Использование этой программы эффективно на этапах закрепления и повторения учебного материала как в индивидуальном, так и групповом обучении.

Литература

1 Беспалько, В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько – М.: Педагогика, 1989. – 191 с.

2 Разумовский, В. Г. Развитие творческих способностей учащихся в процессе обучения физике / В.Г. Разумовский. – М.: Просвещение, 1975. – 272 с.

3 Цыркун, И. И. Методическая инноватика / И. И. Цыркун. – Минск : БГПУ, 1996. – 152 с.

УДК 517.983.23+517.984.5

И. С. Ковалева

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТИЛТЬЕСА НАД ПОЛУГРУППОЙ Z_+

В статье доказывается непрерывность оператора Z_+-преобразования Стилтьеса $S_1 : L^1[0,1] \to L^p[0,1]$ $(0 < p < 1)$, устанавливается аналитичность преобразований, формула обращения, теорема единственности, а также приводится таблица преобразований ряда элементарных функций.

В монографии [1] дано общее определение преобразования Стилтьеса над полугруппами. В случае аддитивной полугруппы неотрицательных целых чисел Z_+ получаем следующее интегральное преобразование.

Определение. [1] *Преобразованием Стилтьеса над полугруппой Z_+ (или Z_+-преобразованием Стилтьеса) функции* $f(t)$ называется функция, определяемая соотношением

$$S_1 f(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz} dt \cdot \qquad (1)$$

При этом предполагается, что интеграл существует как интеграл Лебега или в смысле главного значения. Последнее означает, что при $z \in [1, \infty)$ он понимается как предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{t \in [0,1]: |t - z^{-1}| > \varepsilon\}} \frac{f(t)}{1-tz} dt .$$

Некоторые свойства этого преобразования исследовались в [1, 2]. Настоящая работа является продолжением этих исследований.

Приведем таблицу Z_+-преобразований Стилтьеса некоторых элементарных функций.

Таблица 1 – Z_+-преобразования Стилтьеса

$f(t)$	$S_1 f(z)$
1	2
1	$-\frac{\ln(1-z)}{z}$
t	$-\frac{\ln(1-z)}{z^2} - \frac{1}{z}$

t^n $n \in N$	$-\frac{\ln(1-z)}{z^{n+1}}-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2z^{n-1}}-\frac{1}{3z^{n-2}}-\ldots-\frac{1}{(n-1)z^2}-\frac{1}{nz}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{2arctg(\sqrt{-z})}{\sqrt{-z}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{2arctg(\sqrt{z})}{z^{3/2}}-\frac{2}{z}$

Окончание таблицы 1

1	2
$\sqrt[3]{t}$	$-\frac{\ln(1-\sqrt[3]{z})}{z^{4/3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+\sqrt[3]{z}+z^{2/3})}{z^{4/3}}-\frac{3}{z}+\frac{\sqrt{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{z}}{2+\sqrt[3]{z}}\right)}{z^{4/3}}$
$\sqrt[4]{t}$	$-\frac{\ln(1-\sqrt[4]{z})}{z^{5/3}}+\frac{\ln(1+\sqrt[4]{z})}{z^{5/3}}-\frac{4}{z}+\frac{2arctg\left(\sqrt[4]{z}\right)}{z^{5/3}}$
$\sqrt{1-t}$	$\frac{2}{z\sqrt{z(z-1)}}\left(\sqrt{z(z-1)}-arctg\left(\frac{z}{\sqrt{z(z-1)}}\right)z+arctg\left(\frac{z}{\sqrt{z(z-1)}}\right)\right)$ $(z \le 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-t}}$	$-\frac{2}{\sqrt{z(z-1)}}arctg\left(\frac{z}{\sqrt{z(z-1)}}\right)$ $(z \le 1)$
a^t	$\frac{a^{\frac{1}{z}}}{z}\left(-Ei\left(1,\frac{\ln a}{z}\right)+Ei\left(1,\frac{\ln a(z-1)}{z}\right)\right)$ $(z \le 1)$
$\sin t$	$\frac{1}{z}\left(-Si\left(\frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)+Ci\left(-\frac{1}{z}\right)\sin\left(\frac{1}{z}\right)-Si\left(\frac{z-1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)-Ci\left(\frac{z-1}{z}\right)\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ $(z \le 1)$
$\cos t$	$\frac{1}{z}\left(Si\left(\frac{1}{z}\right)\sin\left(\frac{1}{z}\right)+Ci\left(-\frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)+Si\left(\frac{z-1}{z}\right)\sin\left(\frac{1}{z}\right)-Ci\left(\frac{z-1}{z}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ $(z \le 1)$
$\chi_{[\alpha,\beta]}$	$-\frac{1}{z}\ln\left(\frac{1-\beta z}{1-\alpha z}\right)$, $\alpha<\beta, \alpha, \beta \in [0,1]$
Примечание. – $Ei(a,z)=\int_1^{\infty} e^{-tz}t^{-a}dt$, $Si(z)=\int_0^z \frac{\sin t}{t}dt, Ci(z)=-\int_z^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$.	

<u>Теорема1.</u> *Функция* $S_1 f$ *при* $f(t) \in L^1[0,1]$ *определена и аналитична в комплексной плоскости с разрезом вдоль луча* $[1,\infty)$.

<u>Доказательство.</u> При $z \in C\setminus[1,\infty)$ интеграл в (1) существует как интеграл Лебега, поскольку при этих z имеет место неравенство $\min\limits_{t\in[0,1]}|1-tz|=|1-t_z z|>0$. Докажем аналитичность функции $S_1 f$ в области $C\setminus[1,\infty)$. Для любой точки $s_0 \in C\setminus[1,\infty)$ рассмотрим окрестность $U(s_0)$, замыкание $\overline{U}(s_0)$ которой не пересекается с лучом $[1,\infty)$. Тогда

$$M = \max_{\substack{s\in \overline{U}(s_0)\\ 0\le t\le 1}} \frac{1}{(1-ts)^2} = \frac{1}{\min\limits_{\substack{s\in \overline{U}(s_0)\\ 0\le t\le 1}} (1-ts)^2} = \frac{1}{(1-t_1 s_1)^2} < \infty .$$

Поэтому при всех $s \in U(s_0)$, $t \in [0,1]$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{f(t)}{1-ts}\right)\right| = \left|\frac{tf(t)}{(1-ts)^2}\right| \le Mt\left|f(t)\right| \in L^1[0,1].$$

В силу теоремы о дифференцировании интеграла Лебега, зависящего от параметра, функция $S_1 f$ дифференцируема в любой точке $s_0 \in C \setminus [1,\infty)$.

Рассмотрим пространство $L^p[0,1]$ $(0 < p < 1)$, состоящее из (классов) измеримых по Лебегу функции f на [0,1], для которых

$$\Delta_p f := \int_0^1 \left|f(t)\right|^p dt < \infty ,$$

наделенное инвариантной метрикой $d_p(f,g) = \Delta_p(f-g)$.

<u>Теорема 2.</u> *Для любого p из* (0,1) *оператор* S_1 *непрерывно действует из* $L^1[0,1]$ *в* $L^p[0,1]$, *причем*

$$\Delta_p(S_1 f - S_1 g) \le \frac{1}{1-p}\left\|f-g\right\|_1^p .$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $f, g \in L^1[0,1]$. Тогда при $z \in [0,1]$ имеем

$$\left|S_1 f(z)\right| \le \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1-tz} dt \le \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1-z} dt = \frac{\left\|f\right\|_1}{1-z}.$$

Следовательно,

$$\Delta_p(S_1 f) \le \int_0^1 \left(\frac{\left\|f\right\|_1}{1-z}\right)^p dz = -\frac{(1-z)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_0^1 \left\|f\right\|_1^p = \frac{1}{1-p}\left\|f\right\|_1^p ,$$

$$\Delta_p(S_1 f - S_1 g) = \Delta_p(S_1(f-g)) \le \frac{1}{1-p}\left\|f-g\right\|_1^p .$$

Отсюда следует непрерывность отображения $S_1 : L^1[0,1] \to L^p[0,1]$.

<u>Теорема 3 (единственности).</u> *Пусть* $f(t) \in L^1[0,1]$ *и множество* $E \subset (0,1)$ *имеет предельную точку, принадлежащую* $(0,1)$. *Если* $S_1 f \big| E = 0$, *то* $f = 0$.

<u>Доказательство.</u> Разлагая ядро оператора в сумму бесконечной геометрической прогрессии, и применяя теорему Лебега о почленном интегрировании ряда, получаем, что при всех $x \in E$

$$S_1 f(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx} dt = \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n x^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\int_0^1 f(t) t^n dt\right) = 0 ,$$

откуда $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ для любого $n \ge 0$. Следовательно,

$$\int_0^1 f(t)p(t)dt = 0$$

для любого многочлена $p(t)$. Поскольку множество всех многочленов $P[0,1]$ плотно в $L^p[0,1]$, найдётся последовательность $p_n \in P[0,1]$, сходящаяся в $L^p[0,1]$ к $\overline{f}$. Переходя к пределу в равенстве

$$\int_0^1 f(t)p_n(t)dt = 0,$$

имеем

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0,$$

откуда $f(t) = 0$ п. в. Теорема доказана.

<u>Следствие 1.</u> *Оператор* S_1 *инъективен в пространстве* $L^1[0,1]$.

<u>Следствие 2.</u> *Оператор* S_1 *не сюръективен в* $L^p[0,1]$ $(1 < p \le 2)$.

<u>Доказательство.</u> Так как S_1 ограничен в $L^p[0,1]$ (см. [2, теорема 3]), он необратим в силу [3, теорема 10.8].

Преобразованием Гильберта функции $f: R \to C$ называется функция

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt.$$

Известно (см., например, [1]), что H – ограниченный оператор в $L^p(R)$ при $(1 < p < \infty)$, и справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf(x)}{x-t}dx. \qquad (2)$$

Следующая теорема устанавливает формулу обращения для преобразования S_1.

<u>Теорема 4.</u> *Пусть* $f \in L^p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$, $f^*(z) = S_1 f(z)$ $(z \in R)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(z)}{1-tz}dz.$$

<u>Доказательство.</u> Полагая в определении Z_+-преобразования Стилтьеса $z = 1/y$, имеем

$$f^*(z) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tz}dt = y\int_0^1 \frac{f(t)}{y-t}dt = y\pi Hf_1(y),$$

где

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Следовательно

$$Hf_1(y) = \frac{1}{\pi y} f^*\left(\frac{1}{y}\right).$$

Применяя формулу (2) и совершая обратную замену, получаем

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf_1(y)}{y-t}dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{y} f^*\left(\frac{1}{y}\right)}{y-t}dy = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\frac{1}{y} f^*\left(\frac{1}{y}\right)}{y-t}dy + \int_{0}^{\infty} \frac{\frac{1}{y} f^*\left(\frac{1}{y}\right)}{y-t}dy\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{z^2 f^*(z)}{z^2(1-tz)}dz + \int_{0}^{\infty} \frac{z^2 f^*(z)}{z^2(1-tz)}dz\right) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(z)}{1-tz}dz.$$

При $t \in [0,1]$ имеем

$$f(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(z)}{1-tz}dz.$$

Таким образом, теорема доказана.

Литература

1 Миротин, А. Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А. Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.

2 Ковалева, И. С. Преобразование Стилтьеса над полугруппой Z₊ / И. С. Ковалева // Творчество молодых 2012: сборник научных работ студентов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины»: в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; отв. ред. О. М. Демиденко. – Гомель, 2012. – Ч. 1. – С. 146–148.

3 Халмош, П. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2 / П. Халмош, В. Сандер; пер. с англ.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука. Главная редакция физ.- мат. литературы, 1985. – 160 с.

УДК 53(077)

М. А. Ковалева

УРОКИ РАЗЛИЧНОГО ТИПА ПРИ ИЗУЧЕНИИ СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЕГО ЭФФЕКТОВ

С учётом современных тенденций в организации образовательного процесса по физике предложены варианты занятий, целью которых является систематизация и углубление знаний учащихся о сложении скоростей в ходе изучения эффектов Доплера, Магнуса, Саньяка на уроках