А.И. Чудакова (УО «ГГУ имени Ф. Скорины», Гомель)
Науч. рук. **Е.А. Дей**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА ЯЗЫКЕ С++ И РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При решении многих физических задач возникает необходимость вычисления определённых интегралов

$$I = \int_a^b y(x)dx. \tag{1}$$

Если подинтегральная функция *y(x)* имеет первообразную *Y(x)*, то такой интеграл вычисляется точно по формуле Ньютона-Лейбница *I* = *Y(b)* – *Y(a)*. Если функция *y(x)* не имеет первообразной или задана таблицей значений, то интегралы находятся численными методами [1], в которых результат выражается через значения функции в отдельных точках (узлах), выбранных в области интегрирования [a, b]. В ряде методов используется равномерное разбиение области на n отрезков с шагом $h = (b-a)/n$ точками (узлами) $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0..n$ и приближение функции полиномом некоторого порядка.

В методе центральных прямоугольников на каждом отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевого порядка, равным значению функции в центре отрезка. Квадратурная формула центральных прямоугольников имеет вид

$$\int_a^b y(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y(x_i - h/2). \tag{2}$$

В методе трапеций подынтегральная функция приближенно описывается линейной функцией, т.е. полиномом первого порядка. Формула трапеций записывается следующим образом:

$$\int_a^b y(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \tag{3}$$

В методе парабол (Симпсона) на каждой паре смежных отрезков подынтегральная функция приближенно описывается полиномом второго порядка, что дает квадратурную формулу [2]

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k}\right),$$

которую для программирования удобнее записать в виде (n – четное)

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + \sum_{i=1}^{n-1} (3+(-1)^{i+1})\, y_i \right). \tag{4}$$

Рассмотренные квадратурные формулы были реализованы на языке C++ [3] в виде программы с графическим интерфейсом в среде программирования Visual Studio 2015.

Все компоненты программы находятся на форме Form1. В верхней части формы находится компонент RadioGroup, позволяющий выбирать метод расчёта интеграла. Ниже – компоненты Edit1, Edit2, Edit3, задающие начальное и конечное значение x и количество разбиений отрезка. При нажатии кнопки «Очистить» происходит очистка полей вывода и ввода начальных данных.

На рисунке 1 приведен пример работы программы при вычислении тестового интеграла от функции $y(x) = \exp(2x)$ методом парабол.

На экран выводится численное значение интеграла, точное значение $\int_0^1 e^{2x} dx = 3{,}19452804947$ и погрешность численного результата.

Для получения информации о свойствах численных методов интегрирования тестовые расчеты выполнялись при минимальном числе разбиений $n = 10$ и при максимальном числе разбиений $n = 1000$. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

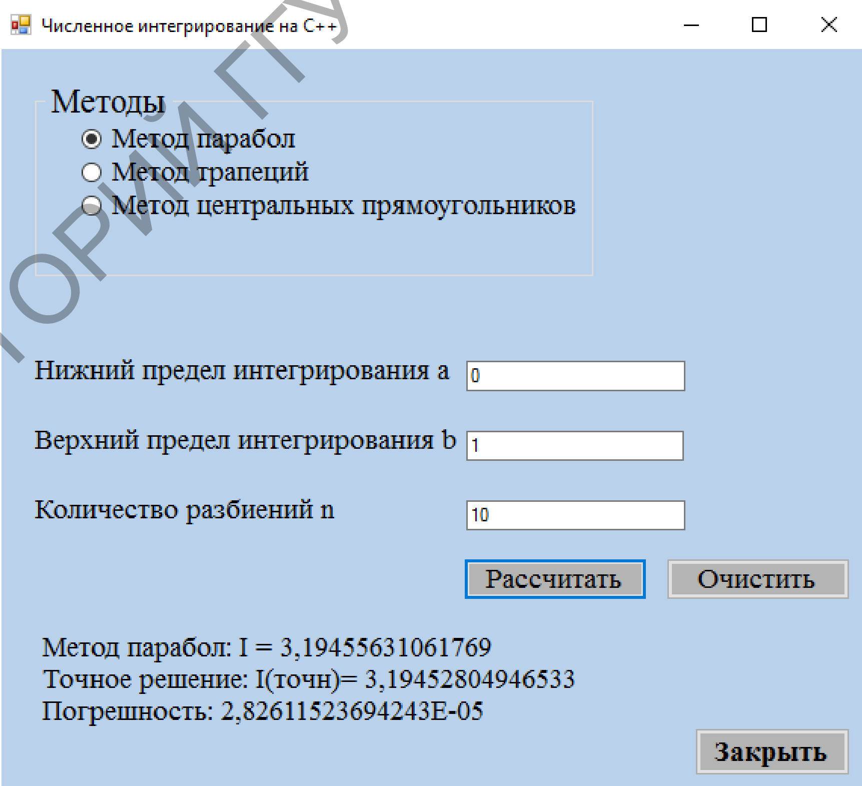


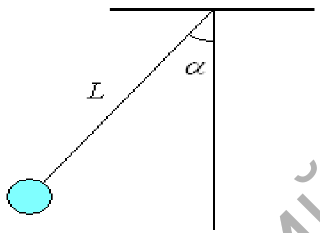
Рисунок 1 – Рабочее окно программы

По таблице видно, что наиболее точным методом при минимальном количестве разбиений отрезка [a, b] является метод парабол. Также можно отметить, что погрешность метода центральных прямоугольников вдвое меньше погрешности метода трапеций.

Таблица 1 – Результаты тестовых вычислений

Метод	Количество разбиений	Погрешность	Количество разбиений	Погрешность
Парабол	$n=10$	$2.83\cdot10^{-5}$	$n=1\,000$	$2.82\cdot10^{-13}$
Трапеций		0.02		$1.06\cdot10^{-6}$
Центральных прямоугольников		0.01		$5.32\cdot10^{-7}$

Созданная программа была использована для решения следующей задачи [4,5]. Плоский математический маятник (точка с массой m, подвешенная на нити длины L в поле силы тяжести) при максимальном отклонении от вертикали на угол α (рисунок 2) имеет период колебания $T=4K\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, где g – ускорение силы тяжести, а множитель K есть значение определенного интеграла (полный эллиптический интеграл первого рода [4])



$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}. \qquad (5)$$

Рисунок 2 – Математический маятник и определенный интеграл K

При малых углах α интеграл K приближенно равен $\pi/2$, так что в этом случае приближенно $T=2\pi\sqrt{L/g}$. Маятник, для которого $\pi\sqrt{L/g}=1$, называется секундным маятником, так как для такого маятника при малых α половина периода колебания как раз равняется одной секунде [5]. Половина периода колебания секундного маятника при любом размахе α дается формулой $T/2=(2/\pi)K$. Вычислим с помощью составленной программы интеграл для K при $\alpha=\pi/36$; $\pi/18$; $\pi/9$; $\pi/4$. Использован метод парабол, поскольку он имеет наибольшую точность.

Таблица 2 – Значения интеграла K для различных углов отклонения

α	$\pi/36$	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/4$
K	2.001	2.005	2.018	2.096

Полученные результаты показывают, что точность колебаний маятника сохраняется только для малых углов отклонения от вертикали, сопоставимых с величиной $\alpha = \pi / 36 = 5^\circ$.

Таким образом, практическое применение методов численного интегрирования показывает, что они позволяют решать сложные задачи физики и математики. Погрешность численного результата зависит от выбора метода интегрирования и количества отрезков, на которые разбивается область интегрирования.

Результаты работы могут быть использованы при решении других физических задач, требующих вычисления определенных интегралов.

Литература

1. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование и фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 580 с.
2. Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / под ред. проф. Л.Г. Гагариной / В.Д. Колдаев. – М. : ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2009. – 336 с.
3. Лафоре, Р. Объектно-ориентированное программирование в С++. 4-е издание / Р. Лафорею – СПб. : Питер, 2006. – 928 с.
4. Ландау, Л.Д. Теоретичекая физика. – в 10-ти т. − т. 1. Механика / Л.Д Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
5. Коллатц, Л. Задачи по прикладной математике / Л. Коллатц, Ю. Альбрехт. – М. : Мир, 1978. – 168 с.

А.А. Шамына (УО «ГГУ имени Ф. Скорины», Гомель)
Науч. рук. **В.Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ГЕНЕРАЦИЯ СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ GNLRGD

Введение. Нелинейные оптические эффекты второго порядка уже длительное время используются для исследования свойств поверхностей. Это обусловлено тем, что в центросимметричных средах сигнал второй и суммарной гармоники наблюдается преимущественно от границ раздела. На практике это явление уже было применено для исследования свойств поверхностей наночастиц, биополимеров, мембран биологических клеток, молекул ДНК, адсорбированных поверхностно активных веществ и молекул красителя [1].

Постановка задачи. Введём декартову систему координат. Направим ось *Oz* вдоль оси цилиндрической частицы, боковая