УДК 519.248

П. Б. Стоцко

АНАЛИЗ ДОХОДНОСТЕЙ ЦЕННЫХ БУМАГ И ИХ ПОРТФЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ

В статье рассматриваются алгоритмы построения факторных моделей доходностей рисковых активов рынка ценных бумаг, построение модели расчёта основных характеристик портфеля ценных бумаг на основе однофакторных, двухфакторных, трёхфакторных моделей. В качестве факторов выступают индексы фондового рынка. На основании изложенных формул расчетов были построены факторные модели для котировок акций ОАО «Газпром», «ОАО Лукойл», «ОАО Сбербанк России» на основании значений индекса RTS, RGBI и MICEX за период времени с 19.03.2014 по 17.04.2014. Произведен расчет характеристик портфелей, сформированных из данных активов.

Количественные методы анализа финансовых активов основаны на использовании наблюдаемых значений характеристик активов (цен, доходностей, дивидендов, фондовых индексов) то есть эмпирических данных для оценки и прогнозирования ожидаемой доходности и риска активов, а также принятия обоснованных инвестиционных решений.

Анализ эмпирических значений характеристик активов свидетельствует о том, что они подвержены нерегулярным и, на первый взгляд непредсказуемым, случайным изменениям. По этой причине инвестор может дать лишь некоторые предположения относительно будущих значений анализируемых характеристик, но никогда не знает их точно. Традиционных «детерминированных» методов финансовой математики оказывается недостаточно для решения задач финансовых активов в условиях неопределённости. В частности, они не учитывают существующего в условиях неопределённости риска того, что фактическая доходность операции покупки или продажи ценной бумаги может отличаться от той, что ожидается в момент совершения операции. Для исследования процессов, которые имеют статистическую природу и в то же время обладают свойством устойчивости частот наступления тех или иных событий, целесообразно использовать вероятностный подход.

В рамках вероятностного подхода предположения инвестора основываются на оценке вероятностей характеристик финансовых активов в соответствии с определёнными вероятностными моделями. При этом сами характеристики рассматриваются как случайные величины, подчиняющиеся определённым законам распределения вероятностей. Таким образом, понятие «неопределённость» в рамках данного подхода заменятся понятием «случайность». Вероятностный подход позволяет использовать для описания характеристик активов характеристики случайных величин, а для их анализа – хорошо развитый аппарат теории вероятности и математической статистики. Подход к анализу финансового рынка, основанный на применении вероятностно-статистических моделей и методов, принято называть количественным анализом финансового рынка. Портфельное инвестирование позволяет планировать, оценивать, контролировать конечные результаты всей инвестиционной деятельности в различных секторах фондового рынка [1–4].

Как правило, портфель представляет собой определенный набор из корпоративных акций, облигаций с различной степенью обеспечения и риска, а также бумаг с фиксированным доходом, гарантированным государством, то есть с минимальным риском потерь по основной сумме и текущим поступлениям. Портфель ценных бумаг – набор реальных или финансовых инвестиций. В узком смысле это совокупность ценных бумаг разного вида, разного срока действия и разной степени ликвидности, принадлежащая одному инвестору и управляемая как единое целое. Теоретически портфель может состоять из бумаг одного вида, а также менять свою структуру путем замещения одних бумаг другими. Основная задача портфельного инвестирования – улучшить условия инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги, и возможны только при их комбинации. Только в процессе формирования портфеля достигается новое инвестиционное качество с заданными характеристиками. Таким образом, портфель ценных бумаг является тем инструментом, с помощью которого инвестору обеспечивается требуемая устойчивость дохода при минимальном риске.

Предположим, что доходность так называемого индексного, или эталонного, портфеля R_{it} за период t (например, месяц, квартал и т.д.) связана с доходностью некоторого актива R_{it} за тот же период моделью вида:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{it} + \varepsilon_{it} \; (I = 1, 2, \dots N, t = 1, 2, \dots, T),$$

где α_i – свободный член,

β_i – коэффициент однофакторной модели,

ε_{it} – случайные отклонения доходностей активов от ожидаемых.

В качестве доходностей индексного портфеля, называемой также доходностью на рыночный индекс, R_{it} может использоваться темп прироста некоторого рыночного актива.

Используя метод наименьших квадратов находятся коэффициенты факторных моделей:

$$\alpha_i = \hat{\mu}_i - \beta_i * \hat{\mu}_I,$$

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \hat{\mu}_i)(R_{It} - \hat{\mu}_I)}{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \hat{\mu}_i)^2},$$

где

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{1t}, \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{2t} \qquad \hat{\mu}_I = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{It},$$

а оценки параметров $\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_{Ii}, \psi_i^2$ вычисляются по формулам:

$$\hat{\sigma}_I^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{It} - \hat{\mu}_I)^2,$$

Анализ адекватности построенной однофакторной модели осуществляется с помощью методов статистической проверки гипотез о значимости параметров, а также на основе анализа свойств остатков.

Найденные статистические оценки параметров (при условии адекватности соответствующей однофакторной модели) используются далее для вычисления искомых характеристик ценных бумаг. Ожидаемой доходности и ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг, которые находятся по формулам:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i * \mu_{I1},$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_{I1}^2 + \psi_i^2,$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i * \beta_j * \sigma_i^2, i \neq j.$$

Предположим, что доходность так называемого индексного, или эталонного, портфеля R_{it} за период t (например, месяц, квартал и т.д.) связана с доходностью некоторых активов R_{It} за тот же период двухфакторной моделью вида:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i * R_{1t} + \gamma_i * R_{2t} + \varepsilon_{it}, (i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2, \dots, T),$$

где α_i – свободный член,

β_i, γ_i – коэффициенты двухфакторной модели,

ε_{it} – случайные отклонения доходностей активов от ожидаемых.

Используя метод наименьших квадратов, находятся коэффициенты факторных моделей:

$$\alpha_i = \widetilde{\mu_i} - \beta_i * \widetilde{\mu_{I_1}} - \gamma_i * \widetilde{\mu_{I_2}},$$

$$\widetilde{\beta_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{1t} - \widetilde{\mu_i})(R_{It} - \widetilde{\mu_I})}{\sum_{t=1}^{T}(R_{1t} - \widetilde{\mu_i})^2},$$

где

$$\widetilde{\mu_1} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{1t}, \qquad \widetilde{\mu_2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{2t} \qquad \widetilde{\mu_I} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{It},$$

а оценки параметров $\widetilde{\sigma_I}^2, \widetilde{\sigma_{Ii}}, \psi_i^2$ вычисляются по формулам:

$$\widetilde{\sigma_I}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{It} - \widetilde{\mu_I})^2,$$

Анализ адекватности построенной двухфакторной модели осуществляется с помощью методов статистической проверки гипотез о значимости параметров, а также на основе анализа свойств остатков.

Найденные статистические оценки параметров (при условии адекватности соответствующей двухфакторной модели) используются далее для вычисления искомых характеристик ценных бумаг. Ожидаемой доходности и ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг, которые находятся по формулам:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i * \mu_{I_1},$$
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_{I_1}^2 + \psi_i^2,$$
$$\sigma_{ij} = \beta_i * \beta_j * \sigma_i^2, i \neq j.$$

Аналогично для трёхфакторных моделей находится общий вид. Предположим, что доходность так называемого индексного, или эталонного, портфеля R_{it} за период *t* (например, месяц, квартал и т.д.) связана с доходностью некоторых активов R_{It} за тот же период моделью вида:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i * R_{1t} + \gamma_i * R_{2t} + \delta_i * R_{3t} + \varepsilon_{it}, (i = 1, 2, \ldots, N, t = 1, 2, \ldots, T)$$

где $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i\}$ - параметры модели: α_i - свободный член, $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ - коэффициенты трёхфакторной модели, ε_{it} – . случайные отклонения доходностей активов от ожидаемых

Используя метод наименьших квадратов находятся коэффициенты факторных моделей:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_{I_1}, R_{it})}{D(R_{it})},$$
$$\gamma_i = \frac{Cov(R_{I_2}, R_{it})}{D(R_{it})},$$
$$\delta_i = \frac{Cov(R_{I_3}, R_{it})}{D(R_{it})}.$$

При сделанных предположениях относительно $\{\varepsilon_{it}\}$ оценки параметров $\{\alpha_i, \beta_i$ и $\gamma_i\}$ по методу наименьших квадратов имеют вид:

$$\alpha_i = \tilde{\mu}_i - \beta_i * \tilde{\mu}_{I_1} - \gamma_i * \tilde{\mu}_{I_2} - \delta_i * \tilde{\mu}_{I_3},$$

$$\tilde{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{1t} - \tilde{\mu}_i)(R_{It} - \tilde{\mu}_I)}{\sum_{t=1}^{T}(R_{1t} - \tilde{\mu}_i)^2},$$

где

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{1t}, \tilde{\mu}_2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{2t} \ \tilde{\mu}_3 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{3t} \ \tilde{\mu}_I = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{It},$$

Анализ адекватности построенной двухфакторной модели осуществляется с помощью методов статистической проверки гипотез о значимости параметров, а также на основе анализа свойств остатков.

Найденные статистические оценки параметров (при условии адекватности соответствующей двухфакторной модели) используются далее для вычисления искомых характеристик ценных бумаг. Ожидаемой доходности и ковариационной матрицы доходностей ценных бумаг, которые находятся по формулам:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i * \mu_{I_1} + \gamma_i * \mu_{I_2} + \delta_i * \mu_{I_3},$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_{I_1}^2 + \gamma_i^2 * \sigma_{I_2}^2 + \delta_i^2 * \sigma_{I_3}^2 + \psi_i^2,$$

$$\sigma_{\downarrow} Ii = Cov(R_{\downarrow} It, R_{\downarrow} it) = M((\alpha_{\downarrow} i + \beta_{\downarrow} i * I_{\downarrow} 1 + \gamma_{\downarrow} i * I_{\downarrow} 2 + \delta_{\downarrow} i * I_{\downarrow} 3)(\alpha_{\downarrow} j + \beta_{\downarrow} j * I_{\downarrow} 1 + \gamma_{\downarrow} j * I_{\downarrow} 2 +$$

$$* cov(I_1, I_2) + \left(\beta_i * \delta_j + \beta_j * \delta_i\right) * cov(I_1, I_3) + \left(\gamma_i * \delta_j + \gamma_j * \delta_i\right) * cov(I_2, I_3)$$

На основании изложенных формул расчетов были построены факторные модели для котировок акций ОАО «Газпром», «ОАО Лукойл», «ОАО Сбербанк России» на основании значений индекса RTS, RGBI и MICEX за период времени с 19.03.2014 по 17.04.2014. Значение цены акции были взяты по цене закрытия (цена на момент окончания торгов за каждый день). Данные были взяты с сайта http://moex.com [5].

Произведен расчет характеристик портфелей, сформированных из данных активов.

Литература

1 Малюгин, В. И. Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа / В. И. Малюгин – Мн.: БГУ, 2001. – 318 с.

2 Буренин, А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов / А.Н. Буренин. – М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. – 352 с.

3 Мельников, А. В. Математические методы финансового анализа / А. В. Мельников, Н. В. Попова, В. С. Скорнякова. – М.:"Анкил", 2006. – 440 с.

4 Люу, Ю. -Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю. -Д. Люу. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.

4 MOEX. Московская биржа «Московская фондовая биржа» [Электронный ресурс] / http:/www.moex.com/ru/ – Дата доступа 04.05.2014.

УДК 53(077)

Д. А. Халецкая