2$. В данном случае z_p называется квантильным множителем. Половина длины доверительного интервала $D_p = \frac{z_p S_x}{\sqrt{n}}$ называется доверительной границей погрешности результата измерений.

Пример: *Произведено 50 измерений постоянного сопротивления. Определить доверительный интервал для МО значения постоянного сопротивления, если закон распределения нормальный с параметрами* $m_x = \bar{R} = 590$ *Ом,* $S_x = 90$ *Ом при доверительной вероятности* $P = 0,9$.

Так как гипотеза о нормальности закона распределения не противоречит опытным данным, доверительный интервал определяется по формуле

$$P\left\{\frac{\bar{x}-z_p}{S_x\sqrt{n}} < x < \bar{x} + \frac{z_p}{S_x\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(z_p).$$

Отсюда $\Phi(z_P)=0,45$. Из специальных таблиц находим, что $z_P = 1,65$. Следовательно, доверительный интервал запишется в виде

$$590 - \frac{1,65\cdot 90}{\sqrt{50}} < R < 590 + \frac{1,65\cdot 90}{\sqrt{50}} \text{ или } 590-21 < R < 590+21.$$

Окончательно $509\,Ом < R < 611\,Ом$.

При отличии закона распределения случайной величины от нормального необходимо построить его математическую модель и определять доверительный интервал с ее использованием.

Рассмотренный способ нахождения доверительных интервалов справедлив для достаточно большого числа наблюдений n, когда $\sigma = S_x$. Следует помнить, что вычисляемая оценка *СКО* S_x является лишь некоторым приближением к истинному значению σ. Определение доверительного интервала при заданной вероятности оказывается тем менее надежным, чем меньше число наблюдений. Нельзя пользоваться формулами нормального распределения при малом числе наблюдений, если нет возможности теоретически на основе предварительных опытов с достаточно большим числом наблюдений определить *СКО*.

Расчет доверительных интервалов для случая, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна, т.е. при малом числе наблюдений n, возможно выполнить с использованием распределения Стьюдента $S_{(t,k)}$. Оно описывает плотность распределения отношения (дроби Стьюдента):

$$t = \frac{\bar{x} - M(\bar{x})}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - Q}{S_{\bar{x}}} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - Q}{S_x}, \qquad (6.16)$$

где Q – истинное значение измеряемой величины. Величины $\bar{x}$, S_x и $S_{\bar{x}}$ вычисляются на основании опытных данных и представляют собой точечные оценки *МО, СКО* результатов измерений и *СКО* среднего арифметического значения.

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале $(-t_p; +t_p)$

$$P\left\{-t_p < \frac{\bar{x} - Q}{S_{\bar{x}}} < +t_p\right\} = P\left\{|\bar{x} - Q| < \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}\right\} = \int_{-tp}^{+tp} S(t,k)\,dt = 2\int_{0}^{tp} S(t,k)\,dt, \qquad (6.17)$$

где k – число степеней свободы, равное $(n-1)$. Величины t_P (называемые в данном случае *коэффициентами Стьюдента),* рассчитанные с помощью двух последних формул для различных значений доверительной вероятности и числа измерений, табулированы. Следовательно, с помощью распределения Стьюдента можно найти вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает

$$\Delta_p = t_p S_{\bar{x}} = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}. \quad (6.18)$$

В тех случаях, когда распределение случайных погрешностей не является нормальным, все же часто пользуются распределением Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной. Распределение Стьюдента применяют при числе измерений n < 30, поскольку уже при n = 20,.., 30 оно переходит в нормальное и вместо уравнения (6.14) можно использовать уравнение (6.13).

Результат измерения записывается в виде:

$$Q = \bar{x} \pm \frac{tS_x}{\sqrt{n}},\ P = P_Д, \quad (6.19)$$

где $P_д$ – конкретное значение доверительной вероятности. Множитель t при большом числе измерений n равен квантильному множителю z_p. При малом n он равен коэффициенту Стьюдента.

Полученный результат измерения не является одним конкретным числом, а представляет собой интервал, внутри которого с некоторой вероятностью $P_д$ находится истинное значение измеряемой величины. Выделение середины интервала $\bar{x}$ вовсе не предполагает, что истинное значение ближе к нему, чем к остальным точкам интервала. Оно может быть в любом месте интервала, а с вероятностью $1 - P_Д$ даже за его пределами.

6.3 Методы исключения грубых погрешностей

Грубая погрешность, или промах – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Источником грубых погрешностей нередко бывают резкие изменения условий измерения и ошибки, допущенные оператором. К ним можно отнести:

- неправильный отсчет по шкале измерительного прибора, происходящий из-за неверного учета цены малых делений шкалы;
- неправильная запись результата наблюдений, значений отдельных мер использованного набора, например гирь;
- хаотические изменения параметров питающего СИ напряжения, например его амплитуды или частоты.

Корректная статистическая обработка выборки возможна только при ее однородности, т.е. в том случае, когда все ее члены принадлежат к одной и той же генеральной совокупности. В противном случае обработка данных бессмысленна. "Чужие" отсчеты по своим значениям могут существенно не отличаться от "своих" отсчетов. Их можно обнаружить только по виду гистограмм или дифференциальных законов распределения. Наличие таких аномальных отсчетов принято называть *загрязнениями* выборки, однако выделить члены выборки, принадлежащие каждой из генеральных совокупностей, практически невозможно.

Если «свои» и «чужие» отсчеты различаются по значениям, то их исключают из выборки (рисунок 6.1,а). Особую неприятность доставляют отсчеты, которые хотя и не входят в компактную группу основной массы отсчетов выборки, но и не удалены от нее на значительное расстояние, – так называемые предполагаемые промахи (рисунок 6.1,б).

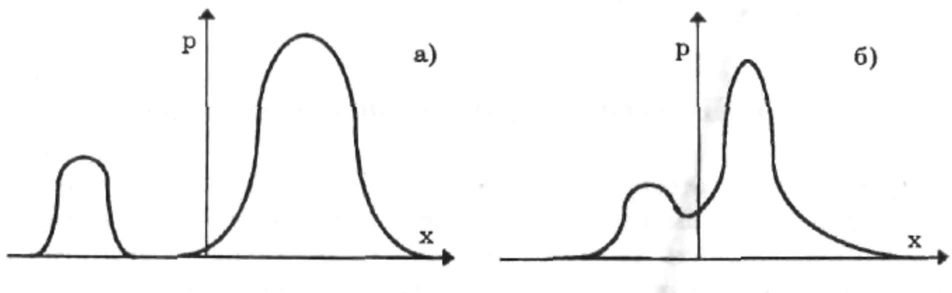

Рисунок 6.1 – Проявление промахов на дифференциальном законе распределения вероятности

Отбрасывание «слишком» удаленных от центра выборки отсчетов называется *цензурированием* выборки. Это осуществляется с помощью специальных критериев.

При однократных измерениях обнаружить промах не представляется возможным. Для уменьшения вероятности появления промахов измерения проводят два-три раза и за результат принимают среднее арифметическое полученных отсчетов. При многократных измерениях для обнаружения промахов используют статистические критерии, предварительно определив, какому виду распределения соответствует результат измерений.

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами **проверки статистических гипотез.** Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

Для выявления грубых погрешностей *задаются* ***вероятностью q (уровнем значимости)*** того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений.

Критерий «трех сигм» применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону. По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью $q \le 0{,}003$, маловероятен и его можно считать промахом, если

$$\left|\bar{x} - x_i\right| > 3S_x, \tag{6.20}$$

где S_x – оценка *СКО* измерений. Величины $\bar{x}$ и S_x вычисляют без учета экстремальных значений x_i. Данный критерий надежен при числе измерений $n > 20... 50$.

Это правило обычно считается слишком жестким, поэтому рекомендуется назначать границу цензурирования в зависимости от объема выборки:

– *при* $6 < n \le 100$ *она равна* $4S_x$;
– *при* $100 < n \le 1000$ —$4{,}5S_x$;
– *при* $1000 < n < 10000$ — $5S_x$.

Данное правило также применимо только для нормального закона.

В общем случае границы цензурирования $t_{гр}$, S_x выборки зависят не только от объема n, но и от вида распределения. Назначая ту или иную границу, необходимо оценить уровень значимости q, т.е. вероятность исключения какой-либо части отсчетов, принадлежащих обрабатываемой выборке.

Выражение для приближенного расчета коэффициента $t_{гр}$ при уровне значимости $q < 1/(n + 1)$

$$t_{гр} = 1{,}55 + 0{,}8\sqrt{\varepsilon - 1}\,\lg(n/10), \tag{6.21}$$

где ε – эксцесс распределения. Данные выражения применимы для:

– кругловершинных двухмодальных распределений с $\varepsilon = 1{,}5,..,, 3$, являющихся композицией дискретного двузначного и нормального распределений;

– островершинных двухмодальных распределений с $\varepsilon = 1{,}5,..., 6$, являющихся композицией дискретного двузначного распределения и распределения Лапласа;

– композиций равномерного и экспоненциальных распределений с показателем степени $\alpha = 1/2$ при $\varepsilon = 1{,}8,...,6$;

– экспоненциальных распределений с $\varepsilon = 1{,}5,...,6$.

Критерий Романовского применяется, если число измерений $n < 20$. При этом вычисляется отношение

$$\left|\frac{(\bar{x} - x_i)}{S_x}\right| = \beta \tag{6.22}$$

и сравнивается с критерием $\beta_т$, выбранным по таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Значения критерия Романовского $\beta = f(n)$

Q	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15	n = 20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	22,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Если $\beta > \beta_т$, то результат x_i считается промахом и отбрасывается.

Пример: *При диагностировании топливной системы автомобиля результаты пяти измерений расхода топлива составили: 22, 24, 26, 28, 30 л на 100 км. Последний результат вызывает сомнение. Проверить по критерию Романовского, не является ли он промахом.*

Найдем среднее арифметическое значение расхода топлива и его *СКО* без учета последнего результата, т.е. для четырех измерения. Они соответственно равны 25 и 2,6 л на 100 км.

Поскольку $n < 20$, то по критерию Романовского при уровне значимости *0,01* и $n = 4$ табличный коэффициент $\beta_т = 1,73$. Вычисленное для последнего, пятого измерения $\beta = |(25 - 30)|/2,6 = 1,92 > 1,73$.

Критерий Романовского свидетельствует о необходимости отбрасывания последнего результата измерения.

Вариационный критерий Диксона удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок). При его применении полученные результаты наблюдений записывают в вариационный возрастающий *ряд*

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ (x_1 < x_2 < \ldots < x_n).$$

Критерий Диксона определяется как

$$K_Д = \frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_n - x_1)}. \qquad (6.23)$$

Критическая область для этого критерия $P(K_Д > Z_p) = q$. Значения Z_p приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Значения критерия Диксона

n	*Z_q при q, равном*			
	0,	0,0	0,0	0,0
	10	5	2	1
4	0,	0,7	0,8	0,8
6	68	6	5	9
8	0,	0,5	0,6	0,7
10	48	6	4	0
14	0,	0,4	0,5	0,5
16	40	7	4	9
18	0,	0,4	0,4	0,5
20	35	1	8	3

30	0,29 0,28 0,26 0,26 0,22	0,35 0,33 0,31 0,30 0,26	0,41 0,39 0,37 0,36 0,31	0,45 0,43 0,41 0,39 0,34

Пример 6.4. *Было проведено пять измерений напряжения в электросети. Получены следующие данные: 127,1; 127,2; 126,9; 127,6; 127,2 В. Результат 127,6 В существенно (на первый взгляд) отличается от остальных. Проверить, не является ля он промахом.*

Составим вариационный ряд из результатов измерений напряжения в электросети: *126,9; 127,1; 127,2; 127,2; 127,6 В.* Для крайнего члена этого ряда (127,6 В) критерий Диксона

$$K_Д = \frac{127{,}6 - 127{,}2}{127{,}6 - 126{,}9} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = 0{,}57\,.$$

Как следует из таблицы 6.2, по этому критерию результат 127,6 В может быть отброшен как промах лишь на уровне значимости $q = 0{,}10$.

Применение рассмотренных критериев требует осмотрительности и учета объективных условий измерений. Конечно, оператор должен исключить результат наблюдения с явной грубой погрешностью и выполнить новое измерение. Но он не имеет права отбрасывать более или менее резко отличающиеся от других результаты наблюдений. В сомнительных случаях лучше сделать дополнительные измерения (не взамен сомнительных, а кроме них) и затем привлекать на помощь рассмотренные выше статистические критерии. Кроме рассмотренных критериев, существуют и другие, например критерии Граббса и Шовенэ.

Лекция 7 Систематические погрешности

7.1 Систематические погрешности и их классификация
7.2 Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей
7.3 Исключение систематических погрешностей путем введения поправок

7.1 Систематические погрешности и их классификация

Систематическая погрешность считается специфической, «вырожденной» случайной величиной, обладающей некоторыми, но не всеми свойствами случайной величины, изучаемой в теории вероятностей и математической статистике. Свойства систематической погрешности, которые необходимо учитывать при объединении составляющих погрешности, отражаются такими же характеристиками, что и свойства "настоящих" случайных величин – ***дисперсией (СКО) и коэффициентом взаимной корреляции.***

Систематическая погрешность представляет собой определенную функцию влияющих факторов, состав которых зависит от физических, конструктивных и технологических особенностей СИ, условий их применения, а также индивидуальных качеств наблюдателя. В метрологической практике при оценке систематических погрешностей должно учитываться влияние следующих основных факторов:

1 **Объект измерения.** Перед измерением он должен быть достаточно хорошо изучен с целью корректного выбора его модели. Чем полнее модель соответствует исследуемому объекту, тем точнее могут быть получены результаты измерения. Например, кривизна земной поверхности может не учитываться при измерении площади сельскохозяйственных угодий, так как она не вносит ощутимой погрешности, однако при измерении площади океанов ею пренебрегать уже нельзя.

2 **Субъект измерения.** Его вклад в погрешность измерения необходимо уменьшать путем подбора операторов высокой квалификации и соблюдения требований эргономики при разработке СИ.

3 **Метод и средство измерений.** Чрезвычайно важен их правильный выбор, который производится на основе априорной информации об объекте измерения. Чем больше априорной информации, тем точнее может быть проведено измерение. Основной вклад в систематическую погрешность вносит, как правило, методическая погрешность.

4 **Условия измерения.** Обеспечение и стабилизация нормальных условий являются необходимыми требованиями для минимизации дополнительной погрешности, которая по своей природе, как правило, является систематической.

Систематические погрешности принято классифицировать по двум признакам. По ***характеру изменения во времени*** они делятся на постоянные и переменные.

Постоянными называются такие погрешности измерения, которые остаются неизменными в течение всей серии измерений. Например, погрешность от того, что неправильно установлен ноль стрелочного электроизмерительного прибора, погрешность от постоянного дополнительного веса на чашке весов и т.д.

Переменными называются погрешности, изменяющиеся в процессе измерения. Они делятся на монотонно изменяющиеся, периодические и изменяющиеся по сложному закону.

Если в процессе измерения систематическая погрешность монотонно возрастает или убывает, ее называют ***монотонно изменяющейся***. Например, она имеет место при постепенном разряде батареи, питающей средство измерений. ***Периодической*** называется погрешность, значение которой является периодической функцией времени. Примером может служить погрешность, обусловленная суточными колебаниями напряжения силовой питающей сети, температуры окружающей среды и др. Систематические погрешности могут изменяться и по более сложному закону, обусловленному какими-либо внешними причинами.

По ***причинам возникновения*** погрешности делятся на **методические, инструментальные** и **личные** (субъективные).

7.2 Способы обнаружения и устранения систематических погрешностей

Результаты наблюдений, полученные при наличии систематической погрешности, называются ***неисправленными.*** При проведении измерений стараются в максимальной степени исключить или учесть влияние систематических погрешностей. Это может быть достигнуто следующими путями:

– устранением источников погрешностей до начала измерений. В большинстве областей измерений известны главные источники систематических погрешностей и разработаны методы, исключающие их возникновение или устраняющие их влияние на результат измерения. В связи с этим в практике измерений стараются устранить систематические погрешности не путем обработки экспериментальных данных, а применением СИ, реализующих соответствующие методы измерений;

– **определением поправок и внесением их в результат измерения;**

– оценкой границ неисключенных систематических погрешностей.

Постоянная систематическая погрешность не может быть найдена методами совместной обработки результатов измерений. Однако она не искажает ни показатели точности измерений, характеризующие случай-

ную погрешность, ни результат нахождения переменной составляющей систематической погрешности.

Действительно, результат одного измерения

$$x_i = x_н + \Delta_i + \Theta_i, \quad (7.1)$$

где $x_и$ – истинное значение измеряемой величины; Δ_i – *i-я* случайная погрешность; θ_i – *i-я* систематическая погрешность. После усреднения результатов многократных измерений получаем среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_н + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Theta_i \; . \quad (7.2)$$

Если систематическая погрешность постоянна во всех измерениях, т.е. $\theta_i=\theta$, то

$$\bar{x} = x_н + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i + \Theta \, . \quad (7.3)$$

Таким образом, постоянная систематическая погрешность не устраняется при многократных измерениях.

Постоянные систематические погрешности могут быть обнаружены лишь **путем сравнения результатов измерений с другими,** полученными с помощью более высокоточных методов и средств. Иногда эти погрешности могут быть устранены специальными приемами проведения процесса измерений. Эти методы рассмотрены ниже.

Наличие существенной переменной систематической погрешности искажает оценки характеристик случайной погрешности и аппроксимацию ее распределения. Поэтому она должна обязательно выявляться и исключаться из результатов измерений.

Для устранения постоянных систематических погрешностей применяют следующие методы:

– ***Метод замещения,*** представляющий собой разновидность метода сравнения, когда сравнение осуществляется заменой измеряемой величины известной величиной, причем так, что при этом в состоянии и действии всех используемых средств измерений не происходит никаких изменений. Этот метод дает наиболее полное решение задачи. Для его реализации необходимо иметь регулируемую меру, величина которой однородна измеряемой.

– ***Метод противопоставления,*** являющийся разновидностью метода сравнения, при котором измерение выполняется дважды и проводится так, чтобы в обоих случаях причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений. Например, способ взвешивания Гаусса.

Пример: Измерить сопротивление с помощью одинарного моста методом противопоставления.

Сначала измеряемое сопротивление R_x уравновешивают известным сопротивлением R_1 включенным в плечо сравнения моста. При этом $R_x = R_1 \cdot R_3 / R_4$, где R_3, R_4 – сопротивления плеч моста. Затем резисторы R_x и R_1 меняют местами и вновь уравновешивают мост, регулируя сопротивление резистора R_1. В этом случае $R_x = R'_1 \cdot R_3 / R_4$.

Из двух последних уравнений исключается отношение R_3/R_4. Тогда $R_x = \sqrt{R_1 / R'_1}$

– ***Метод компенсации погрешности по знаку*** (метод изменения знака систематической погрешности), предусматривающий измерение с двумя наблюдениями, выполняемыми так, чтобы постоянная систематическая погрешность входила в результат каждого из них с разными знаками.

Пример: Измерить ЭДС потенциометром постоянного тока, имеющим паразитную термо–ЭДС.

При выполнении одного измерения получаем ЭДС E_1 Затем меняем полярность измеряемой ЭДС и направление тока в потенциометре. Вновь проводим его уравновешивание – получаем значение E_2. Если термо–ЭДС дает погрешность ΔE и $E_1 = E_x + \Delta E$, то $E_2 = E_x - \Delta E$. Отсюда $E_x = (E_1 + E_2)/2$. Следовательно, систематическая погрешность, обусловленная действием термо–ЭДС, устранена.

– ***Метод рандомизации*** – наиболее универсальный способ исключения неизвестных постоянных систематических погрешностей. Суть его состоит в том, что одна и та же величина измеряется различными методами (приборами). Систематические погрешности каждого из них для всей совокупности являются разными случайными величинами. Вследствие этого при увеличении числа используемых методов (приборов) систематические погрешности взаимно компенсируются.

Для устранения переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей применяют следующие приемы и методы.

– ***Анализ знаков неисправленных случайных погрешностей***. Если знаки неисправленных случайных погрешностей чередуются с какой-либо закономерностью, то наблюдается переменная систематическая погрешность. Если последовательность знаков «+» у случайных погрешностей сменяется последовательностью знаков «–» или наоборот, то присутствует монотонно изменяющаяся систематическая погрешность. Если группы знаков «»+ и «–» у случайных погрешностей чередуются, то присутствует периодическая систематическая погрешность.

– ***Графический метод.*** Он является одним из наиболее простых способов обнаружения переменной систематической погрешности в ряду результатов наблюдений и заключается в построении графика последовательности неисправленных значений результатов наблюдений. На графике через построенные точки проводят плавную кривую, которая выражает тенденцию результата измерения, если она существует. Если тенденция не прослеживается, то переменную систематическую погрешность считают практически отсутствующей.

– ***Метод симметричных наблюдений.*** Рассмотрим сущность этого метода на примере измерительного преобразователя, передаточная функция которого имеет вид $y = kx + y_0$, где x, y – входная и выходная величины преобразователя; k – коэффициент, погрешность которого изменяется во времени по линейному закону; y_0 – постоянная.

Для устранения систематической погрешности трижды измеряется выходная величина y через равные промежутки времени Δt. При первом и третьем измерениях на вход преобразователя подается сигнал x_0 от образцовой меры. В результате измерений получается система уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_0 + y_0; \\ y_2 &= \left(k \pm \frac{dk}{dt}\Delta t\right)x + y_0; \\ y_3 &= \left(k \pm 2\frac{dk}{dt}\Delta t\right)x_0 + y_0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ее решение позволяет получить значение x, свободное от переменной систематической погрешности, обусловленной изменением коэффициента k:

$$x = \frac{2x_0(y_2 - y_0)}{y_1 + y_3 - 2y_0}. \tag{7.5}$$

Специальные статистические методы. К ним относятся способ последовательных разностей, дисперсионный анализ, и др. Рассмотрим подробнее некоторые из них.

Способ последовательных разностей (критерий Аббе). Применяется для обнаружения изменяющейся во времени систематической погрешности и состоит в следующем. Дисперсию результатов наблюдений можно оценить двумя способами: обычным

$$\sigma^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x})^2 \tag{7.6}$$

и вычислением суммы квадратов последовательных (в порядке проведения измерений) разностей $(x_{i-1} - x_i)^2$

$$Q^2(x) = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2. \tag{7.7}$$

Если в процессе измерений происходило смещение центра группирования результатов наблюдений, т.е. имела место переменная систематическая погрешность, то $\sigma^2[x]$ дает преувеличенную оценку дисперсии результатов наблюдений. Это объясняется тем, что на $\sigma^2[x]$ влияют вариации $\bar{x}$. В то же время изменения центра группирования $\bar{x}$ весьма мало сказываются на значениях последовательных разностей $d_i = x_{i+1} - x_i$ поэтому смещения $\bar{x}$ почти не отразятся на значении $Q^2[x]$.

Отношение

$$v = \frac{Q^2[x]}{\sigma^2[x]} \tag{7.8}$$

является критерием для обнаружения систематических смещений центра группирования результатов наблюдений. Критическая область для этого критерия (критерия Аббе) определяется как

$$P(v < v_q) = q, \tag{7.9}$$

где $q = 1 - P$ – уровень значимости, P – доверительная вероятность. Значения v_q для различных уровней значимости q и числа наблюдений n приведены в таблице 7.1. Если полученное значение критерия Аббе меньше v при заданных q и n, то гипотеза о постоянстве центра группирования результатов наблюдений отвергается, т.е. обнаруживается переменная систематическая погрешность результатов измерений.

Таблица 7.1 – Значения критерия Аббе V_q.

n	V_q при q, равном			n	V_q при q, равном		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390	13	0,295	0,431	0,578
5	0,208	0,269	0,410	14	0,311	0,447	0,591
6	0,182	0,281	0,445	15	0,327	0,461	0,603
7	0,185	0,307	0,468	16	0,341	0,474	0,614
8	0,202	0,331	0,491	17	0,355	0,487	0,624
9	0,221	0,354	0,512	18	0,368	0,499	0,633
10	0,241	0,376	0,531	19	0,381	0,510	0,642
11	0,260	0,396	0,548	20	0,393	0,520	0,650
12	0,278	0,414	0,564				

Дисперсионный анализ (критерий Фишера). В практике измерений часто бывает необходимо выяснить наличие систематической погрешности результатов наблюдений, обусловленной влиянием какого-либо постоянно действующего фактора, или определить, вызывают ли изменения этого фактора систематическое смещение результатов измерений. В данном случае проводят многократные измерения, состоящие из достаточного числа серий, каждая из которых соответствует определенным (пусть неизвестным, но различным) значениям влияющего фактора. Влияющими факторами, по которым производится объединение результатов наблюдений по сериям, могут быть внешние условия (температура, давление и т.д.), временная последовательность проведения измерений и т.п.

После проведения N измерений их разбивают на s серий (s>3) по n_j результатов наблюдений ($sn_j = N$) в каждой серии и затем устанавливают, имеется или отсутствует систематическое расхождение между результатами наблюдений в различных сериях. При этом должно быть установлено, что результаты в сериях распределены нормально. Рассеяние результатов наблюдений в пределах каждой серии отражает только случайные влияния, характеризует лишь случайные погрешности измерений в пределах этой серии.

Характеристикой совокупности случайных внутрисерийных погрешностей будет средняя сумма дисперсий результатов наблюдений, вычисленных раздельно для каждой серии, т.е.

$$\sigma_{BC}^2 = \frac{1}{N-s}\sum_{j=1}^{S}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2, \qquad (7.10)$$

где $\bar{x}_j = \dfrac{1}{n_j}\sum\limits_{i=1}^{n_j} x_{ji}$, x_{ji} – результат i-го измерения в j-й серии.

Внутрисерийная дисперсия σ_{BC}^2, характеризует случайные погрешности измерений, так как только случайные влияния обусловливают те различия (отклонения результатов наблюдений), на которых она основана. В то же время рассеяние $\bar{x}_j$ различных серий обусловливается не только случайными погрешностями измерений, но и систематическими различиями (если они существуют) между результатами наблюдений, сгруппированными по сериям. Следовательно, усредненная межсерийная дисперсия

$$\sigma_{MC}^2 = \frac{1}{s-1}\sum_{j=1}^{н} n_j\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2, \qquad (7.11)$$

где $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{n_j} n_j\bar{x}_j$ – выражает силу действия фактора, вызывающего систематические различия между сериями.

Таким образом, отношение

$$\sigma_{BC}^2 / \left(\sigma_{BC}^2 + \sigma_{MC}^2\right) \qquad (7.12)$$

характеризует долю дисперсии всех результатов наблюдений, обусловленную наличием случайных погрешностей измерений, а отношение

$$\sigma_{MC}^2 / \left(\sigma_{BC}^2 + \sigma_{MC}^2\right) \qquad (7.13)$$

характеризует долю дисперсии, обусловленную межсерийными различиями результатов наблюдений.

Первую из них называют ***коэффициентом ошибки***, вторую – ***показателем дифференциации***. Чем больше отношение показателя дифференциации к коэффициенту ошибки, тем сильнее действие фактора, по которому группировались серии, и тем больше систематическое различие между ними.

Критерием оценки наличия систематических погрешностей в данном случае является дисперсионный **критерий Фишера**

$$F = \frac{\sigma_{MC}^2}{\sigma_{BC}^2}. \tag{7.14}$$

Критическая область для критерия Фишера соответствует $P(F > F_q) = q$.

Значения F_q для различных уровней значимости q, числа измерений N и числа серий s приведены в таблице 7.2, где $k_2 = N - s$, $k_1 = s - 1$.

Таблица 7.2 – Значения F_q для различных уровней значимости q, числа измерений N и числа серий.

k_2	F_q при k_1 равном									
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	∞
q=0,05										
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,50
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,63
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4	3,92	3,67
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,2	2,93
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,54
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3	2,85	2,7	2,6	2,3
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,7	2,59	2,44	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,65	2,51	2,34	2,25	1,92
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,6	2,45	2,28	2,18	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2.53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,62
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2	1,94	1,75	1,64	1
q=0,01										
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,5
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,46
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	6,88
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	4,86
10	10,04	7,46	6,55	5,99	5,56	5,39	5,06	4,71	4,52	3,91
12	9,33	6,93	5,95	5,06	5,06	4,82	4,5	4,16	3,98	3,36
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,2	3,89	3,55	3,37	2,75
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,2	2,57
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,1	3,87	3,56	3,23	3,05	2,42
30	7,56	5,39	4,51	4,01	3,7	3,47	3,17	2,84	2,66	2,01
∞	6,64	4,6	3,78	3,32	3,02	2,8	2,51	2,18	1,99	1

Если полученное значение критерия Фишера больше F_q (при заданных q, N и s), то гипотеза об отсутствии систематических смещения результатов наблюдений по сериям отвергается, т.е. обнаруживается систематическая погрешность, вызываемая тем фактором, по которому группировались результаты наблюдений,

Из всех рассмотренных способов обнаружения систематических погрешностей дисперсионный анализ является наиболее эффективным и достоверным, так как позволяет не только установить факт наличия погрешности, но и дает возможность проанализировать источники ее возникновения.

7.3 Исключение систематических погрешностей путем введения поправок

В ряде случаев систематические погрешности могут быть вычислены и исключены из результата измерения. Для этого используются поправки.

Поправка C_j – величина, одноименная измеряемой, которая вводится в результат измерения $x_i = x'_i + \Theta_j + C_j$ с целью исключения составляющих систематической погрешности θ_j.

При $C_j = -\Theta_j$ – *j-я* составляющая систематической погрешности полностью устраняется из результата измерения.

Поправки определяются экспериментально или в результате специальных теоретических исследований. Они задаются в виде таблиц, графиков или формул. Введением одной поправки устраняется влияние только одной составляющей систематической погрешности. Для устранения всех составляющих в результат измерения приходится вводить множество поправок. При этом вследствие ограниченной точности определения поправок случайные погрешности результата измерения накапливаются и его дисперсия увеличивается.

Так как поправка известна с определенной точностью, то она характеризуется статистически – средним значением поправки *C* и *СКО* S_C. При исправлении результата x'_i путем введения поправок C_j, где $j = 1, 2, \ldots, m$, по формуле дисперсия исправленного результата

$$x_i = x'_i + \sum_{j=1}^{m} C_j \qquad S^2 = S_н^2 + \sum_{j}^{m} S_{cj}^2 , \tag{7.15}$$

где $S_н^2$ – оценка дисперсии неисправленного результата; S^2_{cj} – оценка дисперсии *j-й* поправки. Как видно, с одной стороны, уточняется результат измерения, а с другой – увеличивается разброс за счет роста дисперсии. Следовательно, необходимо найти оптимум.

Пусть при измерении постоянной величины Q получено (рисунок 7.1) значение

$$Q = \bar{x}' + t_p S\ , \qquad (7.16)$$

где $\bar{x}'$ – оценка среднего арифметического неисправленного результата измерений; t_p – коэффициент Стьюдента.

После введения поправки $C \pm\ t_p S_c$ результат измерения

$$Q = (\bar{x}' + C) \pm t_p S_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t_p S_{\bar{x}}\ , \qquad (7.17)$$

где $S_{\bar{x}} = \sqrt{S^2 + S_c^2}$

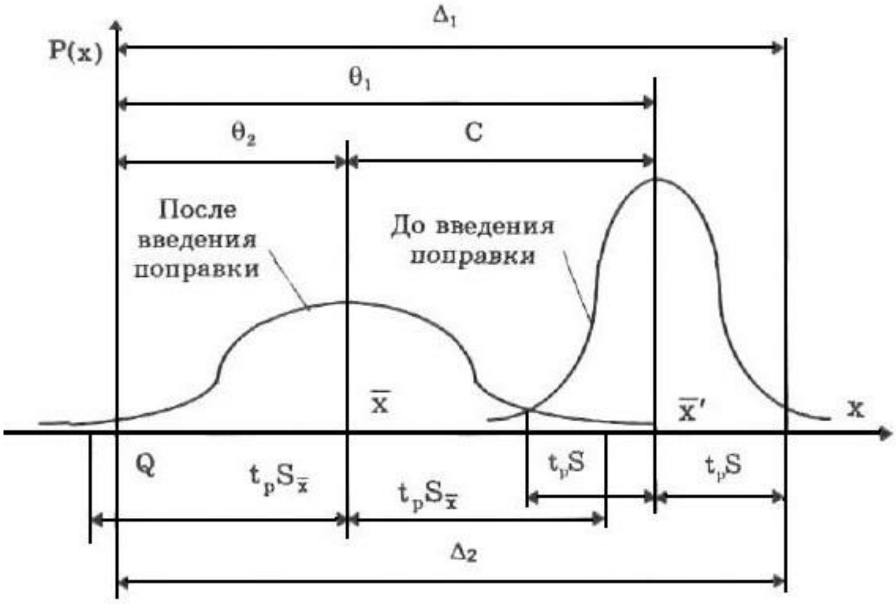

Рисунок 7.1 – Устранение систематической погрешности путем введения поправки.

Максимальные доверительные значения погрешности результата измерения до и после введения поправки равны соответственно

$$\Delta_1 = \Theta_1 + t_p S$$

$$\Delta_2 = \Theta_2 + t_p S_{\bar{x}} = \Theta_1 - C + t_p \sqrt{S^2 + S_c^2}\ .$$

Поправку имеет смысл вводить до тех пор, пока $\Delta_1 < \Delta_2$. Отсюда следует, что

$$C > t_p S \left[\sqrt{1 + \frac{S_c^2}{S^2}} - 1 \right]. \qquad (7.18)$$

Если $S_C/S << 1$, то, раскладывая уравнение в степенной ряд, получим $C > 0,5\, S_c^2/S^2$. Из этого неравенства видно, что если оценка среднего квадратического отклонения поправки $S_c \to 0$, то поправку имеет смысл вводить всегда.

В практических расчетах погрешность результата обычно выражается не более чем двумя значащими цифрами, поэтому поправка, если она меньше пяти единиц младшего разряда, следующего за последним десятичным разрядом погрешности результата, все равно будет потеряна при округлении и вводить ее не имеет смысла.

Пример:. Напряжение источника ЭДС U_x с внутренним сопротивлением R_i = 60±10 Ом измерено вольтметром класса точности 0,5. Сопротивление вольтметра R_y = 5 кОм и известно с погрешностью ±0,5%. Показание вольтметра U_v = 12,35 В. Найти поправку, которую нужно внести в показание прибора для определения действительного значения напряжения источника ЭДС.

Показания вольтметра соответствуют падению напряжения на нем:

$$U_v = \frac{R_v}{R_i + R_v} U_x .$$

Относительная систематическая методическая погрешность, обусловленная ограниченным значением сопротивления R_y,

$$\delta_c = \frac{U_v - U_x}{U_x} 100\% = -\frac{100 R_i}{R_i + R_v} = -\frac{100 \cdot 60}{5060} = -1{,}2\% .$$

Поправка равна абсолютной погрешности, взятой с обратным знаком: Δ_c= 0,012–12,35 = 0,146В. Погрешность полученного значения поправки определяется погрешностью, с которой известно сопротивление R_j. Ее предельное значение составит 10/60 = 0,167. Погрешностью из-за неточности оценки R_v, равной 0,005, можно пренебречь. Следовательно, погрешность определения поправки Δ = ±0,167-0,146 = 0,03 В.

Таким образом, поправка, которую необходимо ввести в показания вольтметра с учетом округления ΔU = +0,15 В. Тогда исправленное значение U'_x = 12,35+0,15 = 12,50 В. Этот результат имеет определенную погрешность, в том числе не исключенный остаток систематической погрешности Δ = ±0,03В или δ = ± 0,24% из-за потребления некоторой мощности вольтметром.

Лекция 8 Обработка результатов прямых измерений

8.1 Порядок обработки результатов прямых многократных измерений
8.2 Обработка результатов прямых однократные измерения

8.1 Порядок обработки результатов прямых многократных измерений

Прямые многократные измерения делятся на равно- и неравноточные. ***Равноточными*** называются измерения, которые проводятся средствами измерений одинаковой точности по одной и той же методике при неизменных внешних условиях. При равноточных измерениях СКО результатов всех рядов измерений равны между собой.

Перед проведением обработки результатов измерений необходимо удостовериться в том, что данные из обрабатываемой выборки статистически подконтрольны, группируются вокруг одного и того же центра и имеют одинаковую дисперсию.

Задача обработки результатов многократных измерений заключается в нахождении оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится ее истинное значение.

Исходной информацией для обработки является ряд из n ($n > 4$) результатов измерений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, из которых исключены известные систематические погрешности, – выборка. Число n зависит как от требований к точности получаемого результата, так и от реальной возможности выполнять повторные измерения.

Последовательность обработки результатов прямых многократных измерений состоит из следующих этапов:

1 Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений. На этом этапе определяются:

– среднее арифметическое значение $\bar{x}$ измеряемой величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,; \tag{8.1}$$

– *СКО* результата измерения S_x

$$\tilde{\sigma} = S_x = \sqrt{\tilde{D}[x]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \,; \tag{8.2}$$

– СКО среднего арифметического значения $S_{\bar{x}}$

$$S_x = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \,. \tag{8.3}$$

В соответствии с критериями, рассмотренными в лекции 6, грубые погрешности и промахи исключаются, после чего проводится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и его СКО. В ряде случаев для более надежной идентификации закона распределения результатов измерений могут определяться другие точечные оценки: коэффициент асимметрии, эксцесс и контрэксцесс, энтропийный коэффициент.

2 Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей измерений.

Первым шагом при идентификации закона распределения является построение по исправленным результатам измерений x_i, где $i = 1, 2,..., n,$ вариационного ряда (упорядоченной выборки), а также y_i, где $y_1 = min(x_i)$ и $y_n= max(x_i)$. В вариационном ряду результаты измерений (или их отклонения от среднего арифметического) располагают в порядке возрастания. Далее этот ряд разбивается на оптимальное число m, как правило, одинаковых *интервалов группирования* длиной $h = (y_1 + y_n)/m$.

Оптимальным является такое число интервалов m, при котором возможное максимальное сглаживание случайных флуктуации данных сопровождается с минимальным искажением от сглаживания самой кривой искомого распределения. Для практического применения целесообразно использовать выражения

$$m_{min} = 0.55n^{0,4} \text{ и } m_{max} = 1.25n^{0,4}, \qquad (8.4)$$

которые получены для наиболее часто встречающихся на практике распределений с эксцессом, находящимся в пределах от 1,8 до 6, т.е. от равномерного до распределения Лапласа.

Искомое значение m должно находится в пределах от m_{min} до m_{max}, быть нечетным, так как при четном m в островершинном или двухнедельном симметричном распределении в центре гистограммы оказываются два равных по высоте столбца и середина кривой распределения искусственно уплощается.

В случае если гистограмма распределения явно двухмодальная, число столбцов может быть увеличено в 1,5-2 раза, чтобы на каждый из двух максимумов приходилось примерно по m интервалов. Полученное значение длины интервала группирования h всегда округляют в большую сторону, иначе последняя точка окажется за пределами крайнего интервала.

Далее определяют интервалы группирования экспериментальных данных в виде

$$\Delta_1 = (y_1, y_1+h); \Delta_2 = (y_1+h, y_1+2h);....; \Delta_n = (y_n–h, y_n), \qquad (8.5)$$

и подсчитывают число попаданий n_k *(частоты.)* результатов измерений в каждый интервал группирования. Сумма этих чисел должна равняться числу измерений. По полученным значениям рассчитывают вероятности попадания результатов измерений *(частности) в* каждый из интервалов группирования по формуле $p_k^* = P_k/\Delta_k$, где $k=1, 2,...,m$.

Проведенные расчеты позволяют построить **гистограмму**, **полигон** и **кумулятивную кривую**.

Для построения ***гистограммы*** по оси результатов наблюдений x (рисунок 8.1,а) откладываются интервалы Δ_k в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строится прямоугольник высотой P_k. Площадь, заключенная под графиком, пропорциональна числу наблюдений n. Иногда высоту прямоугольника откладывают равной эмпирической плотности вероятности $p_k^* = P_k/\Delta_k = n_k/(n\Delta_k)$, которая является оценкой средней плотности в интервале Δ_k. В этом случае площадь под гистограммой равна единице. При увеличении числа интервалов и соответственно уменьшении их длины гистограмма все более приближается к гладкой кривой – графику плотности распределения вероятности.

Полигон представляет собой ломаную кривую, соединяющую середины верхних оснований каждого столбца гистограммы (смотри рисунок 8.1,а). Он более наглядно, чем гистограмма, отражает форму кривой распределения. За пределами гистограммы справа и слева остаются пустые интервалы, в которых точки, соответствующие их серединам, лежат на оси абсцисс.

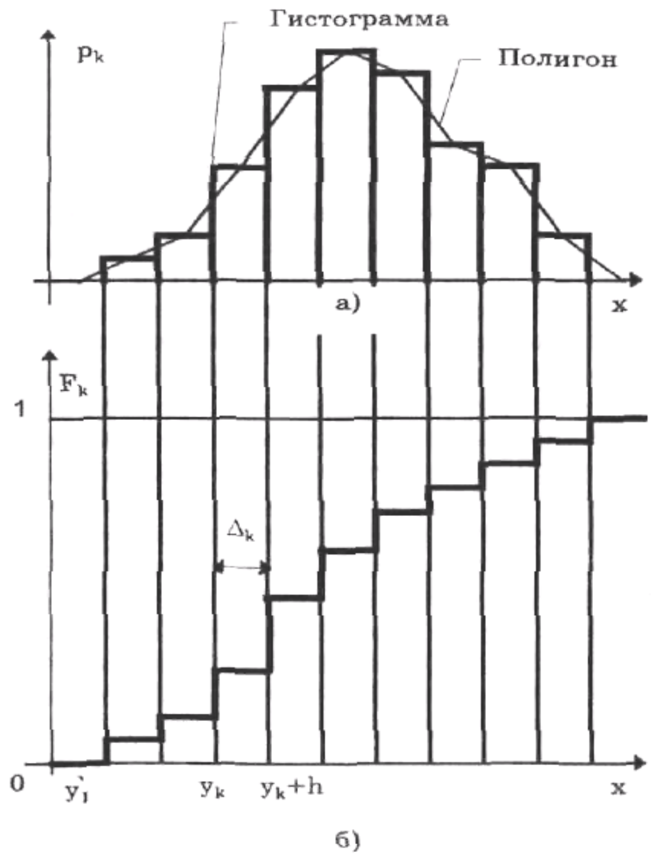

Рисунок 8.1 – Гистограмма, полигон (а) и кумулятивная кривая (б).

Эти точки при построении полигона соединяют между собой отрезками прямых линий. В результате совместно с осью x образуется замкнутая фигура, площадь которой в соответствии с правилом нормирования должна быть равна единице (или числу наблюдений при использовании частостей).

Кумулятивная кривая – это график статистической функции распределения. Для ее построения по оси результатов наблюдений x (рис. 8.1,б) откладывают интервалы Δ_k в порядке возрастания номеров и на каждом интервале строят прямоугольник высотой

$$F_k = \sum_{k=1}^{k} P_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} n_k \ . \tag{8.6}$$

Значение F_k называется *кумулятивной частностью,* а сумма n_k – *кумулятивной* частотой. По виду построения зависимостей может быть оценен закон распределения результатов измерений.

3 Статистические критерии оценки нормальности распределения. В качестве способа оценки близости распределения выборки экспериментальных данных к принятой аналитической модели закона распределения используются критерии согласия. Известен целый ряд критериев согласия, предложенных разными авторами. Наибольшее распространение в практике получил **критерий Пирсона (критерий хи–квадрат).** Идея этого метода состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с таким же числом интервалов, построенной на основе распределения, совпадение с которым определяется. Использование критерия Пирсона возможно при большом числе измерений ($n > 50$) и заключается в вычислении величины χ^2 *(хи – квадрат):*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - N_i)^2}{N_i} = \sum \frac{(n_i - nP_i)^2}{nP_i}\ , \tag{8.7}$$

где n_j, N_j – экспериментальные и теоретические значения частот в i-м интервале разбиения; m – число интервалов разбиения; P_i – значения вероятностей в том же интервале разбиения, соответствующие выбранной модели распределения;

При $n \to \infty$ случайная величина χ^2 имеет распределение $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ Пирсона с числом степеней свободы $\nu = m–1–r$, где r – число определяемых по статистике параметров, необходимых для совмещения модели и гистограммы. Для нормального закона распределения $r = 2$, так как закон однозначно характеризуется указанием двух его параметров – математического ожидания и СКО.

Если бы выбранная модель в центрах всех m столбцов совпадала с экспериментальными данными, то все m разностей $(n_i - N_i)$ были бы равны нулю, а, следовательно, и значение критерия χ^2 также было бы равно нулю. Таким образом, χ^2 есть мера суммарного отклонения между моделью и экспериментальным распределением.

Критерий χ^2 не инвариантен к числу столбцов и существенно возрастает с увеличением их числа. Поэтому для использования его при разном числе столбцов составлены таблицы квантилей распределения χ^2 входом, в которые служит так называемое число степеней свободы $\nu = (m–1–r)$. Чтобы совместить модель, соответствующую нормальному закону, с гистограммой, необходимо совместить координату центра, а для того, чтобы ширина модели соответствовала ширине гистограммы, ее нужно задать как $r = 2$ и $\nu = m–3$. Часть квантилей распределения χ^2_q приведена в таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Значения χ^2_q при различном уровне значимости

ν	χ_q^2 при уровне значимости q, равном								
	0,99	0,95	0,9	0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02
2	0,02	0,1	0,21	0,45	1,39	3,22	4,61	5,99	7,82
4	0,3	0,71	1,06	1,65	3,36	5,99	7,78	9,49	11,67
6	0,87	1,63	2,20	3,07	5,35	8,56	10,65	12,59	15,03
8	1,65	2,73	3,49	4,59	7,34	11,03	13,36	25,51	18,17
10	2,56	3,94	4,87	6,18	9,34	13,44	15,99	18,31	21,16
12	3,57	5,23	6,3	7,81	11,34	15,81	18,55	21,03	24,05
14	4,66	6,57	7,79	9,47	13,34	18,15	21,06	23,69	26,87
16	5,81	7,96	9,31	11,2	15,34	20,46	23,54	26,3	29,63
20	8,26	10,85	12,44	14,58	19,34	25,04	28,41	31,41	35,02
25	11,52	14,61	16,27	18,94	24,34	30,68	34,38	37,65	41,57
30	14,95	18,46	20,60	23,36	29,34	36,25	40,26	43,77	47,96

Если вычисленная по опытным данным мера расхождения χ^2 меньше определенного из таблицы значения χ^2_q. то гипотеза о совпадении экспериментального и выбранного теоретического распределений принимается. Это не значит, что гипотеза верна. Можно лишь утверждать, что она правдоподобна, т.е. она не противоречит опытным данным. Если же χ^2 выходит за границы доверительного интервала, то гипотеза отвергается как противоречащая опытным данным.

Методика определения соответствия экспериментального и принятого законов распределения заключается в следующем:

– определяют оценки среднего арифметического значения $\bar{x}$ и *СКО* $S_{\bar{x}}$;

– группируют результаты многократных наблюдений по интервалам длиной h, число которых определяют так же, как и при построении гистограммы;

– для каждого интервала разбиения определяют его центр x_{i0} и подсчитывают число наблюдений n_i, попавших в каждый интервал;

– вычисляют число наблюдений для каждого из интервалов, теоретически соответствующее выбранной аналитической модели распределения. Для этого сначала от реальных середин интервалов x_{i0} производят переходи нормированным серединам

$$z_i = (x_{i0} - \bar{x})/S_x . \tag{8.8}$$

Затем для каждого значения z_i, с помощью аналитической модели находят значение функции плотности вероятностей $f(z_i)$. Например, для нормального закона

$$f(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_i^2/2} . \tag{8.9}$$

По найденному значению $f(z_i)$ определяют ту часть N_i, имеющихся наблюдений, которая теоретически должна быть в каждом из интервалов

$$N_i = nh\, f(z_i)/S_x, \tag{8.10}$$

где n – общее число наблюдений;

– если в какой-либо интервал теоретически попадает меньше пяти наблюдений, то в обеих гистограммах его соединяют с соседним интервалом. После этого определяют число степеней свободы $v = m–1–r$, где m – общее число интервалов. Если было произведено укрупнение, то m – число интервалов после укрупнения;

– по формуле (8.7) определяют показатель разности частот χ^2;

– выбирают уровень значимости критерия q. Он должен быть небольшим, чтобы была мала вероятность, совершить ошибку первого рода. По уровню значимости и числу степеней свободы v по табл. 8.1 находят границу критической области χ_q^2 такую, что

$$P\{\chi^2 > \chi_q^2\} = q.$$

Вероятность того, что полученное значение χ^2 превышает χ_q^2, равна q и мала. Поэтому, если оказывается, что $\chi^2 > \chi_q^2$, то гипотеза о совпадении экспериментального и теоретического законов распределения отвергается. Если же $\chi^2 < \chi_q^2$, то гипотеза принимается.

Чем меньше q, тем больше значение χ_q^3 (при том же числе степеней свободы v), тем легче выполняется условие $\chi^2 < \chi_q^2$ и принимается проверяемая гипотеза. Но при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода. В связи с этим нецелесообразно принимать $0,02 \leq q \leq 0,01$.

Иногда вместо проверки с односторонней критической областью применяют проверки с двусторонними критическими областями. При этом оценивается вероятность $P\{\chi^2 > \chi_q^2\} = q$ Уровень значимости критерия q делится на две части: $q = q_1 + q_2$. Как правило, принимают $q_1 = q_2$. По табл. 8.1 для $P\{\chi^2 > \chi_q^2\} = 0$ находят χ_q^2 при уровне значимости q_1 и числе степеней свободы v и χ_2^2 для уровня значимости $1 - q_2$ и том же n. Гипотеза о совпадении распределений принимается, если $\chi_2^2 \leq \chi^2 \leq \chi_1^2$.

При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к нормальному не проверяется.

4 Определение доверительных границ случайной погрешности. Если удалось идентифицировать закон распределения результатов измерений, то с его использованием находят квантильный множитель z_P при заданном значении доверительной вероятности P. В этом случае доверительные границы случайной погрешности $\Delta = \pm z_p S_{\bar{x}}$.

5 Определение границ не исключенной систематической погрешности θ результата измерений. Под этими границами понимают найденные нестатистическими методами границы интервала, внутри которого находится неисключенная систематическая погрешность. Она образуется из ряда составляющих: как правило, погрешностей метода и средств измерений, а также субъективной погрешности. Границы неисключенной систематической погрешности принимаются равными пределам допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если их случайные составляющие пренебрежимо малы. Они суммируются по правилам, которые будут рассмотрены нами позже. Доверительная вероятность при определении границ θ принимается равной доверительной вероятности, используемой при нахождении границ случайной погрешности.

6 Определение доверительных границ погрешности результата измерения Δ_p. Данная операция осуществляется путем суммирования СКО случайной составляющей $S_{\bar{x}}$ и границ неисключенной систематической составляющей в θ зависимости от соотношения $\theta / S_{\bar{x}}$ по правилам, которые будут рассмотрены в лекции 10

7 Запись результата измерения. Результат измерения записывается в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta_P, \tag{8.11}$$

при доверительной вероятности $P = P_д$.

При отсутствии данных о виде функции распределения составляющих погрешности результаты измерений представляют в виде $\bar{x}$, $S_{\bar{x}}$, n, θ при доверительной вероятности $P = P_д$.

8.2 Обработка результатов прямых однократные измерения

Прямые многократные измерения в большей мере относятся к лабораторным измерениям. Для производственных процессов более характерны однократные измерения. Однократные прямые измерения являются самыми массовыми и проводятся, если: при измерении происходит разрушение объекта измерения, отсутствует возможность повторных измерений, имеет место экономическая целесообразность. Эти измерения возможны лишь при определенных условиях:

– объем априорной информации об объекте измерений такой, что модель объекта и определение измеряемой величины не вызывают сомнений;

– изучен метод измерения, его погрешности либо заранее устранены, либо оценены;

– средства измерений исправны, а их метрологические характеристики соответствуют установленным нормам.

За результат прямого однократного измерения принимается полученная величина. До измерения должна быть проведена априорная оценка составляющих погрешности с использованием всех доступных данных. При определении доверительных границ погрешности результата измерений доверительная вероятность принимается, как правило, равной 0,95.

Методика обработки результатов прямых однократных измерений приведена в рекомендациях МИ 1552–86 «ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей результатов измерений». Данная методика применима при выполнении следующих условий:

- составляющие погрешности известны;
- случайные составляющие распределены по нормальному закону, а не исключенные систематические, заданные своими границами θ_i – равномерно.

Составляющими погрешности прямых однократных измерений являются:

– погрешности СИ, рассчитываемые по их метрологическим характеристикам;

– погрешность используемого метода измерений, определяемая на основе анализа в каждом конкретном случае;

– личная погрешность, вносимая конкретным оператором. Если последние две составляющие не превышают 15% погрешности СИ, то за погрешность результата однократного измерения принимают погрешность используемого СИ. Данная ситуация весьма часто имеет место на практике.

Названные составляющие могут состоять из неисключенных систематических и случайных погрешностей. При наличии нескольких систематических погрешностей, заданных своими границами $\pm\theta_i$ либо доверительными границами $\pm\theta_i(P)$, доверительная граница результата измерения соответственно может быть рассчитана по формуле

$$\Theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2} \text{ или } \Theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\Theta_i^2(P_j)}{k_j^2}}, \tag{8.12}$$

где $\theta_i(P_j)$ – доверительная граница *i-й* не исключенной систематической погрешности, соответствующая доверительной вероятности P_j, k_j – коэффициент, зависящий от P_j и определяемый так же, как и коэффициент k; $k = k(m,P)$ – коэффициент, равный 0,95 при $P = 0{,}9$ и 1,1 при $P = 0{,}95$. При других доверительных вероятностях он определяется в соответствии с ГОСТ 8.207-76.

Случайные составляющие погрешности результата измерений выражаются либо своими *СКО* S_{xi}, либо доверительными границами $\pm\varepsilon(P)$. В первом случае доверительная граница случайной составляющей погрешности результата прямого однократного измерения определяется через его *СКО* S_x:

$$\varepsilon(P) = z_p S_x = z_p\sqrt{\sum_{i=1}^{k} S_{xi}^2}\ , \tag{8.13}$$

где z_P – точка нормированной функции Лапласа, отвечающей вероятности P. При $P = 0{,}95$ $z_p = 2$.

Если СКО S_{xi} определены экспериментально при небольшом числе измерений (n <30), то в данной формуле вместо коэффициента z_p следует использовать коэффициент Стьюдента, соответствующий числу степеней свободы i-й составляющей, оценка которой произведена при наименьшем числе измерений.

В случае, когда случайные погрешности представлены доверительными границами $\pm\varepsilon_j(P_j)$, соответствующими разным доверительным вероятностям P_i доверительная граница случайной погрешности результатов прямых однократных измерений

$$\varepsilon(P) = z_p S_x = z_p\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon^2(P_i)}{z_{Pi}^2}}. \tag{8.14}$$

Найденные значения θ и $\varepsilon(P)$ используются для оценки погрешности результата прямых однократных измерений. В зависимости от соотношения θ и S_x суммарная погрешность определяется по одной из формул, приведенных в таблице 8.2. Значения коэффициента k_p приведены в таблице 8.3.

Таблица 8.2 – Формулы для расчётов погрешности результата прямых однократных измерений ΔP.

Значение Θ / S_x	Погрешность результата измерения $\Delta(P)$
$\Theta / S_x < 0{,}8$	$\varepsilon(P)$
$0{,}8 \leq \Theta / S_x \leq 8$	$K_p[\varepsilon(P)+\theta(P)]$
$\Theta / S_x > 8$	$\theta(P)$

Таблица 8.3 – Значение k_p в зависимости от отношения θ/S_x при доверительной вероятности 0,95

Θ / S_x	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,05}$	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81

Результат прямых однократных измерений должен записываться в соответствии с рекомендациями МИ 1317-86 в виде $x \pm \Delta(P)$ при доверительной вероятности $P = P_Д$.

Лекция 9 Обработка результатов косвенных, совместных и совокупных измерений

Косвенные измерения – это измерения, при которых искомое значение Q находят на основании известной зависимости

$$Q = F(Q_1, Q_2, ..., Q_m), \tag{9.1}$$

где $(Q_1, Q_2, ..., Q_m)$ – значения, полученные при прямых измерениях. По виду функциональной зависимости F они делятся на две основные группы – ***линейные*** *и* ***нелинейные***. Для линейных косвенных измерений математический аппарат статистической обработки полученных результатов разработан детально. Обработка результатов косвенных измерений производится, как правило, методами: основанными на раздельной обработке аргументов и их погрешностей; линеаризации; приведения.

9.1 Косвенные измерения при линейной зависимости между аргументами

Линейная функциональная зависимость является простейшей формой связи между измеряемой величиной и находимыми посредством прямых измерений аргументами. Она может быть выражена формулой

$$Q = \sum_{i=1}^{m} b_i Q_i , \tag{9.2}$$

где b_i – постоянный коэффициент i-го аргумента Q_i; m – число аргументов. Погрешности линейных косвенных измерений оцениваются ***методом, основанным на раздельной обработке аргументов и их погрешностей.***

Если коэффициенты b_i определяют экспериментально, то нахождение результата измерения величины Q производится поэтапно. Сначала оценивают каждое слагаемое b_i; Q_i как косвенно измеряемую величину, полученную в результате произведения двух измеряемых величин, а потом находят оценку измеряемой величины Q. Результат косвенного измерения определяют по формуле

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{m} b_i \tilde{Q}_i \,, \qquad (9.3)$$

где $\tilde{Q}_i$ – оценка результата измерений аргумента Q_i, получаемая, как правило, посредством обработки результатов многократных прямых измерений каждого из аргументов. При несмещенности и состоятельности результатов $\tilde{Q}_i$ полученная оценка результата измерения $\tilde{Q}_i$ будет также несмещенной и состоятельной. Поскольку дисперсия результата измерения

$$D(\tilde{Q}) = \sum_{i=1}^{m} b_i^2 D(\tilde{Q}_i), \qquad (9.4)$$

то, если результаты $\tilde{Q}_i$ обладают минимальной дисперсией, т.е. являются эффективными, оценка результата измерения $\tilde{Q}_i$ также будет эффективной.

При отсутствии корреляционной связи между аргументами *СКО* результата косвенного измерения $S(\tilde{Q})$, обусловленное случайными погрешностями, вычисляется по формуле

$$S(\tilde{Q}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\tilde{Q}_i)}, \qquad (9.5)$$

где $S(\tilde{Q}_i)$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения аргумента Q_i, рассчитываемое по формуле

$$S_x = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,. \qquad (9.6)$$

При наличии корреляционной связи между аргументами СКО результата косвенного измерения

$$S(\tilde{Q}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\tilde{Q}_i) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{m} \tilde{\rho}_{kl} b_k b_l S(\tilde{Q}_k) S(\tilde{Q}_l)}. \qquad (9.7)$$

Здесь $\tilde{\rho}_{kl}$ – несмещенная оценка коэффициента корреляции между погрешностями аргументов Q_k и Q_l:

$$\tilde{\rho}_{kl} = \frac{1}{(n-1) S(\tilde{Q}_k) S(\tilde{Q}_l)} \sum_{j=1}^{n} (Q_{ki} - \tilde{Q}_k)(Q_{li} - \tilde{Q}_l), \qquad (9.8)$$

где Q_{ki} и Q_{li} – i-е результаты прямых измерений k-го и l-го аргументов; n – число прямых измерений аргументов.

Корреляция между аргументами чаще всего возникает в тех случаях, когда их измерения проводятся одновременно и подвергаются одинаковому влиянию внешних условий (температуры, влажности, напряжения питающей сети, помех и т.п.). Критерием отсутствия связи между двумя аргументами является выполнение неравенства

$$\left|\frac{\tilde{\rho}_{kl}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}_{kl}^{2}}}\right| < t_q, \tag{9.9}$$

где t_q – коэффициент Стьюдента, соответствующий уровню значимости q и числу степеней свободы $n = 2$.

Необходимо проверить отсутствие корреляционных связей между всеми парными сочетаниями аргументов. Моделью для распределения результатов измерений отдельных аргументов обычно можно считать случайную величину с нормальным распределением. *Для распределений, отличных от нормального, распределение среднего арифметического при этом все же можно считать нормальным.*

Случайную погрешность результата косвенного измерения, образующуюся путем сложения случайных погрешностей результатов определения многих аргументов, еще с большим основанием можно считать нормально распределенной случайной величиной. Это дает возможность найти доверительный интервал для значения измеряемой величины.

При большом числе измерений (более 25), выполненных при нахождении каждого из аргументов, доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения можно определить по формуле

$$\varepsilon(\tilde{\Theta}) = z_p S(\tilde{\Theta}), \tag{9.10}$$

где z_P – квантиль нормального распределения, соответствующий выбранной доверительной вероятности P.

При меньшем числе измерений для определения доверительного интервала используется распределение Стьюдента, число степеней свободы которого рассчитывается по приближенной формуле

$$f = \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i^4 S^4(\tilde{\Theta}_i)}{n_i+1}\right)^{-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} b_i^2 S^2(\tilde{\Theta}_i)\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i^4 S^4(\tilde{\Theta}_i)}{n_i+1}\right)\right], \tag{9.11}$$

где n_i – число измерений при определении аргумента Q_i. В этом случае при условии, что распределение погрешностей результатов измерения аргументов не противоречит нормальному распределению, доверительная граница случайной погрешности результата косвенного измерения

$$\varepsilon(\tilde{\Theta}) = t_q S(\tilde{\Theta}), \tag{9.12}$$

где t_p – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности $P=1-q$ и числу степеней свободы f.

Систематическая погрешность результата косвенного измерения определяется систематическими погрешностями результатов измерений аргументов. При измерениях последние стремятся исключить. Однако полностью это сделать не удается, всегда остаются не исключенные систематические погрешности, которые рассматриваются как реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение. Такое предположение приводит обычно к достаточно осторожным заключениям о погрешности результатов косвенных измерений.

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата линейного косвенного измерения $\theta(P)$ в случае, если не исключенные систематические погрешности аргументов заданы границами θ_i, вычисляют по формуле:

$$\Theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 \Theta_i^2} \quad , \tag{9.13}$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью P и числом m составляющих θ_i. Его значения приведены в таблице 9.1. Погрешность от применения этих усредненных коэффициентов не превышает 10% .

Таблица 9.1 – Значения коэффициентов k при $m < 4$

P	0,90	0,95	0,98	0,99
K	0,95	1,1	1,3	1,4

Если число суммируемых слагаемых $m \le 4$ и они значительно различаются между собой, то значение коэффициента k: определяется по таблице 9.2. Под L здесь понимают отношение наибольшей длины интервала $(b_i\theta_i)_{max}$ одного из слагаемых к длине $b_i\theta_i$ остальных слагаемых.

Если границы не исключенных систематических погрешностей результатов измерений аргументов заданы их доверительными границами $\theta_i(P_i)$, соответствующими вероятностям P_i, то границу $\theta(P)$ определяют по формуле :

$$\Theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i^2 \Theta_i^2 (P_i)}{k_i^2}} . \tag{9.14}$$

Таблица 9.2 – Значения коэффициентов *k* при *m = 2,3,4*

L	P = 0,98			P = 0,99		
	m = 2	m = 3	m = 4	m = 2	m = 3	m = 4
1	1,22	1,28	1,30	1,28	1,38	1,41
2	1,16	1,23	1,26	1,22	1,31	1,36
3	1,11	1,17	1,20	1,16	1,24	1,28
4	1,07	1,12	1,15	1,12	1,18	1,32
5	1,05	1,09	1,12	1,09	1,14	1,18

Коэффициенты определяются так же, как поправочный коэффициент *k*.

Суммарная погрешность результата косвенного измерения оценивается на основе композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей. Формулы для ее расчета в зависимости от соотношения границ неисключенной систематической составляющей и СКО случайной составляющей погрешности приведены в таблице 9.3.

Таблица 9.3 – Погрешность результата косвенных измерений *Δ(P)*

Значение $\theta(P)/S(\tilde{Q})$	Погрешность результата измерения *Δ(P)*
$\theta(P)/S(\tilde{Q}) < 0,8$	$\varepsilon(P)$
$0,8 \le \theta(P)/S(\tilde{Q}) \le 8$	$K_p[\varepsilon(P)+\theta(P)]$
$\theta(P)/S(\tilde{Q}) > 8$	$\theta(P)$

Коэффициент k_p определяется по таблице 9.4:

Таблица 9. 4 -Зависимость k_P от отношения $\theta(P)/S(\tilde{Q})$ при различной доверительной вероятности

$\theta(P)/S(\tilde{Q})$	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,05}$	0,81	0,77	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$K_{0,99}$	0,87	0,85	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

Результаты косвенных измерений должен записываться в виде x ± Δ(P) при доверительной вероятности *P*.

9.2 Косвенные измерения при нелинейной зависимости между аргументами

Для обработки результатов измерений при нелинейных зависимостях между аргументами и некоррелированных погрешностях используется ***метод линеаризации***. Он состоит в том, что нелинейная функция, связывающая измеряемую величину с аргументами, разлагается в ряд Тейлора:

$$Q = f(Q_1, Q_2, .., Q_m) = f(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, .., \tilde{Q}_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \Delta Q_i + \tilde{R}. \quad (9.15)$$

Здесь $\partial f / \partial Q_i$ – первая частная производная от функции f по аргументу Q_i, вычисленная в точке $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, ..., \tilde{Q}_n$ – отклонение результата измерения аргумента ΔQ_i от его среднего арифметического; $\hat{R}$ – остаточный член:

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial Q_i \partial Q_j} \Delta Q_i \Delta Q_j \,. \quad (9.16)$$

Метод линеаризации применим, если остаточным членом можно пренебречь. Это возможно в том случае, если

$$\tilde{R} < 0{,}8 \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Q_i} \right)^2 S^2(\tilde{Q}_i)}, \quad (9.17)$$

где $S(\tilde{Q}_i)$ – СКО случайной погрешности результата измерений аргумента Q_i. При необходимости результаты косвенных измерений можно уточнить, используя члены ряда Тейлора более высокого порядка. Оценка результата определяется по формуле

$$\tilde{Q} = f(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, ..., \tilde{Q}_m). \quad (9.18)$$

Абсолютная погрешность косвенного измерения $\Delta = \tilde{Q} - Q$, как это следует из уравнения (9.15), равна

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{m} W_i \Delta Q_i \,, \quad (9.19)$$

где $W_i = \partial f / \partial Q_i$ – коэффициенты влияния i-го аргумента; ΔQ_i – абсолютная погрешность измерения i-го аргумента; $W_i \Delta Q_i$ – частная i-я погрешность определения результата косвенного измерения.

9.3 Метод приведения

Он используется для определения результатов косвенного измерения и его погрешности при наличии корреляции между погрешностями измерений аргументов. Метод можно также применять при неизвестных распределениях погрешностей аргументов. Он предполагает наличие ряда согласованных результатов измерений аргументов

$$Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{2m}; Q_{21}, Q_{22}, \ldots, Q_{2m}; \ldots; Q_{j1}, Q_{j2}, \ldots, Q_{jm}; \ldots; Q_{L1}, Q_{L2}, \ldots, Q_{Lm},$$

полученных в процессе многократных измерений. Согласованность результатов измерений означает либо одновременное их осуществление, либо то, что они выполнены над одним и тем же объектом и в одних и тех же условиях.

Метод основан на приведении отдельных значений косвенно измеряемой величины к ряду простых измерений. Получаемые сочетания отдельных аргументов подставляют в формулу (9.16) и вычисляют отдельные значения измеряемой величины Q: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j, \ldots, Q_L$.

Результат косвенного измерения $\tilde{Q}$ и СКО его случайной погрешности вычисляются по формулам

$$\tilde{Q} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} Q_j; \quad S(\tilde{Q}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{L} \frac{(Q_j - \tilde{Q})^2}{L(L-1)}}. \tag{9.20}$$

Доверительные границы случайной погрешности результата измерения рассчитываются по формуле $\Delta = TS(\tilde{Q})$, где T – коэффициент, зависящий от вида распределения отдельных значений определяемой величины и выбранной доверительной вероятности. При нормальном распределении отдельных значений измеряемой величины доверительные границы случайных погрешностей вычисляются по методике для прямых многократных измерений.

Границы неисключенной систематической погрешности и доверительные границы погрешности результата косвенного измерения определяются так же, как и в рассмотренных выше случаях.

9.4 Совместные и совокупные измерения

Эти виды измерений характеризуются тем, что значения искомых величин рассчитывают по системе уравнений, связывающих их с некоторыми другими величинами, определяемыми посредством прямых или косвенных измерений. При этом измеряются несколько комбинаций значений указанных величин. Каждая такая комбинация позволяет получить одно уравнение, а система содержит всю информацию о значениях искомых величин и имеет вид

$$F_i(Q_1; Q_2; \ldots; Q_j; \ldots; Q_m; X_1(i); X_2(i); \ldots; X_r(i); \ldots; X_k(i)) = 0, \tag{9.21}$$

где P_i – символ функциональной зависимости между величинами в i-м опыте; $i = 1; 2;...; n$; n – число опытов; Q_i – значения искомых величин, общее число которых равно m; $X_r^{(i)}$ – полученные в i-м опыте значения k величин, измеряемых прямыми или косвенными методами.

Если Q_j являются значениями одной и той же величины, то измерения называются ***совокупными,*** если разных физических величин, – то ***совместными.***

После подстановки в исходную систему уравнений результатов $X_r^{(i)}$ прямых или косвенных измерений и проведения необходимых преобразований получим n уравнений, содержащих лишь искомые величины я числовые коэффициенты:

$$F_i(\tilde{Q}_1; \tilde{Q}_2; ...; \tilde{Q}_j; ...; \tilde{Q}_m) = 0. \tag{9.22}$$

Такие уравнения называют *условными.*

Для того чтобы рассчитать значения искомых величин, достаточно иметь m уравнений, т.е. столько же, сколько содержится неизвестных. Тогда результаты измерений и доверительные границы их погрешностей можно найти методами обработки результатов косвенных измерений. Однако обыкновенно для уменьшения погрешностей результатов измерений делается значительно больше измерений, чем это необходимо для определения неизвестных, т.е. $n > m$.

Вследствие ограниченной точности определения величин X_r условные уравнения одновременно не обращаются в тождества, ни при каких значениях искомых величин. И поскольку найти истинные значения искомых величин невозможно, то задача сводится к нахождению их оценок, представляющих собой наилучшие приближения к истинным значениям. Предположим, что $\tilde{Q}_j$, где $j = 1, 2, ..., m$, наилучшие приближения к неизвестным Q_j. Если значения этих оценок подставить в условные уравнения, то их правые части будут отличаться от левых. Для получения тождеств нужно записать:

$$F_i(\tilde{Q}_1; \tilde{Q}_2; ...; \tilde{Q}_j; ...; \tilde{Q}_m) + v_i = 0, \tag{9.23}$$

где v_i – величины, называемые остаточными погрешностями условных уравнений. Если в систему условных уравнений подставить истинные значения искомых величин, то остаточные погрешности превратятся в случайные погрешности условных уравнений. Одним из наиболее общих способов отыскания оценок истинных значений измеряемых величин является регрессионный анализ, или, как его часто называют, *метод наименьших квадратов*. Согласно ему оценки $\tilde{Q}_j$ выбираются так, чтобы минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей условных уравнений. Сумма квадратов остаточных погрешностей, определенных в соответствии с системой условных уравнений (9.23), составляет

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i^2 \left(\tilde{Q}_1; \tilde{Q}_2; ...; \tilde{Q}_j; ...; \tilde{Q}_m\right) \qquad (9.24)$$

и достигает минимума при системе значений Q_j обращающей в нуль все частные производные от S_2 по искомым величинам:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{Q}_j} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 0\,. \qquad (9.25)$$

Выражая остаточные погрешности через функции, стоящие в левой части условных уравнений, получаем систему из m уравнений с m неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{n} F_1 \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{Q}_j} = 0\,, \qquad (9.26)$$

где $j = 1, 2, ..., m$, которая может быть решена относительно оценок $\tilde{Q}_j$. искомых величин.

При решении задачи в общем случае, когда условные уравнения не линейны, а результаты отдельных измерений коррелированны, иногда возникает ряд непреодолимых трудностей. Задача относительно несложно решается лишь тогда, когда условные уравнения линейны или приведены к линейным известными способами и при отсутствии корреляции между результатами отдельных наблюдений. Оценки, даваемые методом наименьших квадратов, являются состоятельными и несмещенными, а при нормальном распределении результатов измерений и эффективными.

Лекция 10 Суммирование погрешностей

10.1 Основы теории суммирования погрешностей

Определение расчетным путем оценки результирующей погрешности по известным оценкам ее составляющих называется ***суммированием погрешностей***.

Главной проблемой, возникающей при суммировании, является то, что все составляющие погрешности должны рассматриваться как случайные величины. С точки зрения теории вероятностей они наиболее полно могут быть описаны своими законами распределения, а их совместное действие – соответствующим многомерным распределением. Однако в такой постановке задача суммирования погрешностей практически не разрешима уже для нескольких составляющих, не говоря о нескольких десятках.

Практически приемлемый путь решения данной задачи суммирования погрешностей состоит в отказе от определения и использования многомерных функций распределения составляющих погрешности. Необходимо подобрать для характеристик составляющих такие числовые оценки (СКО, эксцесс и др.), оперируя с которыми можно было бы получить соответствующие числовые оценки результирующей погрешности. При этом следует учитывать, что:

– отдельные составляющие погрешности могут быть коррелированны между собой;

– при суммировании случайных величин их законы распределения существенно деформируются, т.е. форма закона суммы может резко отличаться от формы закона распределения составляющих.

Правила суммирования погрешностей основываются на том, что погрешность по абсолютному значению всегда много меньше самой измеряемой величины. Поэтому изменение погрешности в зависимости от изменения измеряемой величины может быть учтено, если все суммируемые случайные и систематические составляющие погрешности разделить на *аддитивные* и *мультипликативные*. Сумма аддитивных составляющих даст значение аддитивной части результирующей погрешности, а сумма мультипликативных составляющих – значение мультипликативной части результирующей погрешности.

В пределах некоторого диапазона изменения, как правило, десятикратного, измеряемой величины изменение результирующей погрешности может быть с достаточной степенью точности представлено прямой линией или простейшей кривой (парабола, гипербола). Это дает возможность описать результирующую погрешность линейной или нелинейной двухзвенной формулой. При большем изменении измеряемой величины весь диапазон разбивается на участки, для которых и определяются крайние погрешности.

Пример: *Основная допускаемая погрешность измерения сопротивления цифрового микропроцессорного измерителя иммитанса марки Е7-14 при различных диапазонах измерения и добротностях Q приведена в таблице.*

Диапазон измерения	*Конечное значение диапазона R_k, Ом*	*Предел допустимого значения основной погрешности, Ом.*
0,1…1000 мОм	*1*	$10^{-3}(1+Q)R+3\cdot10^{-4}R_k$
0,001…10 Ом	*10*	$10^{-3}(1+Q)R+2\cdot10^{-4}R_k$
0,01…100 Ом	*100*	$10^{-3}(1+Q)R+2\cdot10^{-4}R_k$
100…1000 Ом	*1000*	$[10^{-3}(1+Q)R+2\cdot10^{-3}R/R_k]R$
1…10кОм	*10000*	$[10^{-3}(1+Q)R+2\cdot10^{-3}R/R_k]R$

Для устранения влияния деформации формы законов распределения все суммируемые составляющие исходно представляются своими СКО и все операции расчетного суммирования проводятся только над ними. Учет взаимных корреляционных связей между суммируемыми составляющими производится путем использования различных правил суммирования для жестко и слабо коррелированных составляющих. Эти правила рассмотрены далее.

В результате суммирования СКО составляющих получаются средние квадратические отклонения соответственно аддитивной, мультипликативной или нелинейной составляющих результирующей погрешности. СКО аддитивной составляющей результирующей погрешности будет характеризовать результирующую погрешность в начале диапазона. Сумма СКО аддитивной и мультипликативной составляющих в конце диапазона описывает результирующую погрешность в конце диапазона. Если участков несколько, то суммирование проводится на всех участках, а затем принимается решение о методе описания результирующей погрешности.

Результирующую погрешность необходимо выразить в виде доверительного интервала. Его расчет по полученному СКО является с точки зрения теории самой трудной операцией при суммировании погрешностей. Это связано с тем, что доверительный интервал равен произведению рассчитанного СКО и множителя, зависящего от закона распределения результирующей погрешности. В то же время вся излагаемая методика с самого начала была нацелена на то, чтобы обойтись без точного определения результирующего закона распределения суммы всех составляющих.

Практические правила расчетного суммирования результирующей погрешности состоят в следующем:

1. Для определения суммарного значения СКО должны учитываться корреляционные связи различных составляющих погрешности. В связи с этим исходными данными для более точного расчета должны служить оценки именно всех отдельных составляющих погрешности, а не оценки некоторых суммарных погрешностей.

2. Для каждой составляющей должно быть найдено ее СКО. В большинстве случаев для этого необходимо знание или предположение о виде закона ее распределения.

3. Все суммируемые составляющие разделяются на аддитивные и мультипликативные составляющие, которые суммируются отдельно.

4. Так как в большинстве случаев точное значение коэффициента корреляции ρ найти невозможно, то все погрешности должны быть условно разделены на:

– сильно коррелированные при $0,7 \le |\rho| \le <1$, для которых считают $\rho = \pm 1$ в зависимости от знака коэффициента корреляции;

– слабо коррелированные при $0 \le |\rho| \le 0,7$, для которых $\rho = 0$.

5. Из суммируемых составляющих выделяются группы сильно коррелированных между собой погрешностей, и внутри этих групп производится алгебраическое суммирование их оценок.

6. После алгебраического суммирования групп сильно коррелированных погрешностей суммарные по группам и оставшиеся вне групп погрешности можно считать некоррелированными и складывать по правилу геометрического суммирования.

Для определения СКО суммарной погрешности при начальном значении измеряемой величины складывают лишь аддитивные составляющие, а для определения СКО погрешности в конце диапазона изменения измеряемой величины – все просуммированные выше составляющие.

7. Для перехода от СКО погрешности к доверительному значению должно быть вынесено суждение о форме закона распределения результи-

рующей погрешности и тем самым выбрано значение квантильного множителя.

Изложенная методика может быть несколько упрощена. Самым сложным в ней являются нахождение СКО всех составляющих по известным их интервальным оценкам и определение интервальной оценки результирующей погрешности по полученному СКО.

В обоих случаях необходимо знание закона распределения погрешностей. Упрощение методики суммирования состоит в том, чтобы сделать эти переходы по возможности более простыми. Один из вариантов состоит в следующем. Согласно центральной предельной теореме, если число суммируемых независимых составляющих достаточно велико (практически при $m \geq 5$) и если среди этих составляющих нет существенно преобладающих над остальными, то результирующий закон распределения близок к нормальному. Однако предположение о близости закона распределения к нормальному без соответствующего анализа достаточно рискованно даже и при большом числе суммируемых составляющих. Тем не менее, при недостатке времени и невысоких требованиях к точности получаемого результата предположение о нормальности закона распределения результирующей погрешности вполне возможно. В этом случае доверительный интервал $\Delta = z_p S_\Sigma$, где z_p – квантильный множитель, определяемый через функцию Лапласа; S_Σ – суммарное СКО или его оценка.

Такой прием существенно снижает трудоемкость расчетов, но может вносить весьма значительные ошибки, если реальное распределение сильно отличается от нормального закона. Например, при фактическом арксинусоидальном распределении ошибка может достигать 180 %. Поэтому использовать его надо весьма осмотрительно.

В качестве другого пути упрощения перехода от СКО результирующей погрешности к ее интервальной оценке следует указать возможность использования доверительной вероятности $P_д = 0{,}9$, при которой для большой группы различных распределений имеет место соотношение

$$\Delta = 1{,}6 S_\Sigma . \tag{10.1}$$

Действительно, для широкого класса симметричных, высокоэнтропийных ($k > 1{,}7$) распределений, а именно для равномерного, треугольного, трапецеидальных, нормального, экспоненциальных с показателем степени $\alpha \geq 2/3$, двухмодальных с глубиной антимодальности менее 1,5, интегральные кривые $F(x)$ в области 0,05 и 0,95 квантилей пересекаются между собой в очень узком интервале значений $X/S = 1{,}6 \pm 0{,}05$. Поэтому с погрешностью 0,05S можно считать, что квантили 0,05 и 0,95 для любых из этих распределений могут быть найдены как

$$X_{0,05} = X_ц - 1{,}6S \text{ и } X_{0,95} = X_ц + 1{,}6S, \tag{10.2}$$

где $X_ц$ – координата центра распределения; S – его СКО. Отсюда следует, что значение доверительного интервала, найденное по формуле (10.1), для любого из названных распределений является интервалом с 90 %-ной доверительной вероятностью.

При $P_д > 0,9$ интегральные кривые для разных законов распределения резко расходятся между собой. В этом случае для нахождения доверительного интервала $\Delta = z_p S_\Sigma$ вместо большого числа таблиц квантилей разнообразных распределений нужно найти для близких классов распределений аппроксимирующие выражения $z_p = f(\varepsilon, P)$, где ε – эксцесс распределения.

Для входящих в классы экспоненциальных и трапецеидальных распределений, а именно: распределения Лапласа ($\varepsilon = 6$); нормального распределения ($\varepsilon = 3$); трапецеидального распределения с соотношением верхнего и нижнего оснований 1:2 (ε = 2) и равномерного распределения ($\varepsilon = 1,8$), зависимость квантильного множителя от эксцесса и доверительной вероятности аппроксимируется уравнением

$$z_p = 1{,}62\left[3{,}8(\varepsilon - 1{,}6)^{2/3}\right]^{\lg\lg[1/(1-P)]}. \qquad (10.3)$$

Погрешность аппроксимации не превышает *4%* при изменении P от 0,9 до 0,99 и 8 % – от 0,9 до 0,999.

Для кругловершинных двухмодальных распределений, представляющих собой композицию нормального и дискретного двузначного распределений, в диапазоне изменения ε от 3 до 1,3 для P от 0,9 до 0,999 с погрешностью 10 % зависимость $z_p = f(\varepsilon, P)$ аппроксимируется выражением

$$z_p = 1{,}6\left[2{,}6\left(1 + \lg(\varepsilon - 1)\right)\right]^{\lg\lg[1/(1-P)]}. \qquad (10.4)$$

Для островершинных двухмодальных распределений, образующихся как композиция распределения Лапласа и дискретного двузначного распределения, рассматриваемая зависимость в интервале значений ε от 1,8 до 6 при P от 0,9 до 0,999 с погрешностью 5 % аппроксимируется формулой

$$z_p = 1{,}23\left[1 + \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{2{,}5}}\lg\frac{0{,}175}{1-P}\right]. \qquad (10.5)$$

Для уплощенных распределений, образующихся как композиция экспоненциального распределения с $\alpha = 1/2$ и равномерного распределения в интервале значений ε от 6 до 1,8 с погрешностью 8 %, рассматриваемая зависимость аппроксимируется формулой

$$z_p = 1{,}56\left[\frac{1{,}12 + (\varepsilon - 1{,}8)^{0{,}58}}{\sqrt{10}}\right]^{\lg[0{,}1/(1-P)]}. \qquad (10.6)$$

Использование приведенных уравнений позволяет, не прибегая к таблицам, с достаточной для практики степенью точности вычислять доверительные интервалы для всех встречающихся распределений погрешностей. Однако для выбора формулы нужно вынести суждение о классе распределения суммарной погрешности.

Дальнейшие упрощения методики, выражающиеся в пренебрежении разделением погрешностей на аддитивные и мультипликативные, коррелированные и некоррелированные, недопустимы, поскольку при суммировании погрешностей получены неверные результаты.

10.2 Суммирование систематических погрешностей

При определении границ систематическая погрешность оценивается по ее составляющим, называемым ***элементарными систематическими погрешностями***. Если для части составляющих находят их оценки и эти погрешности устраняют введением поправок, то в качестве рассматриваемых элементарных погрешностей выступают погрешности определения поправок, которые также характеризуются границами.

Множество возможных способов измерений данной величины дает множество различных реализаций каждой элементарной систематической погрешности. Поэтому последние можно рассматривать как случайные величины и суммировать методами, разработанными в математической статистике. Однако поскольку их функции распределения, как правило, неизвестны, то при суммировании видом распределения задаются, исходя из известных данных об элементарной систематической погрешности. Это не вносит существенной ошибки в получаемые результаты, так как в соответствии с принципом оценивания погрешностей сверху из всех возможных ее распределений всякий раз выбирают наихудшее. Получаемая оценка погрешности надежно характеризует неопределенность результата.

При выборе закона распределения необходимо руководствоваться следующими правилами:

– если известна оценка границ погрешности $\pm\theta_i$ то ее распределение следует считать равномерным (такая ситуация наиболее часто встречается в практике);

– если известна оценка *СКО*, то распределение следует считать нормальным.

Применение этого правила позволяет статистически суммировать элементарные систематические погрешности и обычно приводит к осторожным и вместе с тем не слишком завышенным оценкам погрешности результата измерений.

При равномерном законе распределения элементарных систематических погрешностей их сумма

$$\Theta = \begin{cases} k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\text{, } \textit{если } k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2} < \sum_{i=1}^{m}\Theta_i \\ \sum_{i=1}^{m}\Theta_i \textit{б если } k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2} \geq \sum_{i=1}^{m}\Theta_i \end{cases}, \qquad (10.7)$$

где θ_i – границы *i*-й элементарной случайной погрешности; *k* – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых *m*, их соотношения и доверительной вероятности. При $P < 0{,}99$ он мало зависит от числа слагаемых и может быть представлен усредненными значениями, приведенными в таблице 10.1. Их погрешность не превышает 10 %. При $P \geq 0{,}99$ коэффициент *k* существенно зависит от числа слагаемых и соотношения между ними. Поэтому при $m > 4$ рекомендуется принимать среднее значение $k = 1{,}4$, а при $m \leq 4$ значение *k* необходимо уточнить по ГОСТ 8.207-76 или таблице 10.2. Параметр С, характеризующий отношение границ составляющих систематической погрешности $\dfrac{\Theta_m}{\Theta_{m-1}}$, принимается равным наименьшему значению указанного отношения при условии, что $\Theta_1 \leq \Theta_2 \leq \Theta_3 \leq \Theta_4$.

Таблица 10.1 – Зависимость коэффициента *k* от *P* в *m*

P	Значение k при m равном:					Среднее значение
	2	3	4	5	∞	
0,90	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95
0,95	1,10	1,12	1,12	1,12	1,13	1,1
0,99	1,27	1,37	1,41	1,42	1,49	1,4

Таблица 10.2 – Зависимость коэффициента k от m и С при P = 0,99

m	Значение k при С, равном								
	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7
2	0,98	1,15	1,27	1,22	1,15	1,12	1,08	1,07	1,05
3	1,27	1,32	1,37	1,32	1,24	1,18	1,15	1,12	1,08
4	1,38	1,40	1,41	1,36	1,28	1,23	1,18	1,15	1,11

При большом числе слагаемых результирующая погрешность имеет практически нормальное распределение. Оценка дисперсии этого распределения равна сумме дисперсий слагаемых:

$$S_{\Theta}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Theta_i^2}{3}. \qquad (10.8)$$

Задавшись доверительной вероятностью, получим Θ как границу доверительного интервала $\Theta = z_p S_\Theta$, где z_p квантиль нормального распределения при выбранном уровне значимости $q = 1 – P$.

10.3 Суммирование случайных погрешностей

Правила суммирования случайных погрешностей основаны на известных из теории вероятностей положениях:

- оценка математического ожидания результирующей погрешности определяется алгебраической суммой оценок математических ожиданий составляющих;
- оценка СКО суммарной погрешности определяется выражением

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \rho_{ij} S_i S_j}\ , \tag{10.9}$$

где S_i – оценка *СКО i-й* составляющей погрешности; m – число суммируемых составляющих погрешностей; ρ_{ij} – коэффициент корреляции между *i–й* и *j–й* составляющими.

При суммировании m случайных погрешностей их коэффициенты корреляции образуют матрицу, которая ввиду равенства $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ является диагональной. Так как матрица коэффициентов корреляции симметрична относительно главной диагонали, на которой находятся значения $\rho_{ii} = 1$, то формулу (10.9) можно переписать в виде

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2 + 2\sum_{i<1}^{m} \rho_{ij} S_i S_j}\ , \tag{10.10}$$

где суммирование во втором слагаемом распространяется на все те составляющие, коэффициенты, корреляции которых находятся в матрице правее и выше главной диагонали. Их число равно $m(m–1)/2$.

Использование последнего уравнения и выражения (10.9) затруднительно, так как точное значение коэффициента корреляции между составляющими обычно неизвестно. В этом случае при расчетах полагают $\rho = 0$, если случайные составляющие можно считать независимыми (при $|\rho| < 0,7$) или $\rho = \pm 1$, если заметна корреляция между суммируемыми случайными составляющими погрешностей (при $|p| > 0,7$).

При необходимости точного учета коэффициента корреляции между погрешностями аргументов X_i и X_j его оценка может быть найдена по формуле

$$\tilde{\rho}_{ij} = \frac{1}{m(m-1)S(\tilde{X}_1)S(\tilde{X}_j)} \sum_{k=1}^{m} (X_{ki} - \tilde{X}_i)(X_{kj} - \tilde{X}_j), \qquad (10.11)$$

где X_{ki}, X_{kj} – элементы выборки аргументов X_i и X_j; $S(\bar{X}_i)$, $S(\bar{X}_j)$ – оценки СКО средних арифметических результатов измерений аргументов X_i и X_j. Оценку коэффициента корреляции можно определить и по формуле

$$\tilde{\rho}_{ij} = \frac{1}{m(m-1)S(\tilde{X}_1)S(\tilde{X}_j)} \left[\sum_{k=1}^{m} X_{ki} X_{kj} - \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^{m} X_{ki} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} X_{kj} \right) \right] . \qquad (10.12)$$

Полезной может оказаться формула

$$\tilde{\rho}_{ij} = \frac{mk = \sum_{k=1}^{m} X_{ki} X_{kj} - \left(\sum_{k=1}^{m} X_{ki} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} X_{kj} \right)}{\sqrt{\left[m \sum_{k=1}^{m} X_{ki}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} X_{ki} \right)^2 \right] \left[m \sum_{k=1}^{m} X_{kj}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} X_{kj} \right)^2 \right]}} \qquad (10.13)$$

основным достоинством, которой является отсутствие необходимости предварительного вычисления СКО составляющих X_{ki} и X_{kj}. Следует отметить, что формулы (10.11)–(10.13) равнозначны.

В случае суммирования нормально распределенных случайных погрешностей результирующая погрешность измерения состоит из m случайных составляющих. Зная доверительную вероятность P и доверительный интервал Δ_1 для каждой составляющей погрешности, можно найти оценку СКО любой из них по формуле

$$S_i = \frac{\Delta}{z_{pi}} , \qquad (10.14)$$

где z_{pi} – квантиль нормального распределения, соответствующий доверительной вероятности P_i. Если значение P для всех составляющих одинаково, то, используя выражения (10.9) и (10.14), получаем:

а) для коррелированных составляющих ($p_{ij} = \pm 1$)

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2 \pm 2 \sum_{i<j}^{m} S_i S_j} = \sum_{i=1}^{m} \pm S_i = \frac{1}{z_p} \sum_{i=1}^{m} \pm \Delta_i , \qquad (10.15)$$

где знак «±» означает, что для составляющих с положительной корреляцией величины S_i и Δ_i нужно брать со знаком «+», а для составляющих с отрицательной корреляцией – со знаком «–»; б) для независимых составляющих ($P_{ij} = 0$)

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} S_i^2} = \frac{1}{z_p}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2}\ . \qquad (10.16)$$

При суммировании составляющих с нормальным законом распределения результирующая погрешность также будет распределена нормально. Поэтому доверительный интервал суммарной погрешности с доверительной вероятностью P может быть найден как

$$\Delta_{\Sigma} = z_p S_{\Sigma}\ . \qquad (10.17)$$

С учетом (10.15) и (10.16) выражение (10.17) принимает вид, соответственно для коррелированных и некоррелированных составляющих:

$$\Delta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{m} \pm \Delta_i\ ;\ \Delta_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2}\ . \qquad (10.18)$$

Суммирование погрешностей по первой формуле называется ***арифметическим***, а по второй – ***геометрическим***. Действительные значения коэффициентов корреляции по абсолютному значению могут находиться в пределах от нуля до единицы, поэтому арифметическое суммирование обычно дает завышенное значение суммарной погрешности, а геометрическое – заниженное, т.е. действительное значение находится в интервале между ними.

Закон распределения результирующей погрешности зависит от конкретных видов и характеристик законов распределения суммируемых составляющих. Исходя из этого для определения доверительного интервала суммарной погрешности необходимо в каждом конкретном случае по известным законам суммируемых составляющих установить методами теории вероятностей результирующий закон распределения. Зная его и соответственно квантильный множитель z_p, можно найти доверительный интервал суммарной погрешности по формуле (10.17).

10.4 Суммирование систематических и случайных погрешностей

При проведении многократных измерений случайная погрешность может быть уменьшена во много раз. Однако погрешность усредненного результата будет определяться не этой весьма малой случайной погрешностью, а не зависящей от числа усредняющих отсчетов систематической погрешностью.

Механизм суммирования систематической и случайной составляющих погрешности отличается от механизма суммирования случайных погрешностей.

Погрешность результата измерения в соответствии со стандартами определяется по следующим правилам. Если границы неисключенной систематической погрешности θ и оценка *СКО* результата измерения S связаны соотношением

$$\theta < 0{,}8S\ , \qquad (10.19)$$

то следует пренебречь систематической составляющей погрешности и учитывать только случайную погрешность результата. При этом доверительные границы погрешности результата $\Delta = t_P S$, где t_p – коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и числа проведенных измерений n. Если же имеет место неравенство

$$\theta > 8S\ , \qquad (10.20)$$

то, наоборот, следует пренебречь случайной составляющей и результат характеризовать лишь границами его суммарной систематической погрешности $\Delta = \theta$. Погрешность, возникающая из-за пренебрежения одной из составляющих погрешности, при выполнении указанных неравенств не превышает 15 %.

Числа 0,8 и 8 в стандарте никак не обосновываются. Однако если принять во внимание, что, как было показано ранее, $\Delta_{0,9} = 1{,}6S$, то условие (10.19) эквивалентно неравенству $\theta < \frac{\Delta_{0,9}}{2}$. Условие (10.20) эквивалентно неравенству $\theta > 5\Delta_{0,9}$. Следовательно, можно пренебрегать систематической составляющей и учитывать только случайную составляющую лишь тогда, когда она в 2 раза превышает систематическую. Если же случайная составляющая менее 1/5 систематической, ею можно пренебречь.

При невыполнении неравенств (10.19) и (10.20) границу суммарной погрешности следует находить путем композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматриваемых как случайные величины. Допускается границы погрешности результата измерений определять по формуле

$$\Delta = KS_{\Sigma} = \frac{t_p S + \theta}{S + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i^2}{3}}} S_{\Sigma}\ , \qquad (10.21)$$

где $S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \theta_i^2 / 3 + S^2}$ – оценка суммарного *СКО* суммарной погрешности.

Систематическая погрешность, присутствующая во всех отсчетах, не усредняется при статистической обработке. На рисунке 10.1 показаны истинное значение измеряемой величины x_u, границы систематической погрешности θ, распределение случайной составляющей погрешности $p(x)$. Из рисунка ясен механизм суммирования составляющих погрешности. Если систематическая составляющая постоянна, то ее модуль $|\theta|$ должен суммироваться с доверительным интервалом случайной составляющей t_pS, а отнюдь не с *СКО*.

Доверительный интервал суммарной погрешности $\Delta = 2(|\theta| + t_p S)$.

Из рисунка 10.1 становятся понятными рассмотренные выше условия, при которых можно пренебречь одной из составляющих суммарной погрешности. На рисунке 10.1,*а* показана ситуация, когда нельзя пренебречь ни одной из составляющих. На рисунке 10.1,*б* доверительный интервал случайной составляющей более чем в два раза больше систематической составляющей, и последней можно пренебречь. На рисунке 10.1,*в* систематическая составляющая превышает доверительный интервал случайной составляющей более чем в 5 раз, и ее также можно не учитывать при определении суммарной погрешности.

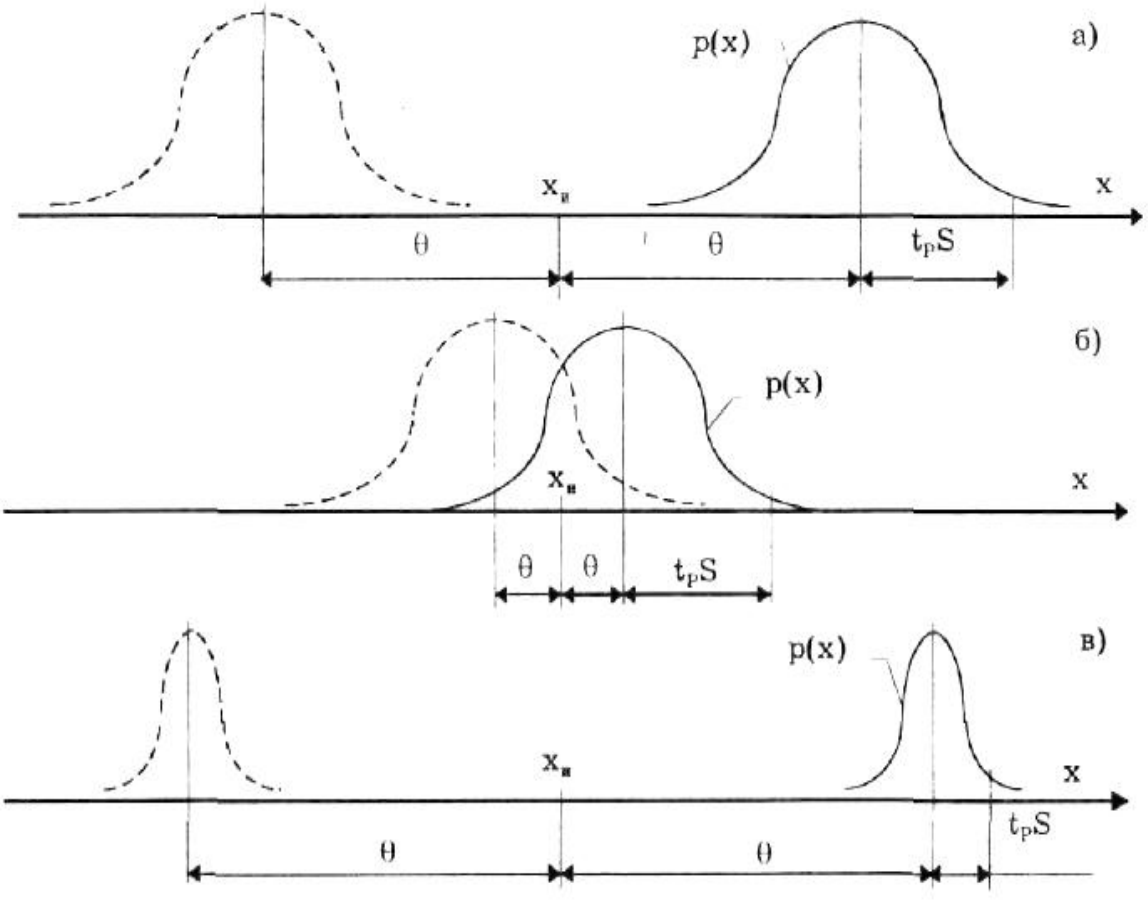

Рисунок 10.1 – Графическое представление систематической и случайной составляющих погрешности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1 Сытько, В.В. Теоретическая метрология. Часть I. Физические величины и их измерение / В.В. Сытько. – Мн.: БГУ, 1998.– 210 с.

2 Бурдун, Г.Д. Основы метрологии / Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков. – М.: Стандарты, 1985. – 265 с.

3 Шишкин, И.Ф. Теоретическая метрология / И. Ф. Шишкин – Л.: СЗПИ, 1983.– 84 с.

4 Измерения в электронике : справочник / под ред. В.А. Кузнецова. – М.: Энергоатомиздат, 1987.

5 Тойбер, П. Оценка точности результатов измерений / П. Тойбер. – М.: Энергоатомиздат, 1988.

6 Чертов, А.Г. Физические величины: терминология, определения, обозначения, размерности, единицы / А. Г. Чертов. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.

7 Хантли, Г. Анализ размерностей / Г. Хайтли. – М.: Мир, 1970. – 175 с.

8 Сергеев, А. Г. Метрология : учебное пособие / А. Г. Сергеев, В. В. Крохин. – М.: Логос, 2000.

9 Кузнецов, В. А. Основы метрологии : учебное пособие для вузов / В. А. Кузнецова, Г. А. Ялунина. – М.: Издательство стандартов, 1995.

10 Метрология, стандартизация и технические средства измерений / Д. Ф. Тартаковский, А. С. Ястребова. – М.: Высшая школа, 2002. – 208 с.

Учебное издание

Алешкевич Николай Александрович

Коваленко Дмитрий Леонидович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ ПО СПЕЦКУРСУ
для студентов специальности 1 – 31 04 01 03 «Физика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1 – 31 04 01 03 15 «Физическая метрология и автоматизация эксперимента»

В авторской редакции

Подписано в печать 16.06.2008 г. (136) Формат 60х84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура «Таймс». Усл.печ. л.2,7. Уч.- изд.л. 1,5. Тираж 50 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»,
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104