2. Fulcher, L.P. Energies of quark – anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation / L. P. Fulcher, Z. Chen, K.C. Yeong // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D47. – P. 4122 – 4132 s.

А.В. Бужан (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)
Науч. рук. **В.Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ТЕОРЕМА ГАУССА И ЗАРЯДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ

Теорема Гаусса в электростатике является простым и действенным способом для нахождения напряжённости поля, создаваемого системой симметрично распределённых зарядов. Однако, для нахождения поля, создаваемого такими зарядами, находящимися на некоторой поверхности, в точке, принадлежащей этой поверхности, теорема Гаусса неприменима, так как не ясным остаётся вопрос: принадлежат ли заряды на выделенной поверхности к объёму, ограниченному этой поверхностью? Для поиска правильного варианта ответа проведём прямой (то есть без использования теоремы Гаусса) расчет напряженности поля, создаваемого бесконечно тонкой равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ сферой радиуса R, в различных точках: (а) вне сферы; (б) внутри сферы; (в) на самой сфере.

а) Пусть точка A находится на расстоянии $r > R$ от центра сферы O (см рисунок 1). Для нахождения напряжённости $\vec{E}(r)$, введём сферическую систему координат, с центром в точке O и осью Oz, проходящей через точку A. Рассмотрим кольцо на сфере, для которого полярный угол принадлежит промежутку $[\theta;\theta + d\theta]$.

Заряд такого кольца равен:

$$dQ = \sigma dS = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta. \qquad (1)$$

Напряжённость поля, создаваемого таким кольцом, любая точка которого находится на одинаковом (равном l) расстоянии от точки A (рисунок 2), направлена вдоль оси Oz и по величине равна:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{l^2} \cos\alpha. \qquad (2)$$

Выражения для l и $\cos\alpha$ найдём с помощью теоремы косинусов:

$$l^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta, \quad R^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\alpha. \qquad (3)$$

Подставив в (2) l и $\cos\alpha$ из (3) и dQ из (1), получим:

$$dE=\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma R^2\sin\theta d\theta}{l^3}l\cos\alpha=\frac{\sigma R^2\left(r-R\cos\theta\right)}{2\varepsilon_0\left(r^2+R^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta d\theta. \qquad (4)$$

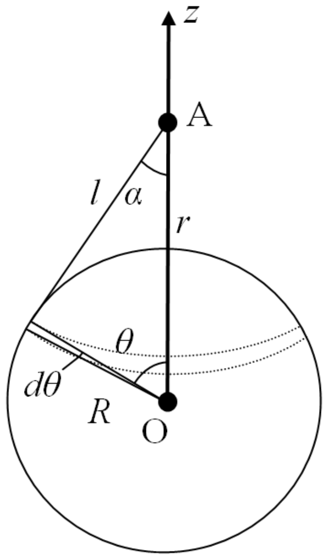

Рисунок 1 – Напряжённость поля вне сферы

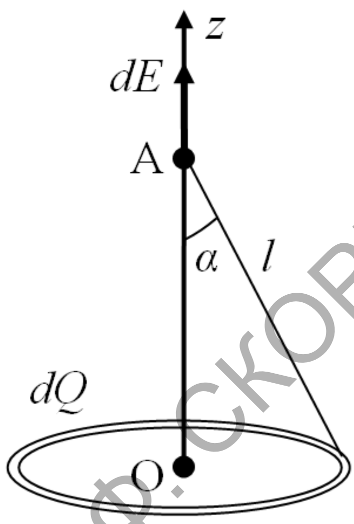

Рисунок 2 – Напряжённость поля выделенного кольца

Для нахождения результирующей напряжённости, проинтегрируем выражение (4) в пределах от θ = 0 до θ = π или по cos(θ) от 1 до -1:

$$E(r)=\int_0^{\pi}\frac{\sigma R^2\left(r-R\cos\theta\right)}{2\varepsilon_0\left(r^2+R^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta d\theta=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_1^{-1}\frac{R^2\left(R\cos\theta-r\right)}{\left(r^2+R^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}d\cos\theta.$$

Перейдём к переменной интегрирования $l^{-1}=\left(r^2+R^2-2Rr\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$, которая изменяется от $|r-R|^{-1}$ до $(r+R)^{-1}$:

$$E(r)=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2}\frac{R\left(r-R\cos\theta\right)}{\left(r^2+R^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}r}d(r^2+R^2-2Rr\cos\theta)=$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{(r+R)^{-1}}^{|r-R|^{-1}}\frac{R\left(r-R\cos\theta\right)}{r}d(r^2+R^2-2Rr\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Заменив $\left(r^2+R^2-2Rr\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$ на l^{-1} и проинтегрировав, получим

$$E(r)=\frac{\sigma R}{4\varepsilon_0 r^2}\int_{(r+R)^{-1}}^{|r-R|^{-1}}\left[\left(l^{-1}\right)^{-2}+\left(r^2-R^2\right)\right]dl^{-1}=\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{(r-R)}{|r-R|}\right). \qquad (5)$$

При выполнении в выражении (5) условия $r > R$, имеем

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma R^2}{r^2}. \tag{6}$$

Если полный заряд сферы равен Q, то с учётом того, что:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{6а}$$

получим привычную формулу для расчета напряжённости на расстоянии r от центра сферы:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

б) Пусть точка A находится на расстоянии $r < R$ от центра сферы O (Рисунок 3). Для нахождения напряжённости $\vec{E}(r)$ последовательность действий будет такой же, как и в пункте а), поскольку формулы (1)–(4) справедливы и в этом случае, значит, выражение (5) также будет справедливо. Однако, при имеем:

$$1 + \frac{(r - R)}{|r - R|} = 0. \tag{7}$$

Это означает, что при $r < R$ напряжённость электрического поля $E(r) = 0$, что вновь согласуется с теоремой Гаусса.

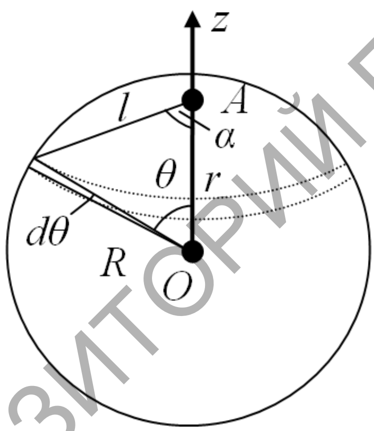

Рисунок 3 – Напряжённость поля внутри сферы

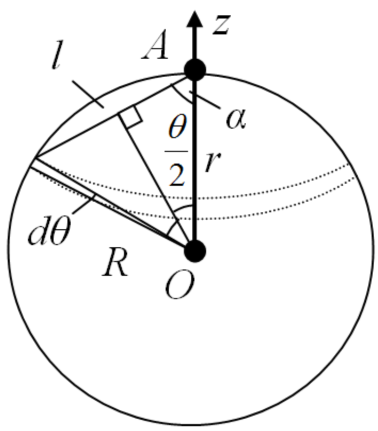

Рисунок 4 – Напаряжённость поля на поверхности сферы

в) Пусть теперь точка A находится на расстоянии $r = R$ от центра сферы O (Рисунок 4). Для нахождения напряжённости $\vec{E}(R)$, проделаем аналогичные пункту а) действия. Введём сферическую систему координат, с центром в точке O и осью Oz, проходящей через точку A. Опять, рассмотрим кольцо на сфере, для которого полярный угол принадлежит промежутку $[\theta;\theta + d\theta]$.

Выражения (1) и (2), разумеется, не изменятся, что же касается формул (3), то условие $r = R$ позволяет записать очевидные из рисунка 4 выражения для l и $\cos\alpha$:

$$l = 2R\sin\frac{\theta}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{l}{2R} = \sin\frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

На основе (1), (8) и (2) получим

$$dE = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\theta\, d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\cos\frac{\theta}{2}d\,\theta. \tag{9}$$

Для нахождения результирующей напряжённости, проинтегрируем выражение (9) в пределах от θ=0 до θ=π:

$$E(R) = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^1 d\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{10}$$

Учитывая, (6а) получим, что модуль напряжённости поля на поверхности сферы равен половине модуля напряжённости поля вблизи внешней поверхности сферы:

$$E(R) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}.$$

Таким образом, напряжённость электрического поля равномерно заряженной сферы равна:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, & r = R; \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{R^2}{r^2}, & r > R. \end{cases} \tag{11}$$

Отметим, что некоторые авторы [1–3] приводят другой ответ, отличающийся от (11) при $r = R$ отсутствуем множителя $\frac{1}{2}$.

Аналогично проделанному, можно рассчитать поле, создаваемое равномерно заряженной бесконечно длинной цилиндрической поверхностью, ответ в такой задаче аналогичен (11). Эти примеры с очевидностью ставят задачу уточнения доказательства теоремы Гаусса, включающего рассмотрение зарядов на поверхности.

Литература

1. Макаренко, Г.М. Электростатика. Постоянный ток. Магнитное поле. Часть 2 – Новополоцк : ПГУ, 2008. стр. 14.
2. Миролюбов, Н.Н., Костейко, М.В. Левинштейн, М.В., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. – 41 с.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики. Том 2. Электричество. М. : Наука, 1970. – 33 с.

О.Н. Вечорко (УО «БрГУ им. А.С. Пушкина», Брест)
Науч. рук. **В.А. Плетюхов**, д-р физ.-мат. наук, профессор

К ТЕОРИИ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2

Одним из распространенных и общих способов описания элементарных частиц в релятивистской квантовой механике является теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка. Данная теория исходит из того, что описание свободного микрообъекта с ненулевой массой и заданным значением спина может быть осуществлено посредством матрично-дифференциального уравнения

$$\left(\tilde{A}_\mu \partial_\mu + m\right)\psi\left(x_\mu\right) = 0, \quad \left(\mu = 1,2,3,4\right), \tag{1}$$

где ψ – многокомпонентная волновая функция, преобразующаяся по некоторому набору неприводимых зацепляющихся представлений группы Лоренца; $\varGamma_\mu$ – квадратные матрицы соответствующей размерности.

В стандартном подходе теории РВУ, основы которой были заложены Дираком, Фирцем и Паули, при построении уравнения для частицы с данным спином используется минимально необходимый набор неприводимых представлений. Так, в случае спина $S = 3/2$, берется набор $(0,\, 1/2)\oplus(1/2,\, 0)\oplus(1/2,\, 1)\oplus(1,\, 1/2)$, который образует так называемую схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} (1/2,\,0) & — & (1,\,1/2) \\ | & & | \\ (0,\,1/2) & — & (1/2,\,1) \end{array} \tag{2}$$

В результате получается хорошо известное уравнение Фирца–Паули [1].

РВУ указанного типа содержат только одну внутреннюю характеристику микрочастицы – её спин. Для описания же других внутренних