УДК 535.2

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА ПРИ РАССЕЯНИИ НА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНАХ

*В. А. Журавлев, В. Е. Музалевский и Г. Д. Петров*

Для комптоновского рассеяния на движущемся электроне получены формулы преобразований параметров Стокса и поляризационной матрицы плотности начальных и конечных фотонов из лабораторной системы координат в систему отсчета покоя электрона, что позволило представить поляризационные свойства рассеяных фотонов через величины, относящиеся только к лабораторной системе отсчета.

При рассмотрении в эффекте Комптона зависимости дифференциального сечения рассеяния от поляризации падающих и рассеянных фотонов обычно исходят из инвариантного сечения, записанного в виде (обозначения из [1])

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega_2^2 do_2}{m^2 \varkappa_1} F, \tag{1}$$

$$F = F_0 + F_i \left(\xi_i^{(1)} + \xi_i^{(d)}\right) + F_{ij} \xi_i^{(1)} \xi_j^{(d)} \tag{2}$$

(суммирование по всем $i, j = 1, 2, 3$). Входящие в (2) параметры Стокса падающих $\xi_i^{(1)}$ и фиксируемых детектором $\xi_i^{(d)}$ фотонов определены относительно ортов

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{(1)} &= \frac{[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]}{|[\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2]|}, \quad \mathbf{e}_2^{(1)} = [\mathbf{k}_1 \mathbf{e}_1^{(1)}]/\omega_1 \text{ для } \xi_i^{(1)}, \\ \mathbf{e}_1^{(2)} &= \mathbf{e}_1^{(1)}, \quad \mathbf{e}_2^{(2)} = [\mathbf{k}_2 \mathbf{e}_1^{(2)}]/\omega_2 \text{ для } \xi_i^{(d)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ — трехмерные импульсы соответственно падающего и рассеянного фотонов, $\omega_1$, $\omega_2$ — их частоты (система единиц, в которой $\hbar = c = 1$). Заметим, что векторы $\mathbf{e}_1^{(1)}$, $\mathbf{e}_1^{(2)}$ перпендикулярны, а векторы $\mathbf{e}_2^{(1)}$, $\mathbf{e}_2^{(2)}$ лежат в плоскости рассеяния.

В (2) поляризационные коэффициенты представлены в ковариантном виде [1], в то время как параметры Стокса адэкватно описывают процесс рассеяния лишь для покоящегося электрона или в системе центра инерции сталкивающихся частиц [2].[1] Альтернативой (1)—(3) является представление сечения рассеяния через спиральные амплитуды, инвариантные по своей сути [2]. Но при рассмотрении рассеяния света на движущихся электронах, например томсоновского рассеяния в плазме [3], естественно ввести лабораторную систему отсчета и предпочтительной является форма (1)—(3). В связи с этим необходимо, сохранив определение параметров Стокса в лабораторной системе координат $C$ относительно ортов (3), найти закон их преобразования при переходе в систему отсчета $C_0$ покоящегося электрона.

Обозначим $\mathbf{v}$ ($|\mathbf{v}| = v$) — скорость электрона (скорость системы $C_0$ относительно $C$), $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{v}$, $\Theta_1$, $\Theta_2$ — углы между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ соответственно, $\Theta$ — угол рассеяния, $\mathbf{N}$ — нормаль к плоскости рассеяния; величины, относящиеся к системе $C_0$, отметим индексом ноль. Выделим в потоках фотонов неполяризованную, циркулярно и линейно поляризованные части. При переходе $C \to C_0$ они пре-

[1] Сводку результатов, относящихся к этому случаю, см. в [5, 6].

образуются независимо: инвариантами являются $\xi_2^{(l)}$ и степень линейной поляризации $L^{(l)} = [(\xi_1^{(l)})^2 + (\xi_3^{(l)})^2]^{1/2}$ $(l = 1, d)$.

Введем для линейно поляризованной части параметры Стокса согласно равенствам

$$\left.\begin{aligned} \xi_i^{(l)} &= L^{(l)} \eta_i^{(l)} \quad (i = 1, 3), \\ (\eta_1^{(l)})^2 + (\eta_3^{(l)})^2 &= 1 \quad (l = 1, d). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда для величин $\eta_i^{(l)}$ справедливо [1, 4]

$$\eta_1^{(l)} = \sin 2\beta_l, \quad \eta_3^{(l)} = \cos 2\beta_l, \tag{5}$$

где $\beta_l$ — углы между нормалью $\mathbf{N}$ и векторами электрического поля $\mathbf{E}^{(l)}$ падающих $(l = 1)$ и фиксируемых детектором $(l = d)$ фотонов. Опустим на время, где это несущественно, индекс $l$ и проведем рассмотрение для параметров Стокса падающего излучения.

Легко видеть [4], что наряду с инвариантностью проекции поля $\mathbf{E}$ на направление $\mathbf{n}$ при переходе $C \to C_0$ остается неизменным угол $\alpha$ между направлением поля $\mathbf{E}$ и плоскостью, содержащей векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{n}$. Далее, $\alpha = \gamma - \beta_1$, где $\gamma$ — угол между нормалью $\mathbf{N}$ и проекцией $\mathbf{n}$ на плоскость векторов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{k}_1$, причем

$$\sin \gamma = (\cos \theta_2 - \cos \theta \cos \theta_1) / \sin \theta \sin \theta_1. \tag{6}$$

Воспользовавшись аберрационными формулами [4]

$$\sin \theta_i^0 = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 - v \cos \theta_i} \sin \theta_i \quad (i = 1, 2), \tag{7}$$

формулой преобразования угла рассеяния [1]

$$\cos \theta^0 = 1 - \frac{(1 - v^2)(1 - \cos \theta)}{(1 - v \cos \theta_1)(1 - v \cos \theta_2)} \tag{8}$$

и, записав инвариант $\cos(\gamma - \beta_1)$ в $C$ и $C_0$ системах, из (5)—(8) находим

$$\left.\begin{aligned} \eta_1^0 &= \eta_1 \cos 2\delta + \eta_3 \sin 2\delta, \\ \eta_3^0 &= -\eta_1 \sin 2\delta + \eta_3 \cos 2\delta, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\delta \equiv \gamma^0 - \gamma$, и (индекс $l = 1$ восстановлен)

$$\operatorname{tg} \delta^{(1)} = -\frac{v \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2 + 2 \cos \theta \cos \theta_1 \cos \theta_2}}{1 + \cos \theta - v (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)}, \tag{10}$$

или, через компоненты скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$; $v_x \parallel \mathbf{k}_1$, $v_z \parallel \mathbf{N}$

$$\operatorname{tg} \delta^{(1)} = -\frac{v_z \sin \theta}{(1 + \cos \theta)(1 - v_4) - v_x \sin \theta}. \tag{11}$$

Для параметров Стокса детектора $\eta_i^{(d)}$ в (10), (11) следует сделать замену $\theta_1 \to \theta_2$, $\theta_2 \to \theta_1$, $v_x \to v_y$, $v_y \to v_x$, $v_z \to -v_z$, откуда $\delta^{(1)} = -\delta^{(d)}$.

Обозначая $\boldsymbol{\xi}^{(l)} = \{\xi_1^{(l)}, \xi_2^{(l)}, \xi_3^{(l)}\}$ — вектор-столбец, для исходных параметров Стокса из (4), (5), (9) можно записать

$$\boldsymbol{\xi}^{0(l)} = P^{(l)} \boldsymbol{\xi}^{(l)} \quad (l = 1, d), \tag{12}$$

где

$$P^{(l)} = \begin{pmatrix} L^{(l)} \cos 2\delta^{(l)} & 0 & L^{(l)} \sin 2\delta^{(l)} \\ 0 & 1 & 0 \\ -L^{(l)} \sin 2\delta^{(l)} & 0 & L^{(l)} \cos 2\delta^{(l)} \end{pmatrix}, \quad \delta^{(d)} = -\delta^{(1)}. \tag{13}$$

Приведем выражения для преобразованной поляризационной матрицы плотности, часто используемой в [1, 2] вместо параметров $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$

$$\rho^{0(l)} = \frac{1}{2} (1 + \tau P^{(l)} \boldsymbol{\xi}^{(l)}) \quad (l = 1, d) \tag{14}$$

и параметров Стокса фотона, рассеянного движущимся электроном (1), (2), (12), (13)

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = [P^{(2)}]^{-1}\, \boldsymbol{\xi}^{0(2)}, \quad P^{(2)} = P^{(d)}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^{0(2)} &= F_{11}\xi_1^{0(1)}/[F_0 + F_3\xi_3^{0(1)}], \\ \xi_2^{0(2)} &= F_{22}\xi_2^{0(1)}/[F_0 + F_3\xi_3^{0(1)}], \\ \xi_3^{0(2)} &= [F_3 + F_{33}\xi_3^{0(1)}]/[F_0 + F_3\xi_3^{0(1)}]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ — двухрядные матрицы Паули [1, 2] и $[P^{(2)}]^{-1}$ — матрица, обратная $P^{(2)}$.

Формулы (10) — (13) решают поставленную задачу: в инвариантном сечении рассеяния [1, 2] следует использовать значения преобразованных параметров Стокса $\boldsymbol{\xi}^{0(l)}$ (12); величины же $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$ в (12) по-прежнему определены относительно ортов (3) лабораторной системы координат. Преобразования (10) — (15) учитывают аберрацию света и как следствие поворот в пространстве нормали $\mathbf{N}$, относительно которой определены параметры $\boldsymbol{\xi}^{(l)}$.

В частном случае (10) — (12), когда скорость $\mathbf{v}$ лежит в плоскости рассеяния, несмотря на изменение углов $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$ параметры Стокса в $C$ и $C_0$ совпадают: матрица поворота $P^{(l)}$ диагональна. В случае, если электрон имеет составляющую скорости, перпендикулярную плоскости рассеяния, параметры Стокса $\xi_1$, $\xi_3$ в (2) преобразуются по (12), что приводит к изменению величины сечения рассеяния на релятивистском электроне. Это необходимо учитывать при диагностике релятивистских электронных пучков и высокотемпературной плазмы методом томсоновского рассеяния.

**Литература**


[1] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. «Наука», М., 1969.

[2] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. «Наука», М., 1968.

[3] В. А. Журавлев, Г. Д. Петров. Физика плазмы, *5*, № 1, 1979.

[4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. «Наука», М., 1973.

[5] H. A. Tolhoek. Rev. Mod. Phys., *28*, 277, 1956.

[6] W. H. McMaster. Rev. Mod. Phys., *33*, 8, 1961.



Поступило в Редакцию 25 августа 1979 г.