

Полученные результаты показывают, что точность колебаний маятника сохраняется только для малых углов отклонения от вертикали, сопоставимых с величиной  $\alpha = \pi / 36 = 5^\circ$ .

Таким образом, практическое применение методов численного интегрирования показывает, что они позволяют решать сложные задачи физики и математики. Погрешность численного результата зависит от выбора метода интегрирования и количества отрезков, на которые разбивается область интегрирования.

Результаты работы могут быть использованы при решении других физических задач, требующих вычисления определенных интегралов.

### Литература

1. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование и фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 580 с.
2. Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / под ред. проф. Л.Г. Гагариной / В.Д. Колдаев. – М. : ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2009. – 336 с.
3. Лафоре, Р. Объектно-ориентированное программирование в C++. 4-е издание / Р. Лафорею – СПб. : Питер, 2006. – 928 с.
4. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. – в 10-ти т. – т. 1. Механика / Л.Д Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
5. Коллатц, Л. Задачи по прикладной математике / Л. Коллатц, Ю. Альбрехт. – М. : Мир, 1978. – 168 с.

**А.А. Шамына** (УО «ГГУ имени Ф. Скорины», Гомель)  
Науч. рук. **В.Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

### ГЕНЕРАЦИЯ СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ GNLRGD

**Введение.** Нелинейные оптические эффекты второго порядка уже длительное время используются для исследования свойств поверхностей. Это обусловлено тем, что в центросимметричных средах сигнал второй и суммарной гармоникой наблюдается преимущественно от границ раздела. На практике это явление уже было применено для исследования свойств поверхностей наночастиц, биополимеров, мембран биологических клеток, молекул ДНК, адсорбированных поверхностно активных веществ и молекул красителя [1].

**Постановка задачи.** Введём декартову систему координат. Направим ось  $Oz$  вдоль оси цилиндрической частицы, боковая

поверхность которой покрыта оптически нелинейным слоем. Начало координат пусть находится в геометрическом центре частицы. Тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка для слоя выберем в общем виде, характерном для классов симметрии  $C_4$ ,  $C_6$  одноосных кристаллов [2]:

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^2 = & \chi_1^2 n_i n_j n_k + \chi_2^2 n_i \delta_{jk} + \chi_3^2 n_j \delta_{ki} + \chi_4^2 n_k \delta_{ij} + \\ & + \chi_5^2 n_m n_i \varepsilon_{mjk} + \chi_6^2 n_m n_k \varepsilon_{ijm} + \chi_7^2 n_m n_j \varepsilon_{imk}, \end{aligned} \quad (1)$$

где коэффициенты анизотропии  $\chi_{1-7}^2$  характеризуют нелинейные свойства слоя. Пусть две падающие на частицу плоские электромагнитные волны задаются уравнениями напряжённостей их электрических полей:

$$\mathbf{E}^1 \mathbf{x} = E_1 \mathbf{e}^1 \exp i \mathbf{k}^1 \mathbf{x}, \quad \mathbf{E}^2 \mathbf{x} = E_2 \mathbf{e}^2 \exp i \mathbf{k}^2 \mathbf{x}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}^{1-2}$  характеризуют поляризацию (в общем случае эллиптическую),  $\mathbf{k}^{1-2}$  – это волновые векторы падающих волн,  $E_{1-2}$  – это комплексные амплитуды напряжённости. Схема задачи изображена на рисунке 1.

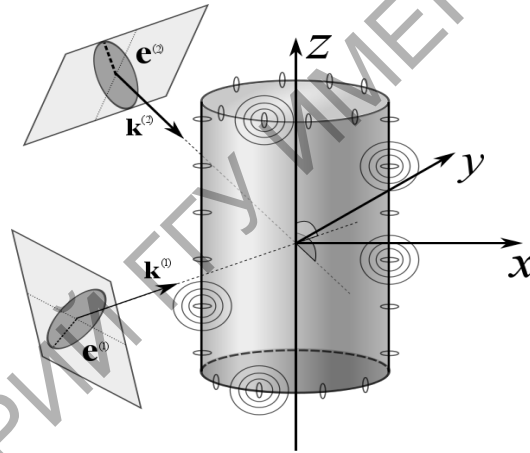


Рисунок 1 – Схема задачи о генерации суммарной частоты от боковой поверхности цилиндрической частицы

В приближении gNLRGD рассеяние на границах раздела не учитывается. Это позволяет найти поле суммарной частоты в дальней зоне методом функции Грина (используется правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$\begin{aligned} E_{lat,i}^{12} \mathbf{x} = & \mu_{12} \omega_{12}^2 / c^2 \left[ \exp i k_{12} r / r \right] E_1 E_2 \times \\ & \times \delta_{im} - e_{r,i} e_{r,m} e_j^1 e_k^2 \int_V \exp i \mathbf{q} \mathbf{x}' \chi_{mjk}^2 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{x}', \end{aligned} \quad (3)$$

где  $e_{r,i}$  – это компоненты единичного вектора сферической системы координат,  $\delta_{im}$  – это символ Кронекера,  $k_{12} = \frac{\omega_{12}}{c} \sqrt{\varepsilon_{12} \mu_{12}}$  – модуль

волнового вектора гармоники суммарной частоты,  $\varepsilon_{12}, \mu_{12}$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости на суммарной частоте  $\omega_{12}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}^1 + \mathbf{k}^2 - \mathbf{k}^{12}$  – вектор рассеяния,  $\mathbf{k}^{12}$  – волновой вектор гармоники суммарной частоты, а интегрирование ведётся по всему объёму нелинейного слоя толщиной  $d_0 \ll a, d_0 \ll h$ , где  $a, h$  – это радиус основания и высота цилиндрической частицы соответственно.

**Решение.** Нахождение (3) требует подстановки (1) в (3) и вычисления нескольких интегралов. В результате получим выражение для напряжённости электрического поля гармоники суммарной частоты:

$$\mathbf{E}_{lat}^{12}(\mathbf{x}) = 2\pi\mu_{12} \frac{\omega_{12}^2}{c^2} \frac{\exp ik_{12}r}{r} d_0 ah E_1 E_2 (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{f}_{lat}^{12}, \quad (4)$$

где вспомогательный вектор  $\mathbf{f}_{lat}^{12}$  характеризует пространственное распределение поля суммарной частоты и задаётся формулой, в которой  $J_m z$  – цилиндрические функции Бесселя порядка  $m$ ,  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $Oz$ , а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль составляющей вектора рассеяния, перпендикулярной оси  $Oz$ , то есть вдоль  $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{q} - \mathbf{e}_z (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_z)$ ,  $q_\perp = |\mathbf{q}_\perp|$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{lat}^{(12)} = & \frac{\sin(q_\parallel h/2)}{q_\parallel h/2} \left[ i\chi_1^{(2)} \left( -J_3(q_\perp a) \mathbf{n}(\mathbf{ne}^{(1)}) (\mathbf{ne}^{(2)}) + \right. \right. \\ & \frac{1}{4} (J_1(q_\perp a) + J_3(q_\perp a)) \left\{ \mathbf{n} \left[ (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) - (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}_z) (\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}_z) \right] + \right. \\ & \left. \left. + (\mathbf{ne}^{(1)}) \left[ \mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \mathbf{e}^{(2)}) \right] + (\mathbf{ne}^{(2)}) \left[ \mathbf{e}^{(1)} - \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \mathbf{e}^{(1)}) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + iJ_1(q_\perp a) \left[ \chi_2^{(2)} \mathbf{n}(\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)}) + \chi_3^{(2)} \mathbf{e}^{(2)} (\mathbf{ne}^{(1)}) + \chi_4^{(2)} \mathbf{e}^{(1)} (\mathbf{ne}^{(2)}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (J_0(q_\perp a) + J_2(q_\perp a)) (\chi_5^{(2)} + \chi_6^{(2)} + \chi_7^{(2)}) \left[ \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (J_0(q_\perp a) + J_2(q_\perp a)) (\chi_5^{(2)} \mathbf{e}_z \left[ \mathbf{e}_z \left[ \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)} \right] \right] + \right. \\ & \left. \chi_6^{(2)} \left[ \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}_z \right] (\mathbf{e}_z \mathbf{e}^{(2)}) + \chi_7^{(2)} \left[ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}^{(2)} \right] (\mathbf{e}_z \mathbf{e}^{(1)}) \right) - \\ & \left. - J_2(q_\perp a) (\chi_5^{(2)} \mathbf{n}(\mathbf{n} \left[ \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)} \right])) + \chi_6^{(2)} \left[ \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{n} \right] (\mathbf{ne}^{(2)}) + \right. \\ & \left. + \chi_7^{(2)} \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{e}^{(2)} \right] (\mathbf{ne}^{(1)}) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

Полученное решение обладает некоторыми свойствами симметрии. Например, если произвести следующие замены

$$\mathbf{k}^1 \leftrightarrow \mathbf{k}^2, \mathbf{e}^1 \leftrightarrow \mathbf{e}^2, \chi_3^2 \leftrightarrow \chi_4^2, \chi_5^2 \rightarrow -\chi_5^2, \quad (6)$$

$$\chi_6^2 \rightarrow -\chi_7^2, \chi_7^2 \rightarrow -\chi_6^2,$$

то выражение для вектора  $\mathbf{f}_{lat}^{12}$   $\theta, \varphi$  останется тем же.

**Заключение.** Получение явного вида поля суммарной частоты позволит обнаружить новые закономерности в пространственном распределении генерируемого излучения, а также привести к новым методам оценки коэффициентов анизотропии посредством анализа трёхмерных диаграмм направленности.

### Литература

1. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, T. Hansson // Physical Review A. – 2010. V. 81. – P. 053850.

2. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен; пер. с англ.; под ред. С.А. Ахманова. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1989. – 558 с.

**А.В. Шилов** (УО «МГУ имени А.А. Кулешова», Могилев)  
Науч. рук. **А.Б. Сотский**, д-р физ.-мат. наук, профессор

### МОДОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МУЛЬТИКАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛОКОН ДЛЯ ТГц ДИАПАЗОНА ЧАСТОТ

В силу существенного поглощения электромагнитного излучения терагерцового (ТГц) диапазона всеми известными материалами (за исключением воздуха) создание направляющих его волноводов составляет непростую задачу. К настоящему времени предложен ряд конфигураций волноводов ТГц диапазона. Их общим недостатком является значительное затухание передаваемого сигнала. Наиболее перспективными в плане минимизации этого затухания считаются полимерные волноводы с полый сердцевинной. В них энергия передаваемого излучения локализуется в сердцевине за счет его отражений от оболочки, представляющей собой двумерный фотонный кристалл. Актуальным является исследование возможностей оптимизации структуры поперечного сечения таких волноводов. В настоящем докладе под этим углом зрения анализируются модовые характеристики волокон в виде колец различного числа капилляров.

Исследование данного типа волокон представляет сложную дифракционную задачу. Для её решения применен строгий метод функций Грина [1]. На рисунке 1 приведены поля основных мод волокон.