А.В. Павленко (ГГУ имени Ф.Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В.Ф. Шолох**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Оператор Лапласа находит широкое применение в различных задачах физики. Однако, при вычислении результатов его действия на скалярную $U(q^i)$ и векторную $\vec{a}(q^i)$ функции в криволинейных координатах обычно используют известные формулы векторного анализа [1; 2]

$$\Delta U(q^i) = divgrad\, U(q^i) \quad \text{и} \quad \Delta\vec{a}(q^i) = graddiv\vec{a}(q^i) - rotrot\vec{a}(q^i). \qquad (1)$$

Такой подход фактически сводит вычисление искомых результатов к дифференциальным операциям теории поля и не использует явный вид оператора Лапласа в криволинейных координатах. Представляет определенный интерес получить явный вид оператора Лапласа в криволинейных координатах исходя из его формального определения

$$\Delta = \vec{\nabla}\vec{\nabla}, \qquad (2)$$

где $\vec{\nabla}$ – оператор Гамильтона (набла).

Учитывая, что оператор набла является вектором, запишем его в виде $\vec{\nabla} = \vec{e}^{\,i}\dfrac{\partial}{\partial q^i}$. Напомним, что в приведенном выражении по одинаковым (немым) индексам как обычно предполагается суммирование. Тогда, согласно (2), имеем

$$\Delta = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = (\vec{e}^{\,i}\frac{\partial}{\partial q^i})(\vec{e}^{\,j}\frac{\partial}{\partial q^j}) = g^{ik}\vec{e}_k\frac{\partial}{\partial q^i}(\vec{e}^{\,j}\frac{\partial}{\partial q^j}) =$$

$$= g^{ik}\vec{e}_k\frac{\partial\vec{e}^{\,j}}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j} + g^{ik}\vec{e}_k\vec{e}^{\,j}\frac{\partial^2}{\partial q^i\partial q^j} = g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial q^i\partial q^j} + g^{ik}\vec{e}_k\frac{\partial\vec{e}^{\,j}}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j}. \qquad (3)$$

При выводе выражения (3) было использовано условие ортогональности векторов взаимных базисов

$$\vec{e}^{\,i}\vec{e}_j = \delta^i_j,$$

где δ^i_j – символ Кронекера.

Из того же условия нетрудно получить, что

$$\frac{\partial\vec{e}^{\,j}}{\partial q^i} = -\Gamma^j_{ik}\vec{e}^{\,k}, \qquad (4)$$

где Γ^j_{ik} – символы Кристоффеля 2-го рода.

Тогда, с учетом (4), выражение (3) принимает вид

$$\Delta = g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j} - g^{ik}\vec{e}_k\,\Gamma^j_{is}\vec{e}^{\,s}\frac{\partial}{\partial q^j} = g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j} - g^{is}\,\Gamma^j_{is}\frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Отсюда, используя свойство немых индексов, окончательно получаем

$$\Delta = g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma^s_{ij}\frac{\partial}{\partial q^s}\right). \tag{5}$$

Выражение (5) позволяет записать оператор Лапласа в любых, как ортогональных, так и неортогональных, криволинейных координатах.

В качестве примера получим выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах $(q^1 = \rho; q^2 = \varphi; q^3 = z)$. Отличные от нуля компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля 2-го рода равны:

$$g^{11} = g^{33} = 1,\quad g^{22} = \frac{1}{\rho^2};\qquad \Gamma^1_{22} = -\rho,\quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho}.$$

Тогда, согласно (5), получаем

$$\Delta = g^{11}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + g^{22}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + g^{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - g^{11}\Gamma^j_{11}\frac{\partial}{\partial q^j} - g^{22}\,\Gamma^j_{22}\frac{\partial}{\partial q^j} - g^{33}$$

$$\Gamma^j_{33}\frac{\partial}{\partial q^j} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho^2}\Gamma^1_{22}\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}. \tag{6}$$

Отметим, что выражение (6) совпадает с известным [2].

В качестве еще одного примера получим выражение оператора Лапласа в обобщенных полярных координатах $(q^1 = r; q^2 = \varphi)$, связанных с декартовыми соотношениями

$$x = ar\cos\varphi,\quad y = br\sin\varphi\qquad (a > 0; b > 0; a \neq b).$$

Особенностью этих координат является их неортогональность.

Вычисленные метрические тензоры имеют вид:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi & (b^2 - a^2)r\sin\varphi\cos\varphi \\ (b^2 - a^2)r\sin\varphi\cos\varphi & r^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^2b^2} & \dfrac{(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2b^2r} \\ \dfrac{(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2b^2r} & \dfrac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2b^2r^2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) позволяют стандартным способом вычислить символы Кристоффеля. Отличные от нуля символы Кристоффеля 2-го рода равны:

$$\Gamma^1_{22} = -r;\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)\sin 2\varphi;\ \ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}.$$

Тогда из (5), аналогично рассмотренному выше примеру, находим

$$\Delta = \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{a^2 b^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{a^2 b^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) -$$

$$-\frac{(b^2 - a^2)\sin 2\varphi}{a^2 b^2 r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 b^2}(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right).$$

Отсюда, при $a = b = 1$ (полярная система координат), получаем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

Что совпадает с известным выражением [1,2], а также с результатом (6) при $\rho = r$ и $z = 0$.

Литература

1. Болсун, А. И. Методы математической физики: учеб. пособие/ А.И. Болсун, В.К. Гронский, А.А. Бейда. – Мн.: Высш. шк., 1988. – 199 с.

2. Димитриенко, Ю. И. Тензорное исчисление: учеб. пособие/ Ю.И. Димитриенко. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.

А.С. Парахневич (ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)

Науч. рук. **О.М. Дерюжкова**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ДАННЫЕ О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЯДРА ЦЕЗИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ РЕЛЯЦИОННЫХ БАЗ ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ НИИЯФ МГУ

Важной задачей изучения характеристик атомных ядер и ядерных реакций является разработка методов комбинированного анализа различных экспериментов и оценка систематических погрешностей. Такая задача требует для своего решения одновременного доступа к результатам различных экспериментов, т.е. к базам экспериментальных данных. Базы данных (БД) являются основой для детального и системного анализа накопленной информации.