УДК 535.8

АППАРАТНЫЕ ФУНКЦИИ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕНЕВЫХ ПРИБОРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Ю. И. Копилевич

Предложен метод расчета аппаратной функции теневого прибора с произвольным световым пучком, не требующий промежуточного определения моментов светового поля в случайно-неоднородной среде. Проведен анализ связи общих характеристик аппаратных функций одноходовых и двухходовых (зеркальных) приборов со свойствами четности функции пропускания по интенсивности теневой диафрагмы для пучков с плоским фазовым фронтом и при наличии кривизны. В качестве примера рассмотрена аппаратная функция теневого прибора с ножом Фуко и световым пучком прямоугольного сечения.

Из результатов работ [1, 2] следует, что в условиях применимости борновского приближения в задаче рассеяния светового пучка в объеме случайно-неоднородной среды, анализируемом произвольным оптическим прибором с фотоэлектрической регистрацией, для корреляционной функции $B(\tau)$ сигнала прибора $I(t)$ (t — время)

$$B(\tau) \equiv \langle [I(t+\tau) - \langle I(t+\tau)\rangle][I(t) - \langle I(t)\rangle]\rangle$$

(угловыми скобками обозначается усреднение по ансамблю реализаций исследуемой среды) справедливо выражение

$$B(\tau) = \int \Phi(\eta) \cos(\boldsymbol{\eta}\mathbf{v}\tau) P(\boldsymbol{\eta})\, d^2\boldsymbol{\eta}. \tag{1}$$

Здесь $\Phi(\eta)$, $\eta \equiv |\boldsymbol{\eta}|$ — трехмерный энергетический спектр поля флуктуаций диэлектрической проницаемости среды, предполагаемого статистически однородным, изотропным и стационарным; $\mathbf{v}$ — упорядоченная скорость движения среды относительно прибора (направленная перпендикулярно его оптической оси); $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной оси светового пучка в исследуемом объеме. Функция $P(\boldsymbol{\eta})$ в (1), отражающая специфику прибора, может быть названа аппаратной функцией, действительно, в силу (1) не только для корреляционной функции, но и для других квадратичных характеристик (дисперсии D, спектра S) сигнала прибора вклад различных составляющих спектра неоднородностей определяется этой функцией

$$D = B(0) = \int_0^\infty \Phi(\eta)\, \eta \left\{ \int_0^{2\pi} P[\eta, \varphi]\, d\varphi \right\} d\eta, \tag{2}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{v} \int_{|\omega|/v}^{\infty} \Phi(\eta) \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}} \times$$
$$\times \left\{ P\left[\eta, \arccos\left(\frac{\omega}{\eta v}\right)\right] + P\left[\eta, -\arccos\left(\frac{\omega}{\eta v}\right)\right] \right\} d\eta, \tag{3}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

где $P\ [\eta,\ \varphi]=P\ (\eta)$ в полярных координатах с углом φ, отсчитываемым от направления вектора $\mathbf{v}$.

Для теневых приборов различных типов с фотоэлектрической регистрацией аппаратные функции вычислялись в [2–5] для случая гауссовского светового пучка; при этом использовался аналитический вид статистических моментов поля такого пучка, прошедшего исследуемый объем. Применение развитого в этих работах метода для расчета аппаратных функций теневых приборов с пучками более общего вида наталкивается на сложность решения задачи распространения (в борновском приближении), так как в общем случае получить аналитические выражения для моментов рассеянного поля не удается. В настоящей работе проводится анализ свойств аппаратных функций теневых приборов (в том числе двухходовых [5]) с теневыми диафрагмами любого вида и произвольными световыми пучками. Полученные выражения допускают простой расчет этих функций, не требующий промежуточного решения задачи распространения. Рассмотренный в качестве примера случай теневого прибора с прямоугольным (на начальной плоскости) пучком и ножом Фуко представляет самостоятельный интерес.

1. Временная корреляционная функция флуктуаций сигнала теневого прибора выражается через четвертый двухвременной центрированный момент анализируемого светового поля $\Gamma(X;\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4;\ \tau)$ [3]

$$B(\tau)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^2\varkappa_1\Sigma(\varkappa_1)\int d^2\varkappa^2\Sigma(\varkappa_2)\int d^2\rho_1\int d^2\rho_2\int d^2\rho_3\int d^2\rho_4\times$$
$$\times\exp\{i\varkappa_1(\rho_1-\rho_2)+i\varkappa_2(\rho_3-\rho_4)\}\,\Gamma(X;\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4;\ \tau). \tag{4}$$

Здесь $\sum(\varkappa)$ — функция пропускания по интенсивности теневой диафрагмы;

$$\Gamma(X;\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4;\ \tau)\equiv\langle u(X,\ \rho_1,\ t+\tau)\,u^*(X,\ \rho_2,\ t+\tau)\,u(X,\ \rho_3,\ t)\,u^*(X,\ \rho_4,\ t)\rangle-$$
$$-\langle u(X,\ \rho_1,\ t+\tau)\,u^*(X,\ \rho_2,\ t+\tau)\rangle\langle u(X,\ \rho_3,\ t)\,u^*(X,\ \rho_4,\ t)\rangle;$$

$u(X,\ \rho,\ t)$, $\rho=(y,\ z)$ — случайное световое поле на входной плоскости приемной части прибора в момент t. Формула (4) может быть переписана в виде

$$B(\tau)=\int d^2\varkappa'\Sigma(\varkappa')\int d^2\varkappa''\Sigma(\varkappa'')\,\tilde{\Gamma}(X;\ \varkappa',\ \varkappa',\ \varkappa'',\ \varkappa'';\ \tau), \tag{5}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(X;\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \varkappa_3,\ \varkappa_4;\ \tau)\equiv\langle\tilde{u}(X,\ \varkappa_1,\ t+\tau)\,\tilde{u}^*(X,\ \varkappa_2,\ t+\tau)\,\tilde{u}(X,\ \varkappa_3,\ t)\times$$
$$\times\tilde{u}^*(X,\ \varkappa_4,\ t)\rangle-\langle\tilde{u}(X,\ \varkappa_1,\ t+\tau)\,\tilde{u}^*(X,\ \varkappa_2,\ t+\tau)\rangle\langle\tilde{u}(X,\ \varkappa_3,\ t)\,\tilde{u}^*(X,\ \varkappa_4,\ t)\rangle, \tag{6}$$

причем

$$\tilde{u}(X,\ \varkappa,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int u(X,\ \rho,\ t)\,e^{i\varkappa\rho}d^2\rho \tag{7}$$

преобразование Фурье анализируемого поля. Для рассмотрения одноходовых и двухходовых теневых приборов возникает необходимость определения момента (6) соответственно в двух типах задач распространения света через среду со случайными флуктуациями $\varepsilon'(\mathbf{r},\ t)\equiv\varepsilon'(x,\ \rho,\ t)$ диэлектрической проницаемости (см. рисунок, *а* и *б*). В задаче *а*, соответствующей одноходовым приборам, требуется найти момент (6) для поля $u\ (L,\ \rho,\ t)$ в плоскости $x=X=L$ (L — длина просматриваемого прибором объема), прошедшего слой случайно-неоднородной среды между плоскостями $x=0$ и $x=L$ (направление распространения совпадает с осью x). Двухходовым приборам соответствует [5] задача *б* (см. рисунок, *б*) определения момента (6) на плоскости $x=X=0$ для поля $u\ (o,\ \rho,\ t)$, прошедшего слой исследуемой среды толщиной L дважды (в плоскости $x=L$ установлено плоское зеркало). Эта задача обычным приемом [6] сводится к задаче типа *а* (см. рисунок, *в*) о нахождении момента светового поля $u\ (2L,\ \rho,\ t)$, прошедшего слой рассеивающей среды между плоскостями $x=0$ и $x=2L$, при-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

чем флуктуации диэлектрической проницаемости в этом слое удовлетворяют условию

$$\varepsilon'(x, \rho, t) = \varepsilon'(2L - x, \rho, t), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2L. \tag{8}$$

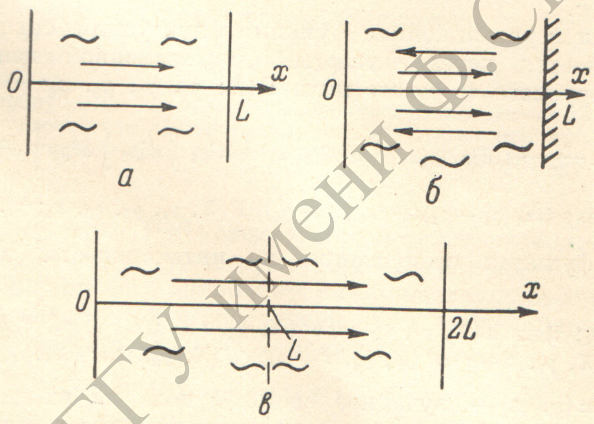
Во всех случаях *а*, *б* и *в* (см. рисунок) среда движется с упорядоченной скоростью **v**, перпендикулярной оси x, относительно системы координат (x, ρ), связанных с прибором.

При решении задач *а* и *б* будем пользоваться моделью дельта-коррелированных флуктуаций [6]

$$\langle \varepsilon'(x_1, \rho_1, t+\tau)\, \varepsilon'(x_2, \rho_2, t)\rangle = \delta(x_1 - x_2)\, A(\rho_1 - \rho_2, \tau), \quad 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant L; \tag{9}$$

при этом в силу (8) в задаче *b* имеем

$$\langle \varepsilon'(x_1, \rho_1, t+\tau)\, \varepsilon'(x_2, \rho_2, t)\rangle = \\ = \begin{cases} \delta(x_1 - x_2)\, A(\rho_1 - \rho_2, \tau), & (x_1 - L)(x_2 - L) \geqslant 0, \\ \delta(x_1 + x_2 - 2L)\, A(\rho_1 - \rho_2, \tau), & (x_1 - L)(x_2 - L) \leqslant 0, \end{cases} \\ 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 2L. \tag{10}$$



В формулах (9) и (10) эффективная пространственно-временная корреляционная функция $A(\rho, \tau)$ в предположении справедливости гипотезы «замороженной турбулентности» [7] выражается через энергетический спектр $\Phi(\eta)$ изотропной турбулентности

$$A(\rho, \tau) = 2\pi \int \Phi(\eta)\, e^{i\eta\rho + i\eta v\tau} d^2\eta. \tag{11}$$

2. Из параболического уравнения [6]

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} u(x, \rho, t) + \Delta_\perp u + k^2 \varepsilon(x, \rho, t)\, u = 0, \quad x \geqslant 0;$$

$$u(0, \rho, t) = u_0(\rho)$$

или эквивалентного ему интегрального уравнения для Фурье-преобразованного поля $\tilde{u}(x, \varkappa, t)$ из (7)

$$\tilde{u}(x, \varkappa, t) = e^{-i\frac{x}{2k}\varkappa^2} \left\{ \tilde{u}_0(\varkappa) + i\frac{k}{4\pi} \int_0^x dx' e^{i\frac{x'}{2k}\varkappa^2} \int d^2\rho' e^{i\varkappa\rho'} \varepsilon(x', \rho', t)\, u(x', \rho', t), \right.$$

$$\tilde{u}_0(\varkappa) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\rho\, e^{i\varkappa\rho} u_0(\rho)$$

легко найти первые члены борновского разложения поля $\tilde{u}$

$$\tilde{u}(x, \varkappa, t) = {}_0\tilde{u}(x, \varkappa) + {}_1\tilde{u}(x, \varkappa, t) + {}_2\tilde{u}(x, \varkappa, t) + \ldots;$$

$${}_j\tilde{u} \sim O(\langle \varepsilon'^2 \rangle^{j/2}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

в виде

$$
\left.\begin{aligned}
{}_0\tilde{u}(x, \varkappa) &= e^{-i\frac{x}{2k}\varkappa^2}\tilde{u}_0(\varkappa);\\
{}_1\tilde{u}(x, \varkappa, t) &= i\frac{k}{4\pi}\int_0^x dx'\int d^2\rho' e^{-i\frac{x-x'}{2k}\varkappa^2} e^{i\varkappa\rho'}\varepsilon'(x', \rho', t)\,{}_0u(x', \rho').
\end{aligned}\right\} \qquad (12)
$$

Формулы (12) позволяют дать выражение для момента (6) в плоскости $x = X$ для задач a и $в$ (см. рисунок)

$$
\left.\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}(X; \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4; \tau) = \tilde{\Gamma}_{1001} + \tilde{\Gamma}_{0110} + \tilde{\Gamma}_{1010} + \tilde{\Gamma}_{0101} + O\left(\langle\varepsilon'^2\rangle^{3/2}\right),\\
&\tilde{\Gamma}_{ijkl} \equiv \langle {}_i\tilde{u}(X, \varkappa_1, t+\tau)\,{}_j\tilde{u}^*(X, \varkappa_2, t+\tau)\,{}_k\tilde{u}(X, \varkappa_3, t)\,{}_l\tilde{u}^*(X, \varkappa_4, t)\rangle.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)
$$

При этом удобно использовать запись [см. (9)—(11)].

$$
\langle\varepsilon'(x_1, \rho_1, t+\tau)\,\varepsilon'(x_2, \rho_2, t)\rangle = 2\pi\Delta(x_1, x_2)\int \Phi(\eta)\, e^{i\eta(\rho_1-\rho_2)+i\eta v\tau} d^2\eta, \qquad (14)
$$

где для задачи a

$$
\Delta(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2), \qquad (15)
$$

а в случае, описываемом задачей $в$,

$$
\Delta(x_1, x_2) = \begin{cases} \delta(x_1 - x_2) & \text{при } (x_1 - L)(x_2 - L) \geqslant 0,\\ \delta(x_1 + x_2 - 2L) & \text{при } (x_1 - L)(x_2 - L) \leqslant 0. \end{cases} \qquad (16)
$$

Теперь по формуле (5) можно вычислить корреляционную функцию сигнала прибора в борновском приближении. Для одноходовых приборов (задача a) следует подставить в (5) выражение (13) при $X = L$, вычисленное с учетом (12), (14), (15). С точностью до $O\left(\langle\varepsilon'^2\rangle^{3/2}\right)$ имеем

$$
B_{\mathrm{I}}(\tau) = \frac{\pi k^2}{2}\int d^2\eta\,\Phi(\eta)\cos(\eta v\tau)\int_0^L |\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x)|^2\, dx, \qquad (17)
$$

где

$$
\psi(\eta, x) = e^{-i\frac{x}{2k}\eta^2}\int d^2\varkappa\,\Sigma(\varkappa)\,\tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa)\, e^{i\frac{x}{k}\varkappa\eta}, \qquad (18)
$$

$$
\tilde{\gamma}(\varkappa_1, \varkappa_2) \equiv \tilde{u}_0(\varkappa_1)\,\tilde{u}_0(\varkappa_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint d^2\rho_1 d^2\rho_2\, e^{i(\varkappa_1\rho_1 - \varkappa_2\rho_2)}\, u_0(\rho_1)\, u_0^*(\rho_2).
$$

Для случая двухходового теневого прибора в (5) следует подставить момент (13) при $X = 2L$, соответствующий задаче $в$. Воспользовавшись формулами (12), (14), (16), получим

$$
B_{\mathrm{II}}(\tau) = B_1(\tau) + B_2(\tau), \qquad (19)
$$

где

$$
B_1(\tau) = \frac{\pi k^2}{2}\int d^2\eta\,\Phi(\eta)\cos(\eta v\tau)\int_0^{2L} |\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x)|^2\, dx \qquad (20)
$$

совпадает с корреляционной функцией сигнала аналогичного одноходового прибора с базой $2L$, а

$$
\begin{aligned}
B_2(\tau) = \frac{\pi k^2}{2}\int d^2\eta\,\Phi(\eta)\cos(\eta v\tau)\int_0^{2L} [\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x)] \times\\
\times [\psi(\eta, 2L - x) - \psi^*(-\eta, 2L - x)]^*\, dx
\end{aligned} \qquad (21)
$$

[функция ψ по-прежнему дается выражением (18)].

Полученные результаты без труда обобщаются на случай частично-когерентного светового пучка [4]; при этом следует только в формуле (18)

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

понимать под величиной $\tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa)$ преобразование Фурье от функции когерентности второго порядка [7] $\gamma(\rho_1, \rho_2) \equiv \overline{u_0(\rho_1) u_0^*(\rho_2)}$ (черта сверху обозначает усреднение по флуктуациям поля на начальной плоскости)

$$\tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\rho_1 e^{i(\varkappa-\eta)\rho_1} \int d^2\rho_2 e^{-i\varkappa\rho_2} \gamma(\rho_1, \rho_2).$$

3. Выясним теперь общие свойства аппаратной функции $P(\eta)$ теневого прибора. Из (1) и (17)—(21) следует, что для одноходовых приборов

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^L |\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x)|^2 \, dx, \tag{22}$$

а для двухходовых

$$P_{\mathrm{II}}(\eta) = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^{2L} \{|\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x)|^2 + [\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x)] \times \\ \times [\psi(\eta, 2L - x) - \psi^*(-\eta, 2L - x)]^*\} \, dx. \tag{23}$$

Анализ результатов проведем для четных пучков, когда $u_0(-\rho) = u_0(\rho)$. Будем рассматривать два класса теневых диафрагм:

1) «нечетные» диафрагмы, для которых

$$\Sigma(\varkappa) = \frac{1}{2}[1 + \sigma(\varkappa)], \quad \sigma(-\varkappa) = -\sigma(\varkappa) \tag{24}$$

(характерным примером теневой диафрагмы, относящейся к этому классу, служит нож Фуко);

2) диафрагмы с четными функциями пропускания

$$\Sigma(-\varkappa) = \Sigma(\varkappa). \tag{25}$$

Напомним, что физический смысл функции пропускания по интенсивности накладывает ограничения на возможные значения $\sum(\varkappa)$ и $\sigma(\varkappa)$

$$0 \leqslant \Sigma(\varkappa) \leqslant 1; \quad -1 \leqslant \sigma(\varkappa) \leqslant 1.$$

В случае «нечетной» теневой диафрагмы из (18), используя четность функции $\tilde{u}_0(\varkappa)$ и формулу (24), получим

$$\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x) = \int d^2\varkappa \sigma(\varkappa) \left\{ \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \cos\left[\frac{x}{2k}(2\varkappa\eta - \eta^2)\right] - \\ - \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \sin\left[\frac{x}{2k}(2\varkappa\eta - \eta^2)\right]\right\} + i \int d^2\varkappa \left\{ \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \sin\left[\frac{x}{2k}(2\varkappa\eta - \eta^2)\right] - \\ - \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \cos\left[\frac{x}{2k}(2\varkappa\eta - \eta^2)\right]\right\}. \tag{26}$$

Пусть выполнены условия

$$\frac{L}{ka^2} \ll 1, \quad \frac{L}{kl_0^2} \ll 1 \tag{27}$$

(a — характерный размер поперечного сечения пучка, l_0 — минимальный масштаб неоднородностей в среде), обеспечивающие слабость дифракционных эффектов [7]; тогда

$$\left|\frac{x}{k}\varkappa\eta\right| \lessdot \left|\frac{L}{kal_0}\right| \ll 1; \quad \left|\frac{x}{k}\eta^2\right| \lessdot \left|\frac{L}{kl_0^2}\right| \ll 1. \tag{28}$$

С учетом (28) перепишем (26) в виде

$$\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x) \simeq \int d^2\varkappa \sigma(\varkappa) \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) - i \int d^2\varkappa \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

(строго говоря, эта формула справедлива лишь асимптотически при L/ka^2, $L/kl_0^2 \to 0$) и после подстановки в (22) получим выражение для аппаратной функции сигнала одноходового теневого прибора с «нечетной» диафрагмой

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) = \frac{\pi k^2 L}{l^2} \left\{ \left| \int d^2\varkappa \sigma(\varkappa) \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right|^2 + \left| \int d^2\varkappa \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right|^2 \right\}. \tag{29}$$

Аналогично из (23) следует формула для аппаратной функции P_{II} двухходового прибора, отличающаяся от (29) только множителем

$$P_{\mathrm{II}}(\eta) = 4P_{\mathrm{I}}(\eta), \tag{30}$$

т. е. P_{II} в два раза превышает аппаратную функцию однотипного одноходового прибора с удвоенной базой [5]. Полезно еще выписать асимптотику функции P_{I} для крупномасштабных (по сравнению с поперечными размерами пучка) неоднородностей. Для этого подставим в (29) функцию $\tilde{\gamma}$ в виде

$$\tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \equiv \tilde{u}_0(\varkappa - \eta)\, \tilde{u}_0^*(\varkappa) = |\tilde{u}_0(\varkappa)|^2 - \\ - (\eta \nabla \tilde{u}_0(\varkappa))\, \tilde{u}_0^*(\varkappa) + \frac{1}{2} [\eta (\eta \nabla) \nabla \tilde{u}_0(\varkappa)]\, \tilde{u}_0^*(\varkappa) + o(\eta^2)$$

и воспользуемся четностью $\tilde{u}_0(\varkappa)$ и формулой (24). В результате имеем

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) = \frac{\pi k^2 L}{2} \eta^2 \left\{ \int d^2\varkappa \sigma(\varkappa) \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\eta}{\eta} \nabla \tilde{u}_0(\varkappa) \right) \tilde{u}_0^*(\varkappa) \right] \right\}^2 + o(\eta^2). \tag{31}$$

Для теневой диафрагмы с четной функцией пропускания из (18) при условиях (28) получим

$$\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x) = 2i \int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \left\{ \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \sin \left[\frac{x}{2k} (2\varkappa\eta - \eta^2) \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \cos \left[\frac{x}{2k} (2\varkappa\eta - \eta^2) \right] \right\} \simeq i \frac{x}{k} \int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) (2\varkappa\eta - \eta^2) \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) + \\ + 2i \int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa). \tag{32}$$

Теперь из (22) и (32) получаем

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) = \frac{\pi L^3}{6} \left[\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) (2\varkappa\eta - \eta^2) \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right]^2 + \\ + \pi k L^2 \left[\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) (2\varkappa\eta - \eta^2) \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right] \left[\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right] + \\ + 2\pi k^2 L \left[\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right]^2. \tag{33}$$

Для пучка с плоским (при $x = 0$) фазовым фронтом поле $u_0(\rho)$ можно считать вещественным; при этом $\operatorname{Im} \tilde{\gamma} = 0$. Таким образом, в случае плоского или слабо искривленного фазового фронта пучка

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) \simeq \frac{\pi L^3}{6} \left[\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) (2\varkappa\eta - \eta^2) \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa) \right]^2 = \\ = \frac{\pi L^3}{6} \eta^4 \left\{ \int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \left[|\tilde{u}_0(\varkappa)|^2 + 2 \frac{\varkappa\eta}{\eta} \operatorname{Re} \left(\tilde{u}_0^*(\varkappa) \frac{\eta}{\eta} \nabla \tilde{u}_0(\varkappa) \right) \right] \right\}^2 + o(\eta^4), \tag{34}$$

при этом для двухходового прибора из (23) следует

$$P_{\mathrm{II}}(\eta) = 12 P_{\mathrm{I}}(\eta),$$

что в полтора раза превышает величину аппаратной функции аналогичного одноходового прибора с удвоенной базой (ср. [5]).

Напротив, если кривизна исходного фазового фронта достаточно велика, так что последнее слагаемое в (33) дает главный вклад в величину аппаратной функции, имеем

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) \simeq 2\pi k^2 L \left[\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \operatorname{Im} \tilde{\gamma}(\varkappa - \eta, \varkappa)\right]^2 =$$

$$= \frac{\pi k^2 L}{2} \eta^4 \left\{\int d^2\varkappa \Sigma(\varkappa) \operatorname{Im}\left[\tilde{u}_0^*(\varkappa) \frac{\eta}{\eta}\left(\frac{\eta}{\eta}\nabla\right)\nabla\tilde{u}_0(\varkappa)\right]\right\}^2 + o(\eta^4). \tag{35}$$

В этом случае связь $P_{\mathrm{II}}(\eta)$ с $P_{\mathrm{I}}(\eta)$ оказывается такой же, как для приборов с «нечетной» диафрагмой (30): $P_{\mathrm{II}}(\eta) = 4P_{\mathrm{I}}(\eta)$.

Полученный результат об изменении характера зависимости аппаратной функции от базы прибора с возрастанием кривизны фронта пучка можно проиллюстрировать на простом примере теневого прибора с гауссовским пучком [7]

$$u_0(\rho) = A \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2a^2} - ik\frac{\rho^2}{2F}\right\}$$

и теневой диафрагмой с функцией пропускания

$$\Sigma(\varkappa) = 1 - \exp\left\{-\varkappa^2 \frac{a^2}{1 + \left(\frac{ka^2}{F}\right)^2}\right\}$$

(эффективный радиус теневой диафрагмы взят равным характерному размеру пятна в теневой плоскости при отсутствии неоднородностей в исследуемом объеме). Пусть выполнены условия (27) и $ka^2/F \ll 1$. Тогда из (22) для рассматриваемого случая нетрудно получить

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) = \frac{\pi}{96} E^2 e^{-\frac{3}{4}a^2\eta^2} \eta^4 (ka^2)^3 \left[\left(\frac{L}{ka^2} - \frac{ka^2}{F}\right)^3 + \left(\frac{ka^2}{F}\right)^3\right], \tag{36}$$

где $E \equiv \pi |A|^2 a^2$ — поток энергии через поперечное сечение пучка. Если радиус кривизны F фазового фронта велик, так что $L/ka^2 \gg ka^2/F$, аппаратная функция пропорциональна кубу базы прибора L

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) \simeq \frac{\pi L^3}{96} E^2 e^{-\frac{3}{4}a^2\eta^2} \eta^4$$

в соответствии с (34). В противоположном случае при $L/ka^2 \ll ka^2/F$ (т. е. при достаточно большой кривизне фронта $1/F$) из (36) получаем линейную зависимость от базы (35)

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) \simeq \frac{\pi L}{32} E^2 e^{-\frac{3}{4}a^2\eta^2} \eta^4 (ka^2)^4 F^{-2}.$$

4. В качестве примера применения соотношений, полученных в п. 2, приведем расчет аппаратной функции теневого прибора с вполне когерентным световым пучком вида

$$u_0(\rho) = \begin{cases} A = \mathrm{const} & \text{при } |y| \leqslant a, \quad |z| \leqslant b, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{37}$$

и ножом Фуко, которому отвечает функция пропускания

$$\Sigma(\varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa_y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \varkappa_y < 0, \end{cases} \quad \varkappa = (\varkappa_y, \varkappa_z). \tag{38}$$

Подставляя в (18) преобразование Фурье поля (37)

$$\tilde{u}_0(\varkappa) = \frac{2abA}{\pi} \frac{\sin(a\varkappa_y)}{a\varkappa_y} \frac{\sin(b\varkappa_z)}{b\varkappa_z},$$

имеем

$$\psi(\eta, x) = e^{-i\frac{x}{2k}\eta^2} \frac{2ab}{\pi} |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(b\varkappa_z)}{b\varkappa_z} e^{i\frac{x}{k}\varkappa_z\eta_z} d\varkappa_z \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(a\varkappa_y)}{a\varkappa_y} e^{i\frac{x}{k}\varkappa_y\eta_y} d\varkappa_y.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

Отсюда при условиях (27) легко получить

$$\psi(\eta, x) - \psi^*(-\eta, x) \simeq 4 \frac{\sin(b\eta_z)}{\eta_z} \frac{\cos(a\eta_y)}{\eta_y} \operatorname{Cin}(a\eta_y), \tag{39}$$

где родственная интегральному косинусу функция $\operatorname{Cin}(z)$ есть [8]

$$\operatorname{Cin}(z) = \ln z - \operatorname{Ci}(z) + \gamma,$$

причем выбираются главные значения $\ln z$ и интегрального косинуса $\operatorname{Ci}(z)$, а γ — постоянная Эйлера. Теперь из (22) и (39) находим аппаратную функцию одноходового прибора (31)

$$P_{\mathrm{I}}(\eta) = \frac{\pi k^2 L}{2} E^2 \left[\frac{\sin(b\eta_z)}{b\eta_z}\right]^2 \cos^2(a\eta_y) \left[\frac{\operatorname{Cin}(a\eta_y)}{a\eta_y}\right]^2 = \frac{\pi k^2 L}{2} E^2 (a\eta_y)^2 + O(\eta^4), \tag{40}$$

где $E \equiv ab\,|A|^2$ — поток световой энергии через поперечное сечение пучка. Для двухходового прибора из (23) и (39) следует уже известное соотношение (30): $P_{\mathrm{II}}(\eta) = 4P_{\mathrm{I}}(\eta)$.

Литература

[1] Ю. И. Копилевич, Г. Б. Сочилин. Опт. и спектр., *41*, 136, 1976.
[2] Ю. И. Копилевич, Г. Б. Сочилин. Опт. и спектр., *43*, 1138, 1977.
[3] Ю. И. Копилевич. ПМТФ, № 1, 73, 1978.
[4] Ю. И. Копилевич, В. В. Фролов. Опт. и спектр., *46*, 333, 1979.
[5] Ю. И. Копилевич, Г. Б. Сочилин. Опт. и спектр., *50*, вып. 3, 1981.
[6] В. И. Кляцкин. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. «Наука», М., 1975.
[7] А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. «Наука», М., 1976.
[8] Ф. Олвер. Введение в асимптотические методы и специальные функции. «Наука», М., 1978.

Поступило в Редакцию 19 октября 1979 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ