

ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВЫХ СИСТЕМ

Е. И. Сукач, Д. В. Ратобильская, Запольский Н.Н., Большакова Г.И.

Излагается подход к исследованию производительности (пропускной способности) потоковых систем, основанный на методе вероятностно-алгебраического моделирования, позволяющий определить вероятностные значения характеристик функционирования исследуемых систем по аналогичным характеристикам составляющих их компонентов.

Введение

К классу потоковых систем относятся сложные системы, функционирование которых подчиняется следующим условиям: потоки на входе переходника суммируются; поток на выходе переходника равен входному потоку, делённому на число выходов; суммарный поток не может превышать на входе/выходе 100%. Примерами таких систем являются производственные, вычислительные и транспортные системы, которые можно представить в виде графовых структур.

При эксплуатации потоковых систем имеется, как правило, несколько вариантов организации выполнения ими предписанных функций. Поэтому оценка производительности (пропускной способности) таких систем, должна производиться с учётом данного фактора. Выбор лучшего варианта системы по выполнению заданной функции должен основываться на математически обоснованном сравнении вариантов, отличающихся как структурной организацией, так и параметрами элементарных участков, составляющих систему.

С позиций анализа пропускной способности потоковых систем применимы как статические, так и динамические модели. Для статического исследования характеристик потоковых систем используются аналитические методы и средства их автоматизации, такие как АРБИТР (ПК АСМ СЗМА) [1] – программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и Relx Reliability Studio [2] – программная среда, включающая различные методы анализа надёжности и реализующая разнообразные формы задания моделей (графы, деревья отказов). Применение указанных методов ограничено рассмотрением двух значений пропускной способности (0, 1) при статическом рассмотрении исследуемых систем.

К динамическим моделям можно отнести статистическое имитационное моделирование, предполагающее рассмотрение различных траекторий функционирования исследуемых систем во времени с последующим усреднением полученных результатов моделирования. В частности, с целью определения максимальной пропускной способности сети, функционирующей в условиях случайных воздействий, разработан метод, основанный на сочетании алгоритма Форда-Фалкерсона и метода Монте-Карло [3]. При этом изменение параметров функционирования

исследуемой системы требует проведения очередной серии имитационных экспериментов и последующую обработку результатов.

В докладе излагается метод вероятностно-алгебраическое моделирования (ВАЛМ), автоматизирующий этапы построения и эксплуатации статических моделей потоковых систем, отражающих одномоментное взаимодействие компонентов исследуемых систем, и динамических моделей, описывающих процессы эволюции отдельных компонентов и всей системы во времени.

Общая характеристика метода вероятностно-алгебраического моделирования

Метод реализуется выполнением четырёх этапов, которые имеют следующее содержание.

Этап 1. Первичное вероятностно-алгебраическое моделирование. На этом этапе осуществляется полная формализованная постановка задачи ВАЛМ, которая включает три взаимосвязанных части.

1. На основе выделенной совокупности элементарных компонентов системы $K=\{K_i\}$ и функциональных отношений между ними $F=\{F_j\}$ разрабатывается графическая схема $G(F,K)$ исследуемой системы. Здесь F обозначает множество вершин, определяющих связи между компонентами системы, K – множество рёбер, соответствующих компонентам исследуемой системы и промежуточным результатам моделирования.

2. На основе анализа эмпирических данных определяются параметры зависимостей, определяющих изменения вероятностных характеристик компонентов исследуемой системы. Реализуется первичное вероятностное моделирование, целью которого является определение динамического изменения значений векторов вероятностей $P^it = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_n^{it}), \sum_{j=1}^n p_j^i = 1$, свидетельствующих об изменении производительности отдельных компонентов.

3. С учётом целей исследования задаётся критерий успешности функционирования системы, который определяет допустимые границы изменения контролируемых параметров пропускной способности системы.

Этап 2. Построение алгебраической модели, определяющей процесс функционирования системы. На этом этапе на основе графической схемы исследуемой системы $G(F,K)$, с использованием множества функций строится композиция элементарных устройств модели, соответствующих выделенным компонентам системы. Далее, на основе композиции устройств модели $Z = Y_1 * Y_2 * \dots * Y_m$ с учётом введённых функций, отражающих отношения между компонентами системы, определяется последовательность алгебраических преобразований. В символьном виде алгебраическая модель записывается следующим образом:

$$F_1(F_2(Y_1, Y_2, Y_3(Y_3, Y_5), \dots, F_z(Y_{m-1}, Y_m))), \quad (1)$$

где $F = \{F_j\}, j = \overline{1, z}$ – множество функций, определяющих отношения между элементарными устройствами модели $\{Y_i, i = \overline{1, m}\}$. Аргументами функций, описывающих взаимодействие компонентов являются состояния компонентов, вероятностные значения которых задаются векторами вероятностей $\{P^i, i = \overline{1, m}\}$. В качестве функций, описывающих алгебраическую модель системы могут быть использованы как детерминированные функции, такие как максимум, минимум, разность, сумма, различные схемы k/n и другие, так и вероятностные функции, позволяющие отразить неопределённость результата взаимодействия компонентов системы.

Этап 3. Реализация расчётной вероятностной модели системы. На этом этапе осуществляется преобразование алгебраической модели, в вероятностную форму, позволяющую непосредственно выполнить расчёты вероятностных показателей надёжности исследуемой системы $P^s = P(\{P^i, P^j, Z\}, i, j = \overline{1, m})$.

Вероятностная модель реализуется путём последовательной свёртки векторов вероятностей устройств модели с учётом уровня вложенности функций и коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования.

Для композиции элементарных устройств модели $Z = Y_i * Y_j$, порождающей алгебраическую модель вида $F(Y_i, Y_j)$, вероятностная модель позволяет вычислить элементы результирующего вектора вероятностей P^s системы Z по формуле:

$$p_k^s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ijk} p_i^1 p_j^2, \text{ где } i, j, k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Коэффициенты a_{ijk} называются коэффициентами вероятностно-алгебраического моделирования и удовлетворяют следующим требованиям:

$$\forall i, j, k \quad a_{ijk} \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^n a_{ijk} = 1. \quad (3)$$

Частным случаем определения отношений между устройствами модели является использование детерминированной функцией $F(i, j)$. При этом коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ijk} = 1, & \text{если } k = F(i, j) \\ a_{ijk} = 0, & \text{если } k \neq F(i, j) \end{cases} \quad (4)$$

Этап 4. Выполнение расчётов вероятностных характеристик системы. На заключительном этапе с использованием вероятностной расчётной модели вычисляются показатели, необходимые для решения различных задач системного анализа производительности исследуемых систем. Результаты расчётов могут быть использованы для оценки вероятностных свойств системы, сравнения и выбора вариантов её структуры, проектирования систем, обеспечивающих заданный уровень производительности.

Пример определения вероятностной характеристики пропускной способности потоковой системы

Для примера рассмотрим потоковую систему, которая представляет собой последовательное соединение дублированного и троированного звеньев. Графовая структура системы представлена на рисунке 1.

Компонентами исследуемой системы являются участки системы $K = \{K_i\}, i = \overline{1,11}$, пропускная способность которых динамически изменяется в процессе эксплуатации, что сказывается на производительности всей системы.

Участки системы описываются однотипным образом и характеризуются множеством состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{1,20}$, соответствующих определённому уровню пропускной способности. Состояние S_j описывает участок, которому соответствует максимальная пропускная способность PR_j . Состояние S_{20} характеризует критический уровень пропускной способности PR_{20} , при котором она становится меньше допустимой: $PR_{20} < PR_d$. Состояния S_2, \dots, S_{19} являются промежуточными. Количество состояний модели определяется исследователем при задании параметров моделирования.

Предполагается, что начальные значения вероятностей состояний участков имеют вид $P^{i0} = (1, 0, \dots, 0), i = \overline{1,11}$. В результате первичного моделирования формируются динамические значения векторов вероятностей, характеризующих уровень износа участков на заданном промежутке времени: $P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, \dots, p_{20}^{it}), \sum_{j=1}^{20} p_j^{it} = 1, i = \overline{1,11}, t = \overline{1,200}$.

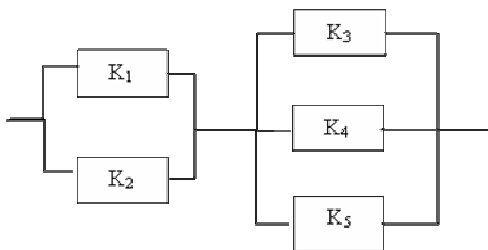


Рис. 1. Графовая структура потоковой системы

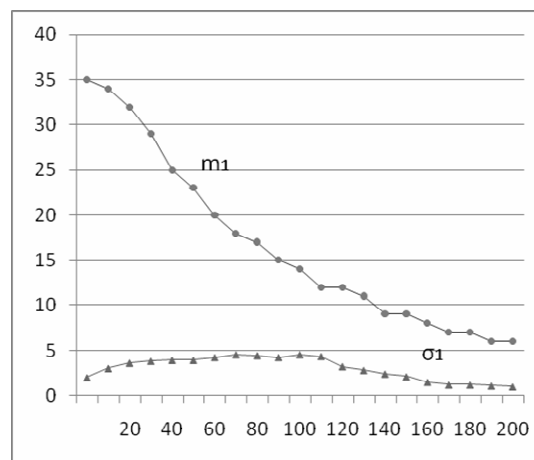


Рис.2. Динамические значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения пропускной способности (m_1, σ_1) потоковой системы

Полученные вектора являются исходными данными для вероятностно-алгебраического моделирования исследуемой системы. С учётом особенностей исследуемой системы в расчётной вероятностной модели

используются функция $F_1(i, j) = \min(i + j - 1, n)$ для параллельных участков сети и функция $F_2(i, j) = \max(i, j)$ для последовательных участков.

Результатом моделирования являются вероятностные характеристики пропускной способности сети ($P_{PR^{st}}, PR^{st}$), где PR^{st} - значения пропускной способности сети, $P_{PR^{st}}$ - вероятности значений пропускной способности. По результатам моделирования вычисляются математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение вероятностных значений пропускной способности (m_1, σ_1), представленные на рисунке 2.

Применение ВАЛМ позволяет учесть вероятностную природу производительности потоковой системы и решить следующие задачи:

- одномоментно и в динамике провести сравнительный анализ различных структурных вариантов системы;
- подобрать параметры компонентов, обеспечивающих необходимый уровень производительности системы;
- оценить влияние параметров производительности участков на эффективность выполнения заданной функции исследуемой системой;
- получить в символьном виде значения вектора вероятностей производительности системы.

Литература:

1. Нозик, А.А Программный комплекс "АРБИТР" для моделирования, расчета надежности и безопасности систем / А.А.Нозик, А.С.Можаев //В информ. сборнике: "Монтаж и наладка средств автоматизации и связи" - 2007, №2, – С. 32-40.
2. Источник сети Интернет, адрес: <http://www.relex.com/products>
3. Максимей, И.В Определение интегрального максимального потока в региональной сети с помощью имитационного моделирования/ И.В. Максимей, Е.И. Сукач, П.В. Гируц// Математические системы и машины.- 2008,-N2.-128-136.

Сукач Елена Ивановна, доцент кафедры математических проблем управления Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, кандидат технических наук, доцент, elena.sukach@mail.ru

Ратобылская Дарья Викторовна, аспирант кафедры математических проблем управления Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, dar_ja@tut.by

Большакова Галина Ивановна, ассистент кафедры математических проблем управления Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины

Запольский Николай Николаевич, аспирант кафедры математических проблем управления Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины