

РАЗВИТИЕ МЕТОДА РАДИАЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ ПОТЕРЬ ПЛАЗМЫ В ЛИНЕЙЧАТОМ СПЕКТРЕ

В. И. Денисов и Н. Г. Преображенский

Показано, что метод радиационного оператора является эффективным в расчетах излучательных потерь в плазме. Общая теория проиллюстрирована детальными расчетами для плоскопараллельного излучателя и для случая мелкомасштабных неоднородностей в плазме.

1. Как известно, расчеты локальных и объемных радиационных потерь неравновесной плазмы, приходящихся на долю изолированных или частично перекрывающихся спектральных линий, вызывают значительные трудности и в последнее время становятся предметом пристального внимания специалистов, работающих как с низко-, так и с высокотемпературной плазмой [1-4]. В связи с этим представляет интерес анализ возможностей, которыми характеризуется так называемый метод радиационного оператора, предложенный Сольбе [5].

Напомним прежде всего идею метода. Положим для простоты, что плазма заключена между плоскопараллельными стенками, разделенными расстоянием d . Система координат декартова, причем ось z перпендикулярна стенкам; в направлениях x и y плазма безгранична. Пусть $\theta = \arccos \mu$ — угол между направлением выбранного луча зрения и осью z , $\tau_+ = k_\nu z$ и $\tau_- = k_\nu (d - z)$ — оптические толщины, а $I_+(\nu, z, \mu)$ и $I_-(\nu, z, \mu)$ — интенсивности излучения через соответствующие стенки; k_ν — коэффициент поглощения.

Тогда в предположении локального термодинамического равновесия (ЛТР) можно записать уравнение переноса излучения

$$\pm \frac{\mu}{k_\nu} \frac{dI_\pm(\nu, z, \mu)}{dz} + I_\pm(\nu, z, \mu) = B[\nu_0, T(z)] \quad (1)$$

(B — функция Планка) и его формальное решение в виде

$$I_\pm(\nu, z, \mu) = \exp\left(-\frac{\tau_\pm}{\mu}\right) \left[I_0 + \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\pm} B(\nu_0, \tau'_\pm) \exp\left(\frac{\tau'_\pm}{\mu}\right) d\tau'_\pm \right]. \quad (2)$$

Следуя далее обычной схеме преобразований теории переноса излучения [6], нетрудно получить выражение для локальных радиационных потерь $R(z)$, соответствующее описанной выше упрощенной одномерной задаче

$$R(z) = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_1^0 \left(\frac{dI_-}{dz} - \frac{dI_+}{dz} \right) \mu d\mu = \sum_{i=1}^5 R_i(z). \quad (3)$$

Второе равенство в (3) означает, что $R(z)$ фактически есть сумма интегралов трех видов: однократного (по частоте ν , характеризующего потери

на испускание в пределе $\tau_{\pm} \rightarrow 0$), двух двукратных (по ν и μ , описывающих потери за счет реабсорбированного излучения стенок) и двух трехкратных (по ν , μ и z' , что соответствует вкладу реабсорбированного излучения самой плазмы).

Сольбе [5] предложил симметризовать задачу путем расширения интервала изменения z до $\pm \infty$ и введения вместо B новой функции

$$\tilde{B}(\nu_0, z) = \begin{cases} B(\nu_0, z), & 0 < z < d, \\ I_0 = \text{const}, & -\infty < z \leq 0; d \leq z < \infty, \end{cases} \quad (4)$$

в результате чего можно записать

$$R(z) = 4\pi \int_0^\infty k_\nu^2 d\nu \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{k_\nu z'}{\mu}\right) \times \\ \times \left\{ \tilde{B}(\nu_0, z) - \frac{1}{2} [\tilde{B}(\nu_0, z + z') + \tilde{B}(\nu_0, z - z')] \right\} dz' = \int_{-\infty}^\infty K(z' - z) \tilde{B}(\nu_0, z') dz'. \quad (5)$$

Радиационным оператором при этом называется такой интегральный оператор, который действуя на $\tilde{B}(\nu_0, z)$ дает $R(z)$. Его собственные функции по отношению к пространственной переменной, как легко убедиться, являются гармоническими функциями, благодаря чему элементарный Фурье-анализ позволяет записать для ядра оператора следующее выражение:

$$K(z' - z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \nu(\eta) \cos[\eta(z' - z)] d\eta, \quad (6)$$

где

$$\nu(\eta) = 4\pi \int_0^\infty k_\nu^2 d\nu \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \int_0^\infty [1 - \cos(\eta z')] \exp\left(-\frac{k_\nu z'}{\mu}\right) dz', \quad (7)$$

Подстановка конкретных выражений для формы профиля коэффициента поглощения в ряде случаев дает возможность выполнить интегрирование в (7) до конца; например, для лоренцева профиля с полушириной b получается

$$\left. \begin{aligned} \nu(\eta) &= 2\pi^2 b \frac{k_0^2}{\eta} (\alpha - \arctg \alpha), \\ \alpha &= \frac{\eta \sqrt{2}}{k_0} [1 + \sqrt{1 + (k_0/\eta)^2}]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2. Проиллюстрируем применение метода радиационного оператора к задаче о влиянии температурного градиента плазмы на выход линейчатого излучения. Функцию $\tilde{B}(\nu_0, z)$ на отрезке $0 \leq z \leq d$ удобно промоделировать выражением

$$\tilde{B}(\nu_0, z) = \tilde{B}(z) = I_0 + [4z(d - z)]^t d^{-2t} \Delta I_0, \quad (9)$$

полагая при этом, что за пределами данного отрезка $\tilde{B}(z) = I_0$.

Тогда интервал изменения параметра t $0 \leq t \leq 1$ охватывает достаточно широкий класс температурных распределений, представляющих практический интерес [7]. Воспользуемся приближением Лутца—Хирамото [8, 9], основанным на разложении в ряд функции $(1 - k_\nu/k_0)^{-1/2} = 1 + k_\nu/2k_0 + \dots$ и отбрасывании всех членов ряда начиная с третьего. Найдем отношение $R(z, t=1)/R(z, t=0)$ для лоренцева профиля k_ν и $I_0=0$. Если $z_0 = 2z/d$, то

$$\frac{R(z, t=1)}{R(z, t=0)} = 8 \sqrt{z_0(2 - z_0)} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{z_0^{3/2} + (2 - z_0)^{3/2}}{z_0^{1/2} + (2 - z_0)^{1/2}} \right]. \quad (10)$$

Расчеты показывают, что уже при $k_0 d = 2$ выражение (10) справедливо с точностью не хуже 10%; с ростом $k_0 d$ его точность быстро нарастает.

На рис. 1 ход отношения $R(z, t)/R(z, t=0)$ изображен для нескольких значений параметра t (при t дробных расчеты выполнялись на ЭВМ). Видно, что влияние температурного градиента на распределение локальных лучистых потерь значительно. На это не всегда обращают должное внимание, что, в частности, может приводить к большим расхождениям между теоретическими и экспериментальными значениями коэффициентов переноса [1]. В качестве характерного примера укажем на работу Ходнетта [10]. Исследователей при этом нередко дезориентирует то обстоятельство, что процедура усреднения $T(z)$ в аргументе планковской функции сравнительно слабо сказывается на величине объемных лучистых потерь [11]. Действительно,

$$R_{\Sigma}(t) = \int_0^d R(z, t) dz = C_1 b \sqrt{\frac{k_0}{d}} B(v_0, \langle T \rangle), \quad (11)$$

где $C_0 = 11.7$, $C_1 = 15.2$.

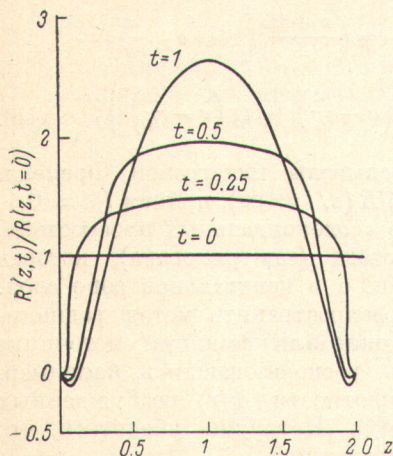


Рис. 1. Относительные локальные радиационные потери для плоскопараллельного излучателя.

Профиль k_0 дисперсионный. Обозначения в тексте.

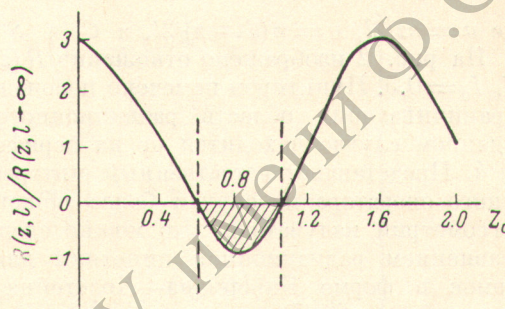


Рис. 2. Относительные локальные радиационные потери плазмы с мелкомасштабными неоднородностями.

Пояснения в тексте.

Отметим еще один результат расчета. Из формулы (10) отчетливо видно, что вблизи стенок ($z_0 \ll 1$ или $(2 - z_0) \ll 1$) множитель, заключенный в квадратных скобках, становится отрицательным, вследствие чего меняет знак и дивергенция лучистого потока. Причина этого явления, очевидно, состоит в том, что линейчатое излучение, приходящее из более нагретых центральных областей плазмы, способно не только компенсировать соответствующие локальные потери в периферийных участках, но и вызвать некоторое избыточное «надбольшмановское» возбуждение. Попытку экспериментально обнаружить такой эффект предпринимали еще Батенин и Чиннов в работе [12]. Очевидно, что существование «радиационных стоков» внутри плазмы может играть немаловажную роль в задачах, связанных с кинетикой газовых лазеров, а также в целом ряде диагностических задач. Ниже мы еще вернемся к этому эффекту.

3. Рассмотрим в тех же приближениях еще один случай распределения лучистых потерь, когда в плазме или в потоке нагретого газа возникают мелкомасштабные неоднородности, например типа ионизационной неустойчивости или прандтлевских турбулентных пульсаций. Радиационный перенос при этом может выступать в качестве важного демпфирующего или, наоборот, «раскачивающего» фактора [13, 14]. Имея в виду предыдущие результаты, можно ограничиться лишь расчетом дополнительного

вклада в лучистые потери $\Delta R(z)$, обязанного наличием периодического члена в выражении для функции источника

$$\Delta B(z) = \Delta I_0 \cos \frac{\pi}{2l} \left(\frac{d}{2} - z \right), \quad (12)$$

где для простоты принято, что волновой вектор флуктуационной волны направлен вдоль z , а $l/d \ll 1$.

В приближении Лутца—Хирамото после несколько громоздких выкладок, которые мы здесь опускаем, можно найти

$$\begin{aligned} \Delta R(z) = & \frac{8\pi^{3/2}}{3} b \Delta I_0 \sqrt{\frac{k_0}{l}} \left\{ \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{v-u}{2} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \left(\frac{v+u}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{v}} \right) + \right. \\ & + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\cos \left(\frac{v+u}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{v+u}{2} \right) \right] \left[C \left(\sqrt{\frac{2u}{\pi}} \right) \cos u + S \left(\sqrt{\frac{2u}{\pi}} \right) \sin u + \right. \\ & + C \left(\sqrt{\frac{2v}{\pi}} \right) \cos v + S \left(\sqrt{\frac{2v}{\pi}} \right) \sin v \left. \right] - \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{v+u}{2} \right) \left[\cos \left(u + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \cos \left(v + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \frac{\sqrt{2}}{8} \pi \sin \left(\frac{v+u}{2} \right) \left[\cos \left(u - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(v - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где $u = \pi z/2l$, $v = \pi(d-z)/2l$, а C и S — символы интегралов Френеля.

На рис. 2 изображено отношение $R(z, l)/R(z, l = \infty)$, причем $l/d = 0.1$, $\Delta I_0/I_0 = 0.5$. Пунктиром помечено положение «селекционных плоскостей», ограничивающих область радиационного стока (заштрихована), которая в данном случае находится не на периферии, а в центральной зоне слоя.

4. Представляет естественный интерес распространить метод радиационного оператора на случаи более общего описания функции источника и геометрии излучателя. Это можно сделать, воспользовавшись, например, уравнением радиационной кинетики для плотности $n(r)$ возбужденных атомов в форме Бибермана—Холстейна [15, 16]. Нетрудно убедиться, что вместо формулы (5) при этом получится выражение

$$R(r) = \int_V \varphi(r, r') n(r') dr', \quad (14)$$

где

$$\varphi(r, r') = \varphi(\rho) = \frac{\delta(\rho)}{\tau_0} - A \int_0^\infty \frac{k_v^2}{\rho^2} \exp(-k_v \rho) dv,$$

$$\rho = r - r'; \quad r, r' \in V, \quad A = \left(4\pi\tau_0 \int_0^\infty k_v dv \right)^{-1}, \quad (15)$$

τ_0 — время спонтанного высвечивания, V — рассматриваемый объем. Учет зависимости коэффициента поглощения k_v от координат, вообще говоря, принципиальных трудностей также не вызывает [17], однако здесь он не производится во избежание громоздких формул.

Непосредственное использование (14) и (15) с целью расчета радиационных потерь в линейчатом спектре неудобно в связи с тем, что перенос излучения чаще всего происходит в крыльях линии, описываемых степенной зависимостью (распределения Лоренца, Хольцмарка и т. п.). Подстановка соответствующих выражений в (15) приводит к расходимости в точке $\rho = 0$. Тем не менее эту трудность можно преодолеть.

Пусть $\psi(\rho)$ — функция, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Delta \psi = \varphi, \quad (16)$$

где φ выражается согласно (15). Элементарное тождество

$$\varphi n = \nabla(\psi \cdot n) - \nabla(\psi \cdot \nabla n) + \psi \Delta n$$

и теорема Гаусса—Остроградского позволяют записать

$$R(\mathbf{r}) = \int_V \psi(\rho) \Delta n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_S [n(\mathbf{r}') \nabla \psi - \psi \nabla n(\mathbf{r}')] dS', \quad (17)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V . Легко видеть, что переход от φ к ψ понижает особенности ядра радиационного оператора на два порядка. Сферически-симметричное решение уравнения (16) с нулевыми граничными условиями находится стандартным путем [18]. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi(\rho) &= -A \int_0^\infty k_\nu^2 \text{Ei}(-k_\nu \rho) + k_\nu \rho^{-1} \exp(-k_\nu \rho) d\nu, \\ \nabla \psi &= A \rho \rho^{-3} \int_0^\infty \exp(-k_\nu \rho) d\nu, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где Ei — символ интегральной экспоненты.

Если распределение интенсивности в крыльях линии поглощения подчиняется зависимости $k_\nu \sim (\nu - \nu_0)^{-m}$, $m > 1$, то

$$\left. \begin{aligned} \psi(\rho) &= -\frac{A b k_0^{2/m}}{2m-1} \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \rho^{\left(\frac{1}{m}-2\right)}, \\ \nabla \psi &= \frac{A b k_0^{1/m}}{m} \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \rho^{\left(\frac{1}{m}-4\right)} \rho, \\ R(\mathbf{r}) &= A b k_0^{1/m} \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left\{ \int_S \left[\frac{1}{m} \rho^{\left(\frac{1}{m}-4\right)} \rho n(\mathbf{r}') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\rho^{\left(\frac{1}{m}-2\right)}}{2m-1} \nabla n(\mathbf{r}') \right] dS' - \frac{1}{2m-1} \int_V \rho^{\left(\frac{1}{m}-2\right)} \Delta n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В этих формулах b — полуширина линии, k — максимальное значение коэффициента поглощения, Γ — символ гамма-функции.

Переход к одномерной геометрии позволяет существенно упростить выражение для $R(\mathbf{r})$; так, в случае рассмотренного выше излучающего плоскопараллельного слоя получается

$$R(z) = \frac{2m\pi A b k_0^{1/m} \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{2m-1} \int_{-\infty}^{\infty} |z - z'|^{1/m} \frac{\partial^2 n(z')}{\partial z'^2} dz'. \quad (20)$$

В частном случае ($m=2$) отсюда следует формула, уже приводившаяся в статье Сольбе [5]. Несколько сложнее выражение для $R(z)$, если крылья контура гауссовы, т. е. доплеровское уширение линии преобладает

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{4} b \pi A \left\{ \int_0^d (\ln k_0 |z - z'|)^{-1/2} \left[\frac{\partial^2 n}{\partial z'^2} - \frac{2}{|z - z'|} \frac{\partial n}{\partial z'} \right] dz' + \right. \\ &\quad \left. + (\ln k_0 z)^{-1/2} \left[\frac{4n(0)}{z} - \frac{\partial n}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \right] + (\ln k_0 |z - d|)^{-1/2} \left[\frac{4n(d)}{|z - d|} + \frac{\partial n}{\partial z'} \Big|_{z'=d} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, задавая $n(z)$ в той или иной параметрической форме, можно исследовать особенности формирования радиационных стоков, характеристики соленоидных поверхностей, объемные излучательные потери и т. п. Этим приложениям метода радиационного оператора авторы рассчитывают посвятить отдельную работу.

Благодарим А. Е. Суворова за полезное обсуждение.

Литература

- [1] А. В. Елецкий, Л. А. Палкина, Б. М. Смирнов. Явления переноса в слабоионизованной плазме. Атомиздат, М., 1975.
- [2] А. Ф. Александров, А. А. Рухадзе. Физика сильнотоочных электро-разрядных источников света. Атомиздат, М., 1976.
- [3] Г. Грим. Уширение спектральных линий в плазме. «Мир», М., 1978.
- [4] В. И. Гервидс, В. И. Коган. Письма ЖЭТФ, 21, 329, 1975; Препринт ИАЭ-2722, М., 1976.
- [5] A. Solbés. AIAA J., 6, 737, 1968.
- [6] К. С. Адзериho. Лекции по теории переноса лучистой энергии. Изд. БГУ им. В. И. Ленина, Минск, 1975.
- [7] В. В. Пикалов, Н. Г. Преображенский. В кн.: Свойства низкотемпературной плазмы и методы ее диагностики, 138. «Наука», Новосибирск, 1977.
- [8] M. Lutz. AIAA J., 5, 1416, 1967.
- [9] T. Hiramoto. J. Phys. Soc. Japan, 26, 785, 1969.
- [10] P. Hodnett. J. Appl. Phys., 40, 1753, 1969.
- [11] B. Armstrong, R. Nicholls. Emission, Absorption and Transfer of Radiation in Heated Atmospheres. Pergamon Press, 1972.
- [12] В. М. Батенин, В. Ф. Чиннов. Теплофиз. выс. темпер., 6, 981, 1968.
- [13] V. F. Gruzdeva, A. M. Lagarkov. Proc. 8-th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, 282, Vienna, 1967.
- [14] В. М. Иевлев. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. «Наука», М., 1975.
- [15] Л. М. Биберман. ЖЭТФ, 17, 416, 1947.
- [16] T. Holstein. Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
- [17] С. Я. Бронин, А. М. Лагарьков. Теплофиз. выс. темпер., 8, 741, 1970.
- [18] Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, 2. ИЛ, М., 1960.

Поступило в Редакцию 11 ноября 1979 г.