А.И. Толкачёв (ГГУ имени Ф.Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В.Н. Капшай,** канд. физ.-мат. наук, доцент

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ОТ ТОНКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ ИСТОЧНИКОВ

Изучение свойств малых частиц возможно с помощью явления генерации второй гармоники. Но регистрируемые поля второй гармоники от объема частицы являются слабыми. Поэтому исследуемые частицы покрывают материалами, обладающими оптическими нелинейными свойствами [1, 2], которые хорошо изучены экспериментально [2] на явлении генерации второй гармоники.

Наиболее простой и вместе с тем достаточно общей моделью для описания исследуемых явлений является модель Рэлея–Ганса–Дебая. В ней предполагается, что рассеяние вносит малый вклад в результирующее поле первой гармоники и им можно пренебречь. Условием применимости этой модели является выполнение следующих критериев:

$$\left|\frac{n_p}{n_m}-1\right|<<1, \qquad 4\pi\frac{R}{\lambda}\left|\frac{n_p}{n_m}-1\right|<<1, \quad (1)$$

где n_p и n_m – показатели преломления сферической частицы и окружающей среды соответственно, R – радиус частицы, λ – длина волны падающего излучения.

В дипольной модели генерации второй гармоники, созданное поле обусловлено нелинейной частью поляризации, компоненты которой имеют вид

$$P_i^{(2)}=\chi_{ijk}^{(2)}\left[E_j^{(1)}E_k^{(1)}+E_j^{(2)}E_k^{(2)}+E_j^{(1)}E_k^{(2)}+E_j^{(2)}E_k^{(1)}\right]=\chi_{ijk}^{(2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}E_j^{(\alpha)}E_k^{(\beta)}, \quad (2)$$

где $\chi_{ijk}^{(2)}$ – тензор диэлектрической восприимчивости второго порядка, $E_j^{(\alpha)},E_k^{(\beta)}$ – компоненты векторов напряженности электрического поля падающих волн, в данной статье подразумевается правило суммирования по повторяющимся индексам.

Все волны в задаче задаются следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(\alpha)}(\mathbf{x},t)=E_\alpha\mathbf{e}^{(\alpha)}\exp\left(i\mathbf{k}^{(\alpha)}\mathbf{x}-i\omega t\right), \quad (3)$$

где E_α – комплексная амплитуда волны, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ – единичный комплексный вектор поляризации, $\mathbf{k}^{(\alpha)}$ – волновой вектор, ω – циклическая частота.

Используя уравнения Максвелла и переходя к потенциалам $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ и $\Phi(\mathbf{x},t)$, получаем уравнение

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)-\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\mu\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x},t)}{\partial t}. \tag{4}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(\mathbf{x})\exp(-i2\omega t)$, для $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=-ik_{2\omega}\sqrt{\frac{\mu_{2\omega}}{\varepsilon_{2\omega}}}\int\limits_V\frac{e^{ik_{2\omega}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}',\qquad k_{2\omega}=\sqrt{\varepsilon_{2\omega}\mu_{2\omega}}\,2\omega/c, \tag{5}$$

где $\varepsilon_{2\omega}$, $\mu_{2\omega}$ – электрическая и магнитная проницаемости на частоте 2ω. В приближении дальней зоны получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=-ik_{2\omega}\sqrt{\frac{\mu_{2\omega}}{\varepsilon_{2\omega}}}\frac{e^{ik_{2\omega}r}}{r}\int\limits_V\exp\left(-i\mathbf{k}^{(2\omega)}\mathbf{x}'\right)\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}', \tag{6}$$

где $r = |\mathbf{x}|$, вектор $\mathbf{k}^{(2\omega)}=k_{2\omega}\mathbf{e}_r$, тогда напряженности магнитного и электрического полей имеют вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{x})\approx k_{2\omega}^2\sqrt{\frac{\mu_{2\omega}}{\varepsilon_{2\omega}}}\frac{e^{ik_{2\omega}r}}{r}\left[\mathbf{e}_r\times\int\limits_V\exp\left(-i\mathbf{k}^{(2\omega)}\mathbf{x}'\right)\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'\right], \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{i}{(\varepsilon_{2\omega}\mu_{2\omega}2\omega/c)}\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{x})\approx k_{2\omega}^2\frac{e^{ik_{2\omega}r}}{\varepsilon_{2\omega}r}(1-\mathbf{e}_r\otimes\mathbf{e}_r)\times\\ \times\int\limits_V\exp\left(-i\mathbf{k}^{(2\omega)}\mathbf{x}'\right)\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}',\end{gathered} \tag{8}$$

где $\otimes$ – тензорное произведение векторов.

Начало сферической системы координат совместим с центром частицы, покрытой тонким слоем толщины $d_0 << a$, где a – радиус частицы. Векторы напряженности падающих волн задаются уравнениями (3). Тогда, подставляя напряженности в (2), а результат в (8), получаем

$$\begin{gathered}E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x})=\mu_{2\omega}\frac{(2\omega)^2}{c^2}\frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r}\left(\delta_{im}-e_{r,i}e_{r,m}\right)\times\\ \times\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}E_\alpha E_\beta e_j^{(\alpha)}e_k^{(\beta)}\int\limits_{4\pi}d\Omega_{\mathbf{x}'}\int\limits_a^{a+d_0}\exp\left(i\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}\mathbf{x}'\right)\chi_{mjk}^{(2)}(\mathbf{x}')r'^2dr',\end{gathered} \tag{9}$$

где $\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}$ – вектора рассеяния, вычисляемые по формуле

$$\mathbf{q}^{(\alpha\beta)} = \mathbf{k}^{(\alpha)} + \mathbf{k}^{(\beta)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}. \quad (10)$$

После интегрирования по радиусу остается интеграл по телесному углу:

$$E_i^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} d_0 a^2 \left(\delta_{im} - e_{r,i}e_{r,m}\right) \times$$
$$\times \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} E_\alpha E_\beta e_j^{(\alpha)} e_k^{(\beta)} \int_{4\pi} \exp\left(i\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}\mathbf{x}'\right) \chi_{mjk}^{(2)}(\mathbf{x}') d\Omega_{\mathbf{x}'}, \quad (11)$$

Тензор $\chi_{mjk}^{(2)}$ в выражении (11) в самом общем виде содержит 27 компонент. Выполнение свойств симметрии при поворотах и инверсии, а также перестановочная симметрия для двух последних индексов приводят к тому, что только 4 из них остаются независимыми (частный случай тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости для генерации суммарной частоты при одинаковых частотах падающего излучения [3]). Тогда тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка для поверхности можно представить в виде [4]

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)}\left(n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}\right) + \chi_4^{(2)} n_m \left(n_k \varepsilon_{ijm} - n_j \varepsilon_{imk}\right). \quad (12)$$

Здесь n_i – компоненты вектора нормали $\mathbf{n}$ к поверхности, δ_{ij} – дельта-символ Кронекера, ε_{ijk} – символ Леви–Чивита, $\chi_{1-4}^{(2)}$ – значения независимых компонент тензора диэлектрической восприимчивости. Последний коэффициент $\chi_4^{(2)}$ в (12) называют киральным.

Подставляя выражение (12) в (11) и проводя интегрирование получаем поле второй гармоники в виде

$$\mathbf{E}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = 4\pi\mu_{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{2\omega}r)}{r} d_0 a^2 \left(1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r\right) \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} E_\alpha E_\beta \mathbf{f}^{(\alpha\beta)}, \quad (13)$$

где вектора $\mathbf{f}^{(\alpha\beta)}$ имеют вид

$$\mathbf{f}^{(\alpha\beta)} = i\chi_1^{(2)} \left(\begin{array}{l} -j_3(z)\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\alpha)}\right)\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\beta)}\right) + \dfrac{1}{5}\left(j_1(z)+j_3(z)\right)\times \\ \times\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{e}^{(\beta)}\right)+\mathbf{e}^{(\beta)}\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\alpha)}\right)+\mathbf{e}^{(\alpha)}\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\beta)}\right)\right) \end{array} \right) +$$

$$+ij_1(z)\left(\chi_2^{(2)}\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\left(\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{e}^{(\beta)}\right)+\chi_3^{(2)}\mathbf{e}^{(\beta)}\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\alpha)}\right)+\chi_3^{(2)}\mathbf{e}^{(\alpha)}\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\beta)}\right)\right)- \quad (14)$$

$$-\chi_4^{(2)} j_2(z)\left(\left[\mathbf{e}^{(\alpha)}\times\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\right]\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\beta)}\right)-\left[\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\times\mathbf{e}^{(\beta)}\right]\left(\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}\mathbf{e}^{(\alpha)}\right)\right),$$

где $\mathbf{v}^{(\alpha\beta)}$ – единичный вектор вдоль $\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}$, $j_m(z)$ – сферические функции Бесселя порядка m, $z = \left|\mathbf{q}^{(\alpha\beta)}\right| a$.

Полученное аналитическое решение (13) позволяет рассчитать остальные компоненты результирующего электромагнитного поля второй гармоники, в том числе и его характеристики (вектор Умова-Пойтинга, эллиптичность, диаграммы направленности), что является предметом следующих статей.

Литература

1. Wang H., Yan E.C.Y., Borguet E., Eisenthal K.B. // Chem. Phys. Lett. 1996. V. 259. № 1–2. P. 15. doi 10.1016/0009-2614(96)00707-5.

2. Viarbitskaya S., Kapshai V., P. van der Meulen, Hansson T. // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. № 5. P. 053850. doi 10.1103/PhysRevA.81.053850.

3. Shamyna A.A., Kapshai V.N. // Optics and Spectroscopy. 2018. V. 124. № 1. P. 103. doi 10.1134/S0030400X18010198; Шамына А.А., Капшай В.Н. // Оптика и спектроскопия. 2018. Т. 124. № 1. С. 105–121. doi 10.21883/OS.2018.01.45366.176-17.

4. Kapshai V.N., Shamyna A.A. // Optics and Spectroscopy. 2017. V. 123. № 3. P. 440. doi 10.1134/S0030400X17090144; Капшай В.Н., Шамына А.А. // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 3. С. 416–429. doi 10.7868/S003040341709015X.

М.В. Федоренко (МГПУ имени И.П. Шамякина, Мозырь)
Науч. рук. **В.В. Шепелевич,** д-р физ.-мат. наук, профессор

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА FDTD

Для моделирования взаимодействия гауссовых пучков в нелинейной среде с разной разностью фаз и напряженностью электрического поля