Федеральное агентство по образованию РФ

БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика И.Г. Петровского
филиал в г. Новозыбкове

кафедра математики, физики и информатики

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Н.В.Максименко, Е.В.Вакулина,
О.М. Дерюжкова, С.М. Кучин.

Теоретико-полевые основы электродинамических процессов

БРЯНСК 2010

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Федеральное агентство по образованию РФ

БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика И.Г. Петровского
филиал в г. Новозыбкове

кафедра математики, физики и информатики

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Н.В.Максименко, Е.В.Вакулина,
О.М. Дерюжкова, С.М. Кучин.

Теоретико-полевые основы электродинамических процессов

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рекомендовано учебно-методическим советом филиала БГУ в г.Новозыбкове в качестве учебного пособия для студентов физико-математических специальностей педагогических вузов

БРЯНСК 2010

ББК 22.161.68я73

Рецензенты

Андреев В.В.- заведующий кафедрой теоретической физики УО “ГГУ им. Ф. Скорины”, доцент, кандидат физико-математических наук.

Бабич А.А.- заведующий кафедрой высшей математики УО “ГГТУ им. П.О. Сухого”, доцент, кандидат физико-математических наук.

Максименко Н.В, Вакулина Е.В, Дерюжкова О.М, Кучин С.М. **“**Теоретико-полевые основы электродинамических процессов**”.** Учебное пособие спецкурса для студентов физико-математических специальностей.-Брянск: РИО БГУ, 2010.-56с.

ISBN

Учебное пособие содержит необходимые современные теоретические элементы методов расчета электродинамических процессов элементарных частиц. Изложена теория взаимодействующих полей на ковариантного метода функций Грина в рамках теории возмущений и асимптотических приближений. В доступной форме показано получение основных соотношений, необходимых для проведения расчетов вероятностей распадов и сечений процессов.

ББК 22.161.68я73

ISBN

Максименко Н.В. и др, текст, 2010
РИО БГУ, 2010

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие………………………………………………………………………..
Тема 1. Лагранжев формализм для непрерывных систем.………………
1. Переход от дискретной системы к непрерывной……………………………
2. Вариационный принцип для непрерывной одномерной системы (принцип наименьшего действия)…………………………………………………………..

Тема 2. Лагранжев релятивистски-ковариантный формализм для непрерывных систем……………………………………………………………
1.Пространство Минковского и релятивистское обобщение метода Лагранжа……………………………………………………………………………
2.Требования, предъявляемые к лагранжиану поля……………………....
3.Тензор энергии-импульса непрерывной системы…………………………
4. Плотность тока вероятности непрерывной системы……………………...

Тема 3. Поля свободных элементарных частиц……………………………..
1.Скалярное вещественное поле……………………………………………..
2.Тензор энергии – импульса скалярного вещественного поля……………..
3.Импульсное представление функций скалярного вещественного поля…..
4.Физическая интерпретация полевых и динамических величин……………..

Тема 4. Уравнения электромагнитного поля в релятивистски-ковариантной форме……………………………………………………………
1.Электромагнитное поле………………………………………………………..
2.Тензор энергии-импульса электромагнитного поля………………………
3.Импульсное представление электромагнитного поля…………………….

Тема 5. Релятивистски-ковариантная форма уравнений Дирака………
1.Уравнение Дирака………………………………………………………………
2.Определение оператора спина дираковских частиц………………………….
3.Лагранжев формализм поля Дирака……………………………………..
4.Решение уравнения Дирака и определение динамических переменных в импульсном представлении……………………………………………………..

Тема 6. Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем………………………………………………………………………………..
1.Лагранжев формализм взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами……………………………………………………
2.Принцип локальной калибровочной инвариантности в теории взаимодействующих полей…………………………………………………

3.Закон сохранения тока, как следствие принципа калибровочной инвариантности…………………………………………………………….

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Тема 7. Решение уравнений для взаимодействующих полей методом теории возмущений на основе функции Грина………………………………
1.Решение полевых уравнений движения на основе функции Грина………..
2.Функция Грина спинорного и фотонного полей……………………………
3.Определение амплитуды процессов взаимодействия фотонов с заряженными частицами в рамках теории возмущений………………………

Тема 8. Рассеяние электронов в кулоновском поле………………………
1.Определение амплитуды рассеяния электронов в кулоновском поле……
2.Определение сечений рассеяния электронов в кулоновском поле……….
3.Вычисление следов $\gamma-$частиц и кинематических соотношений процесса рассеяния………………………………………………………………………

Библиографический список…………………………………………………

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой попытку в простом варианте изложить квантовомеханические основы расчетов электродинамических процессов в рамках классической теории полей, сопоставляемых элементарным частицам. При написании пособия использован материал спецкурсов, прочитанных в Гомельском университете им. Ф. Скорины и Новозыбковском филиале Брянского государственного университета им. И.Г. Петровского.

Содержание и методическая компоновка пособия определилась прежде всего тем, чтобы оно было доступным и могло служить основой для последующего, более углубленного, изучения квантовой теории поля и физики элементарных частиц.

Теория поля может быть построена по аналогии и использовании математического аппарата классической механики систем материальных точек. В рамках классической механики мы встречаемся с системами, которые следует рассматривать как непрерывные. Поэтому в пособии в начале рассматривается пример перехода от дискретной механической системы к непрерывной в рамках формализма Лагранжа, который наиболее приспособлен для последующего описания релятивистских непрерывных систем.

Учитывая в лагранжевом формализме постулаты специальной теории относительности и дополняя вариационные принципы аналитической механики требованиями релятивистской теории, определены динамические переменные в четырехмерном пространстве-времени, тем самым установлены релятивистские уравнения движения для электромагнитного поля, а также скалярных и спинорных частиц.

Уравнения взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами получены на основе принципов калибровочной инвариантности. Для решения этих уравнений определены в рамках ковариантного метода функций Грина (метода функций распределения). Затем, используя методы теории возмущений и свойства полевых функций на асимптотике, определены амплитуды и сечения конкретных электродинамических процессов.

В основе современной теории элементарных частиц лежат понятия полей. Каждому типу элементарных частиц сопоставляется своё поле. Посредством квантов поля осуществляется взаимодействие. Считается, что задана полевая функция, если каждой точке пространства и времени ставится в соответствие одна или несколько величин $U_n(\vec{r},t)(n = 1,2\ldots)$. Полевые функции удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям движения, которые содержат информацию о физическом состоянии физической системы.

Классические поля, соответствующие определённым элементарным частицам, являются непрерывными волновыми функциями, обладающими определенными трансформационными свойствами относительно преобразования пространственно-временных координат.

Одним из наиболее подходящих формализмов для построения уравнений движения для полевых функций является математический аппарат не-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

прерывных систем, в котором используются вариационные принципы. В системе вариационных принципов лагранжев формализм более приспособлен для учета квантовомеханических и трансформационных релятивистских свойств элементарных частиц.

Тема 1. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ.

1. Переход от дискретной системы к непрерывной.
2. Вариационный принцип для непрерывной одномерной системы (принцип наименьшего действия).

На конкретном примере продемонстрируем, каким образом можно построить лагранжев формализм при переходе от дискретных систем к непрерывным.

1. Переход от дискретной системы к непрерывной.

Для простоты рассмотрим дискретную модель бесконечно длинной одномерной струны. Дискретная модель представляется в виде бесконечной одномерной совокупности материальных точек массы Δm, расположенных на расстоянии Δx друг от друга, и соединенных пружинами жесткости k. Обозначим продольное смещение n-ой материальной точки из положения равновесия в момент времени t величиной $\eta_n(t)$, а скорость смещения - $\dot{\eta}_n(t) = \frac{d\eta_n}{dt}$.

Функция Лагранжа этой дискретной модели имеет вид:

$$L = \sum_n \left[\frac{\Delta m \dot{\eta}_n^2}{2} - k\,\frac{(\eta_n - \eta_{n-1})^2}{2}\right]. \quad (1.1)$$

В выражении (1.1) потенциальная энергия взаимодействия материальных точек посредством потенциальной упругой силы определена так:

$$U = \sum_n k\,\frac{(\eta_n - \eta_{n-1})^2}{2} = \cdots + k\,\frac{(\eta_n - \eta_{n-1})^2}{2} + k\,\frac{(\eta_{n+1} - \eta_n)^2}{2} + \quad (1.2)$$

Из соотношения (1.2) следует

$$F_n = -\frac{\partial U}{\partial \eta_n} = -k(\eta_n - \eta_{n-1}) + k(\eta_{n+1} - \eta_n). \quad (1.3)$$

Следовательно, F_n - сила, с которой материальные точки *«n-1»* и *«n+1»* действуют на материальную точку *«n»*.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Уравнения Лагранжа-Эйлера, которые можно получить на основе функции Лагранжа (1.1), выглядят так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_n} = 0. \tag{1.4}$$

Как видно из (1.4) смещение η_n является обобщенной координатой системы.

Используя уравнение (1.1) и (1.4), получим:

$$\Delta m \ddot{\eta}_n + k(\eta_n - \eta_{n-1}) - k(\eta_{n+1} - \eta_n) = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, если система состоит из бесконечного числа материальных точек, то такая система имеет бесконечное число степеней свободы и этим степеням свободы соответствует бесконечное число обобщенных координат и уравнений движения (1.5), которым удовлетворяют эти координаты.

Перейдем теперь к непрерывной одномерной системе типа одномерной бесконечной струны и рассмотрим распространение продольных возмущений в этой струне. Для этого осуществим следующую схему замены:
$\eta_n(t) \to \eta(x,t), lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x} = \rho(x)$ - линейная плотность.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\eta(x+\Delta x,t) - \eta(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x},$$

тогда функция Лагранжа (1.1) примет вид:

$$L = \sum_n \Delta x \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta m}{\Delta x}\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial t}\right)^2 - k\Delta x\left(\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\Delta x}\right)^2\right] \to \int dx \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right],$$

где $Y = k\Delta x$ - модуль Юнга.
Таким образом, функция Лагранжа L имеет вид:

$$L = \int dx L(x). \tag{1.6}$$

Согласно (1.6) $L(x)$ можно называть плотностью функции Лагранжа или лагранжианом и эта плотность функции для распространения продольных возмущений вдоль одномерной струны определяется следующим образом:

$$L(x) = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2\right]. \tag{1.7}$$

Классические поля, соответствующие определённым элементарным частицам, являются непрерывными волновыми функциями, обладающими определенными трансформационными свойствами относительно преобразования пространственно-временных координат.

Одним из наиболее подходящих формализмов для построения уравнений движения для полевых функций является математический аппарат непрерывных систем, в котором используются вариационные принципы. В

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

системе вариационных принципов лагранжев формализм более приспособлен для учета квантовомеханических и трансформационных релятивистских свойств элементарных частиц.

2. Вариационный принцип для непрерывной одномерной системы (принцип наименьшего действия).

Пусть, в общем случае, лагранжиан $L(x)$ зависит от переменных $\eta(x,t), \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}$, т.е. $L(x)$ является функцией

$$L = L\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\eta}{\partial t}\right) = L(\eta, \partial_x\eta, \partial_t\eta), \tag{1.8}$$

где $\partial_x\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad \partial_t\eta = \frac{\partial\eta}{\partial t}$.

Функция действия определяется через $L(x)$ следующим образом:

$$S = \int_{t_n}^{t_1}\int_{x_n}^{x_1} L(\eta, \partial_x\eta, \partial_t\eta)dxdt. \tag{1.9}$$

При варьировании функции S (1.9) будем использовать граничные условия

$$\delta\eta|_{x_a} = \delta\eta|_{x_0} = 0, \tag{1.10}$$

$$\delta\eta|_{t_a} = \delta\eta|_{t_0} = 0. \tag{1.11}$$

В этом случае вариацию функции действия можно привести к следующему виду

$$\delta S = \int_{t_n}^{t_1}\int_{x_n}^{x_1}\left[\frac{\partial L}{\partial\eta}\partial\eta + \frac{\partial L}{\partial(\partial_x\eta)}\partial_x(\delta\eta) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\eta)}\partial_t(\delta\eta)\right]dxdt =$$

$$= \int_{t_n}^{t_1}\int_{x_n}^{x_1}\left[\frac{\partial L}{\partial\eta} - \partial_x\frac{\partial L}{\partial(\partial_x\eta)} - \partial_t\frac{\partial L}{\partial(\partial_x\eta)}\right]d\eta dxdt. \tag{1.12}$$

Таким образом, приравняв нулю δS (1.12) согласно принципу наименьшего действия, получим уравнение Лагранжа-Эйлера для непрерывной системы.

$$\partial_t\frac{\partial L}{\partial(\partial_t\eta)} + \partial_x\frac{\partial L}{\partial(\partial_x\eta)} - \frac{\partial L}{\partial\eta} = 0. \tag{1.13}$$

Например, используя лагранжиан (1.7) в уравнении (1.13) нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial L}{\partial\eta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\eta)} = -Y\partial_x, \quad \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\eta)} = \rho\partial_t\eta.$$

В результате получим уравнение

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

$$\partial_x^2\eta - \frac{1}{v^2}\partial_x^2\eta = 0, \qquad (1.14)$$

где $v^2 = \frac{Y}{\rho}$ (1.15)

- скорость распространения продольных колебаний.

Уравнение (1.14) описывает распространение продольных возмущений вдоль одномерной струны со скоростью **v**.

В случае, когда лагранжиан $L(\eta, \partial_x\eta, \partial_t\eta)$ зависит от η как функции 3-х переменных x,y,z и времени t

$$\eta = \eta(x, y, z, t),$$

повторяя выше приведенное варьирование функции действия, а также, используя граничные условия и принцип наименьшего действия, получим

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\eta)} + \sum_{i=1}^{3} \partial_x \frac{\partial L}{\partial(\partial_x\eta)} - \frac{\partial L}{\partial\eta} = 0, \qquad (1.16)$$

где $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z.$

Если обобщенная координата непрерывной системы задается в виде компонент $\eta_\alpha(x, y, z, t)$, то уравнение Лагранжа-Эйлера (1.16) записывается для каждой компоненты η_α:

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\eta_\alpha)} + \sum_{i=1}^{3} \partial_x \frac{\partial L}{\partial(\partial_x\eta_\alpha)} - \frac{\partial L}{\partial\eta_\alpha} = 0. \qquad (1.17)$$

Тема 2. ЛАГРАНЖЕВ РЕЛЯТИВИСТСКИ-КОВАРИАНТНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ.

1. Пространство Минковского и релятивистское обобщение метода Лагранжа.
2. Требования, предъявляемые к лагранжиану поля.
3. Тензор энергии-импульса непрерывной системы.
4. Плотность тока вероятности непрерывной системы.

1. Пространство Минковского и релятивистское обобщение метода Лагранжа.

Как следует из общих принципов специальной теории относительности и преобразований Лоренца при построении ковариантного описания непрерывной системы удобно объединить пространственные координаты и время в одно четырехмерное многообразие. Четырехмерный вектор определяется компонентами $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4 = ict\}$.

В этом случае квадрат 4-х- вектора $\vec{x}$ будет определяться следующим образом

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

$$x^2 = x_\mu x_\mu = \vec{r}^2 - c^2t^2, \tag{2.1}$$

где μ пробегает значения 1, 2, 3, 4.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Согласно принципам теории относительности квадрат длинны четырехмерного вектора (2.1) является инвариантом относительно преобразований Лоренца

$$x'^2 = x'_\mu x'_\mu = x_\nu x_\nu. \qquad (2.2)$$

Из требования инвариантности (2.2) следует условие ортогональности преобразований Лоренца, т.е. если

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu, \qquad (2.3)$$

то матричные элемент $L_{\mu\nu}$ удовлетворяют условию

$$L_{\mu\rho} L_{\mu\sigma} = \delta_{\rho\sigma}, \qquad (2.4)$$

где $\delta_{\rho\sigma}$ - символ Кронекера.

Частные преобразования Лоренца, когда выполняется переход в инерциальную систему отсчета, двигающуюся вдоль оси OX, имеют вид:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

где $\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

v-скорость движения инерциальной системы отсчёта.

Нетрудно убедиться, что матрица вида (2.5) удовлетворяет условию ортогональности (2.4)

$$\tilde{L} L = I, \qquad (2.6)$$

где $\tilde{L}$- транспонированная матрица.

2. Требования, предъявляемые к лагранжиану поля.

В релятивистской теории поля уравнения движения должны иметь ковариантную форму относительно координат x, y, z и времени t. Лагранжев формализм является наиболее подходящим для релятивистского описания полей, соответствующих определенным элементарным частицам. Для этого будем считать, что функции непрерывных систем определяются в точке четырёхмерного пространства – времени $\eta(x)$. Лагранжиан непрерывной системы, который зависит от полевой функции $\eta(x)$ и четырёхмерных производных от этой функции, должен удовлетворять определённым

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

требованиям. Эти требования следуют из основных принципов релятивистской теории и квантовой механики.

Во-первых, Лагранжиан должен быть релятивистки инвариантной величиной, следовательно, полевые функции должны реализовать представление преобразований Лоренца.

Во-вторых, Лагранжиан должен быть вещественной величиной, поскольку, как известно из формализма Лагранжа, физически измеряемые величины выражаются через Лагранжиан.

В зависимости от типа релятивистских уравнений непрерывных систем вводятся дополнительные ограничения, например, такие как требование линейности, локальности, требование, чтобы Лагранжиан зависел от производных не выше второго порядка и т.д.

Учитывая эти требования, уравнения Лагранжа-Эйлера в релятивистской формулировке можно получить, используя принцип наименьшего действия в четырёхмерном пространстве – времени. Уравнения, которые следуют из вариационного принципа в релятивистской формулировке, совпадают с уравнениями (1.17), если в (1.17) перейти к четырехмерной форме.

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \eta_a(x))}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_a(x)} = 0, \tag{2.7}$$

где $L = L\big(\eta_a(x), \partial_\mu \eta_a(x), x\big)$.

3. Тензор энергии – импульса непрерывной системы.

Пусть имеется скалярная функция, определенная в четырехмерном пространстве. Потребуем, чтобы функция $f(x_\mu)$ была инвариантной относительно сдвига координат на малую величин a_μ. В этом случае преобразования функции можно представить следующим образом:

$$\delta f(x_\mu) = f'(x'_\mu) - f(x_\mu) = \bar{\delta} f + \bar{\bar{\delta}} f = 0 \tag{2.8}$$

В этом выражении введены следующие обозначения:

$\bar{\delta} f = f'(x'_\mu) - f(x'_\mu)$ - вариация функции по форме,

$\bar{\bar{\delta}} = f'(x'_\mu) - f(x_\mu)$ - вариация функции, обусловленная смещением аргумента.

Поскольку справедливо соотношение

$$\bar{\bar{\delta}} f = f'(x_\mu + a_\mu) - f(x_\mu) \approx (\delta_\mu f)\delta a_\mu, \tag{2.9}$$

то из (2.8) и (2.9) следует

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

$$\bar{\delta} f(x_\mu) = -(\delta_\mu f) a_\mu. \tag{2.10}$$

Требования инвариантности Лагранжиана непрерывной системы относительно преобразования $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ представим соотношением

$$L'\left(\eta'(x'), \partial'_\mu \eta'(x')\right) = L\left(\eta(x), \partial_\eta \eta(x)\right). \tag{2.11}$$

В (2.10) вместо функции $f(x_\mu)$подставим L и вычислим вариацию $\overline{\delta} L$

$$\overline{\delta} L = \frac{\partial L}{\partial \eta(x)} \bar{\delta}\eta(x) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \eta)} \partial_\mu (\bar{\delta}\eta). \tag{2.12}$$

Поскольку функция непрерывной системы $\eta(x)$ удовлетворяет уравнению(2.7), т.е.$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \eta(x)\right)}\right]$,тогда (2.12) можно представить так,

$$\overline{\delta} L = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \eta(x)\right)} \bar{\delta}\eta(x)\right],$$

а соотношение (2.10) для L будет иметь вид

$$-\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \eta(x)\right)} \left(\partial_v \eta(x)\right) \delta a_v\right] = -(\partial_\mu L) a_\mu, \tag{2.13}$$

где было использовано $\bar{\delta}\eta(x) = -(\partial_v \eta) a_v$, т.е. считаем, что $\eta(x)$ не изменяется при трансляциях на вектор(a_v). Таким образом, из (2.13) следует:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \eta)} (\partial_v \eta) - \delta_{\mu v} L\right] a_v = 0. \tag{2.14}$$

Если компоненты a_v независимые, то из (2.14) получим

$$\partial_\mu T_{\mu v} = 0, \tag{2.15}$$

где в уравнении (2.15) тензор $T_{\mu v}$ равен

$$T_{\mu v} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \eta)} (\partial_v \eta) - \delta_{\mu v} L. \tag{2.16}$$

Тензор $T_{\mu v}$ называется тензором энергии – импульса, а (2.15) – уравнение непрерывности для $T_{\mu v}$. С помощью компонент тензора $T_{\mu v}$ определяются энергия и импульс непрерывной системы. В самом деле, компонента T_{44} имеет вид

$$T_{44} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \eta)} (\partial_t \eta) - L. \tag{2.17}$$

Поскольку для непрерывной системы $\eta(x)$- обобщенная координата, а $\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \eta)}$-плотность обобщенного импульса, то $E = \pi(x)(\partial_t \eta) - L$ является

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

плотностью энергии непрерывной системы. В случае, когда $\eta_{n(x)}$-многокомпонентная функция, тогда определение (2.16) имеет вид

$$T_{\mu v} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \eta_n)}(\partial_v \eta_n) - \delta_{\mu v} L. \tag{2.18}$$

Введем четырехмерный вектор

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int T_{4\mu}\, d^3x. \tag{2.19}$$

В этом случае видно, что компоненты

$$P_4 = \frac{i}{c} E = \frac{i}{c} \int [\pi(x)(\partial_t \eta) - L(x)]\, d^3x, \tag{2.20}$$

а трехмерная часть вектора P_μ (2.19) определяется так:

$$\vec{P} = -\int \left[\pi(x) \vec{\partial} \eta(x)\right] d^3x. \tag{2.21}$$

Компонент имеет физическую интерпретацию четырехмерного импульса непрерывной системы.

4. Плотность тока непрерывной системы.

В случае квантовомеханических систем, когда состояния определяются в общем случае комплексными волновыми функциями $\psi(x)$и комплексно – сопряженными функциями $\psi^*(x)$, Лагранжиан является функцией

$$L(\psi, \partial_\mu \psi; \psi^*, \partial_\mu \psi^*).$$

Согласно квантовой механике $\omega = \psi^*(x)\psi(x)$ плотность вероятности состояния квантовомеханической системы. Нетрудно убедиться, что ω инвариантно относительно калибровочных преобразований следующего вида:

$$\psi' = e^{i\alpha} \psi \tag{2.22}$$

$$\psi'^* = e^{-i\alpha} \psi^*, \tag{2.23}$$

где α - постоянная величина.

Если α малая величина, тогда заменив α на $\delta\alpha$ в (2.22) и (2.23) получим:

$$\psi' = \psi + i\delta\alpha\psi = \psi + \bar{\delta}\psi\ , \tag{2.24}$$

$$\psi'^* = \psi^* + i\delta\alpha\psi^* = \psi^* + \bar{\delta}\psi^*\ . \tag{2.25}$$

Из (2.24) и (2.25) видно, что изменение функции ψ обусловлено только вариацией $\bar{\delta}\psi$ и $\bar{\delta}\psi^*$ при неизменных координатах и времени. Требование

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

инвариантности Лагранжиана системы относительно преобразований (2.24) и (2.25) имеет вид:

$$\bar{\delta} L = 0. \tag{2.26}$$

Расписывая соотношение (2.26) с учетом варьирования и уравнений движения

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi^*)} = 0,$$

получим:

$$\bar{\delta} L = \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \bar{\delta}\psi\right) + \partial_\mu \left(\bar{\delta}\psi^* \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\right)\right] = 0. \tag{2.27}$$

Из (2.27), а также (2.24) и (2.25), следует

$$\partial_\mu \left[i\psi^* \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} - i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi\right] = 0. \tag{2.28}$$

Введем определение плотности четырехмерного тока вероятности

$$j_\mu(x) = i\left[\psi^* \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi\right]. \tag{2.29}$$

В этом случае (2.28) примет вид:

$$\partial_\mu j_\mu(x) = 0, \tag{2.30}$$

т.е. является уравнением непрерывности для плотности потока вероятностей. Если ввести $j_4 = i\rho$, а вектор $\vec{j}$ считать плотностью тока вероятностей, то (2.30) можно записать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0. \tag{2.31}$$

Уравнение (2.31) является законом сохранения плотности вероятности квантовой системы в локальной форме.

Тема 3. ПОЛЯ СВОБОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.

1. Скалярное вещественное поле.
2. Тензор энергии – импульса скалярного вещественного поля.
3. Импульсное представление функций скалярного вещественного поля.
4. Физическая интерпретация полевых и динамических величин.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Состояния свободных элементарных частиц являются идеальными. Реально свойства микрочастиц устанавливаются экспериментально в процессе взаимодействия. Однако, когда элементарные частицы находятся на очень больших расстояниях, когда взаимодействия между частицами пренебрежимо малы, можем рассматривать их как свободные.

Для определения квантовых свойств свободных полей элементарных частиц воспользуемся ковариантным лагранжевым формализмом и вариационными принципами.

В дальнейшем будем использовать естественную систему единиц измерения ħ=c=1, которая применяется в физике элементарных частиц.

1. Скалярное вещественное поле.

Как следует из релятивисткой квантовой механики, квантово – механические свойства бесспиновой частицы определяются из уравнения Клейна – Гордона – Фока:

$$\partial_\mu^2 \varphi(x) - m^2 \varphi(x) = 0\,, \tag{3.1}$$

что согласуется с уравнением, которое следует из релятивисткой классической механики

$$p^2 = -m^2. \tag{3.2}$$

В самом деле, если воспользоваться соответствием

$$p_\mu \to \hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$$

и учесть действие оператора $\hat{p}_\mu$ на волновую функцию $\varphi(x)$, тогда из (3.2) следует (3.1).

В рамках ковариантного формализма Лагранжа уравнение (3.1) можно получить, воспользовавшись лагранжианом вида:

$$L = -\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]. \tag{3.3}$$

В самом деле, согласно (1.24) справедливо уравнение Лагранжа- Эйлера

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \tag{3.4}$$

Используя (3.3), получим

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = -\partial_\mu \varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m^2\varphi.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

Подставляя эти выражения в (3.4), нетрудно видеть, что

$$\partial_\mu^2 \varphi(x) - m^2 \varphi(x) = 0.$$

2.Тензор энергии- импульса скалярного вещественного поля.

Используя лагранжиан (3.3) и определение тензора энергии-импульса (1.33), получим выражение для тензора энергии-импульса вещественного поля.

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(\partial_\nu \varphi) - \delta_{\mu\nu} L \tag{3.5}$$

Выражение $T_{\mu\nu}$ в данном случае принимает вид:

$$T_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \varphi)(\partial_\nu \varphi) + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\left[(\partial_\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2\right]. \tag{3.6}$$

Энергия скалярного поля определяется

$$W = \int d^3 x T_{44} = \int d^3 x \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 + (\partial_t \varphi)^2 + m^2 \varphi^2\right]. \tag{3.7}$$

Из (3.7) очевидно, что $W \geq 0$. Используя (3.6), получим выражение для импульса поля

$$\vec{P} = -\int d^3 x (\partial_t \varphi)\left(\vec{\nabla}\varphi\right). \tag{3.8}$$

Поскольку поле вещественное, то четырёхмерная плотность тока равна нулю, т.е. функции этого поля описывают состояния нейтральных частиц, заряд которых равен нулю.

3.Импульсное представление функций скалярного вещественного поля

Общее решение дифференциального уравнения (3.1) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\overrightarrow{dq}}{\sqrt{2E}}\left[a(\vec{q})e^{iqx} + b(\vec{q})e^{-iqx}\right]. \tag{3.9}$$

Если подставить экспоненты (3.9) в (3.1), то получим для одной экспоненты и для второй при фиксированном q следующее выражение

$$q^2 = \vec{q}^2 - E^2 = -m^2. \tag{3.10}$$

Таким образом, из (3.10) следует соотношение между энергией и импульсом для частицы, у которой масса покоя частицы отлична от нуля.
Поскольку полевая функция вещественна, то

$$\varphi^*(x) = \varphi(x). \tag{3.11}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

В этом случае из (3.11) следует

$$b(\vec{q}) = a^*(\vec{q}).$$

В результате (3.9) можно представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\overrightarrow{dq}}{\sqrt{2E}} \left[a(\vec{q})^{iqx} + a^*(\vec{q})^{-iqx}\right]. \quad (3.12)$$

Вычислим теперь W и P, используя (3.12) и следующие общие соотношения:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e'^{(\pm)} e^{(\pm)}\, \overrightarrow{dx} = \delta(\vec{q}\,' + \vec{q}) e^{\mp i(E'+E)t}, \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e'^{(\mp)} e^{(\mp)}\, \overrightarrow{dx} = \delta(\vec{q}\,' - \vec{q}) e^{\mp i(E'+E)t}, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} \int d\vec{q}\,' \int d\vec{q}\, \Phi'(\vec{q}\,', E') \Phi(\overrightarrow{q}, E) e'^{(\pm)} e^{(\pm)} =$$

$$= \int d\vec{q}\, \Phi'(-\vec{q}, E) \Phi(\vec{q}, E) e^{\pm 2iEt}, \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} \int d\vec{q}\,' \int d\vec{q}\, \Phi'(\vec{q}\,', E') \Phi(\overrightarrow{q}, E) e'^{(\pm)} e^{(\pm)} = \int d\vec{q}\, \Phi'(\vec{q}, E) \Phi(\vec{q}, E). \quad (3.16)$$

В этих выражениях введены обозначения $e^{(\pm)} = e^{\pm iqx} = e^{\pm i(\vec{q}\vec{x} - Et)}$.
Функции $\Phi'(\overrightarrow{q'}, E')$и $\Phi'(\overrightarrow{q'}, E)$ - множители, состоящие при экспонентах в (3.12).
Используя (3.12)-(3.16) и определение W (3.7) получим

$$W = \frac{1}{2} \int d\vec{q} E [a^*(\vec{q}) a(\vec{q}) + a(\vec{q}) a^*(\vec{q})], \quad (3.17)$$

$$P = \frac{1}{2} \int d\vec{q} (\vec{q}) [a^*(\vec{q}) a(\vec{q}) + a(\vec{q}) a^*(\vec{q})]. \quad (3.18)$$

4.Физическая интерпретация

Полевые функции $\varphi(x)$ являются волновыми функциями релятивистского уравнения Клейна- Гордона- Фока (3.1):

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right) \varphi(x) = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в виде суперпозиции «чистых состояний» с определенным значением $\vec{q}$ и E

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{iqx}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф. СКОРИНЫ

Частица массы m может находиться в одном из этих состояний. Согласно квантовой механики вероятность нахождения частицы в состоянии с импульсом $\vec{q}$ и энергией E будет

$$\omega = |a(\vec{q})|^2$$

В этом случае выражения (2.17) и (2.18) можно интерпретировать, как среднее значение четырехмерного импульса поля

$$P_\mu = \int d\vec{q} q_\mu |a(\vec{q})|^2,$$

где $q_\mu\{\vec{q}, iE\}$.

Тема 4. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В РЕЛЯТИВИСТСКИ-КОВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ.

1. Электромагнитное поле.
2. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.
3. Импульсное представление электромагнитного поля.

1.Электромагнитное поле.

Как следует из электродинамики, лагранжиан электромагнитного поля имеет вид:

$$L(x) = -\frac{1}{4}F^2{}_{\mu v} + A_v j_\mu. \qquad (4.1)$$

Лагранжиан (4.1) определен через следующие четырехмерные величины:

- тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu v} = \partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu;$$

- четырехмерный потенциал электромагнитного поля с компонентами

$$A_\mu = \{\vec{A}, i\varphi\};$$

- четырехмерную плотность тока с компонентами

$$j_\mu = \{\vec{j}, i\rho\}.$$

Тензор электромагнитного поля можно представить в виде матрицы

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

$$\hat{F} = \{F_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -iE_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -iE_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{E}$- вектор напряженности электрического, а $\vec{H}$- вектор напряженности магнитного полей.

Получим теперь уравнение Максвелла в четырехмерной форме.
Для этого воспользуемся уравнением (2.7) в котором $\eta_a(x)$ заменим на $A_\mu(x)$.
В этом случае

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} = j_\mu, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial (F_{\rho\sigma})^2}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = F_{\mu\nu}. \tag{4.3}$$

Таким образом из (4.2), (4.3) и (2.7) следует

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu. \tag{4.4}$$

В трехмерной форме уравнение (4.4) можно представить так:

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \tag{4.5}$$

$$div\vec{E} = \rho. \tag{4.6}$$

Остальные два уравнения Максвелла

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{4.7}$$

$$div\vec{H} = 0 \tag{4.8}$$

следуют из ковариантного уравнения вида

$$\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0. \tag{4.9}$$

Переход к потенциальной форме описания электромагнитного поля осуществляется с помощью тензора электромагнитного поля. В трехмерной форме приходим к определению векторов напряженности электромагнитного поля через потенциалы:

$$\vec{H} = [\vec{\nabla}\vec{A}], \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A}. \tag{4.10}$$

В выражении (4.4) перейдем к уравнению через потенциалы, т.е. уравнению Даламбера:

$$\partial_\mu + \partial_\nu^2 A_\mu = j_\mu. \tag{4.11}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Согласно инвариантности теории электромагнитного поля относительно калибровочных преобразований потенциал электромагнитного поля определяется неоднозначно

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f. \tag{4.12}$$

Где $f(x)$ – произвольная функция.
Поскольку $f(x)$произвольная функция, то можно выбрать такую функцию, чтобы

$$\partial_\mu A'_\mu = \partial_\mu A_\mu + \partial_\mu^2 f = 0. \tag{4.13}$$

Тогда потенциалы A'_μ удовлетворяют условию Лоренца (4.13), когда функция f является решением уравнения

$$\partial_\mu^2 f = -\partial_\mu A_\mu. \tag{4.14}$$

Если в (4.11) перейдем к новым потенциалам A_μ, удовлетворяющим условию Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \tag{4.15}$$

то в результате получим уравнение Даламбера

$$\partial_\mu^2 A_\nu = -j_\nu, \tag{4.16}$$

Из выражения (4.16) следует, что для потенциалов свободного электромагнитного поля, когда нет взаимодействия, справедливо уравнение

$$\Box A_\nu = 0, \tag{4.17}$$

где $\Box = \partial_\mu^2 = \vec{\nabla}^2 - \partial_t^2$.

Поскольку свободное электромагнитное поле определяется четырехмерными потенциалами A_μ, а в свою очередь, последние удовлетворяют двум уравнениям (4.15) и (4.17), то для описания свободного электромагнитного поля можно использовать две независимые компоненты.
Из уравнений (4.12) следует, что

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4.18}$$

Так как f произвольная функция, удовлетворяющая только уравнению (4.14), то на выбор потенциала φ можно наложить условие калибровки. Выберем $f(\vec{r}, t)$ следующим образом

$$f(\vec{r}, t) = \int_0^t \psi(\vec{r},\ t')\, dt'. \tag{4.19}$$

Тогда уравнение (4.18) принимает вид

$$\varphi' = \varphi - \psi(\vec{r}, t). \tag{4.20}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

В уравнении (4.20) функция $\psi(\vec{r},t)$ произвольная. Следовательно, можно использовать такую функцию $\psi(\vec{r},t)$, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi' = 0. \tag{4.21}$$

Условие (4.21) называют условием кулоновской калибровки потенциалов.

Благодаря условиям (4.13) и (4 .21) независимыми компонентами четырехмерного потенциала будут только две, что приводит к поперечной поляризации, относительно направления распространения свободного электромагнитного поля и векторный потенциал удовлетворяет соотношению

$$\vec{\nabla}\vec{A} = 0. \tag{4.22}$$

2.Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Электромагнитное поле определяется вещественными полевыми функциями

$$\vec{A}^*(x) = \vec{A}(x),$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x),$$

которые являются компонентами четырехмерного потенциала A_μ. Согласно (2.18) тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_p)}\left(\partial_\nu A_p\right) - \delta_{\mu\nu} L. \tag{4.23}$$

Используя в (4.23) лагранжиан $L = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2$,
получим

$$T_{\mu\nu} = F_{\rho\mu}(\partial_\mu A_{\boldsymbol{\rho}}) - \delta_{\mu\boldsymbol{\nu}}\mathrm{L}. \tag{4.24}$$

Тензор (4.24) не является симметричным. Как следует из общей теории поля, векторное поле описывает состояние микрочастицы. Для последовательного описания спиновых свойств векторного поля используется симметричный тензор энергии-импульса.

Условие (2.15) допускает неоднозначное определение тензора $T_{\mu\nu}$. В самом деле, введем тензор

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial_\sigma f_{[\mu\sigma]\nu}, \tag{4.25}$$

где $[\mu\sigma]$обозначает антисимметрию относительно перестановки индексов μ и **σ**. Убедимся, что он также удовлетворяет (2.15)

$$\partial_\mu T'_{\mu\nu} = \partial_\mu T_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\sigma f_{[\mu\sigma]\nu}.$$

Поскольку тензор $f_{[\mu\sigma]\nu}$ произвольный и антисимметричный относительно индексов μ и **σ**, то приходим к выводу

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

$$\partial_{\mu} T'_{\mu\nu} = \partial_{\mu} T_{\mu\nu} = 0. \qquad (4.26)$$

В качестве тензора $f_{[\mu\sigma]\nu}$ выберем

$$f_{[\mu\sigma]\nu} = F_{\mu\sigma} A_{\nu}.$$

В этом случае

$$T'_{\mu\nu} = T^{metr}_{\mu\nu} = F_{\rho\mu}(\partial_{\mu}\boldsymbol{A_{\rho}}) - \delta_{\mu\nu}\mathrm{L} + \partial_{\rho}(F_{\mu\sigma}A_{\nu}).$$

Из последнего выражения следует, что

$$T'_{\mu\nu} = T^{metr}_{\mu\nu} = F_{\rho\mu}F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\ \delta_{\mu\nu}\left(F_{\rho\sigma}\right)^2. \qquad (4.27)$$

Симметричный тензор (4.27) называется метрическим, а тензор (4.24)- каноническим. Из (4.27) получаем, что плотность энергии электромагнитного поля

$$\omega = T^{metr}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right). \qquad (4.28)$$

Видно, что ω положительно определенная величина ($\omega \neq 0$). Энергия электромагнитного поля согласно (4.28) определяется следующим образом

$$E = \int \omega d^3x = \frac{1}{2}\int\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) d^3x. \qquad (4.29)$$

Воспользовавшись выражением для $T_{\mu\nu}$ и определением импульса, получим:

$$\vec{P} = \int\left[\vec{E}\vec{H}\right] d^3x. \qquad (4.30)$$

3.Импульсное представление электромагнитного поля

Общее решение волнового уравнения можно представить в виде интеграла Фурье

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}}\left[a_{\mu}(\vec{k})e^{ikx} + a^{+}_{\mu}(\vec{k})e^{-ikx}\right]. \qquad (4.31)$$

Здесь $a_{\mu}(\vec{k})$ -импульсное представление $A_{\mu}(x)$,$\mathrm{kx} = \mathrm{k}_{\mu}\mathrm{x}_{\mu} = \vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{r}} - \omega \mathrm{t}$.
Четырехмерный импульс k выражается через волновой вектор $\vec{k}$, циклическую частоту электромагнитного поля ω и удовлетворяет соотношению

$$k^2 = \vec{k}^2 - \omega^2 = 0. \qquad (4.32)$$

Условие Лоренца в импульсном представлении в кулоновской калибровке определяется следующим образом:

$$\left(\vec{k}\vec{a}\right) = \left(\vec{k}a^{+}\right) = 0. \qquad (4.33)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

В результате трехмерный потенциал $\vec{A}(x)$ принимает вид:

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}}\left[a_{\mu}(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} + a^{+}(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right]. \quad (4.34)$$

Введем трехмерные единичные вектора, связанные с распространяющимся электромагнитным полем:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (4.35)$$

Тогда $a_{\mu}(\vec{k})$ и $a^{+}(\vec{k})$ можно разложить по этим векторам и с учетом (4.33) получим:

$$\vec{a}(\vec{k}) = a_1(\vec{k})\vec{e}_1 + a_2(\vec{k})\vec{e}_2.$$

В этом случае выражение (4.34) для потенциала принимает форму

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\lambda=1}^{2}\vec{e}_{\lambda}\left[a_{\lambda}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}} + a_{\lambda}^{+}(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right]. \quad (4.36)$$

Воспользуемся соотношениями (4.10) для определения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в импульсном представлении

$$\vec{H} = [\vec{\nabla}\vec{A}] = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\lambda}[\vec{k}\vec{e}_{\lambda}](a_{\lambda}(\vec{k})e^{ikx} - a_{\lambda}^{*}(\vec{k})e^{-ikx}) \quad (4.37)$$

$$\vec{E} = -\partial_t\vec{A}\frac{(-i)}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\lambda}(\omega\vec{e}_{\lambda})\,(a_{\lambda}(\vec{k})e^{ikx} - a_{\lambda}^{*}(\vec{k})e^{-ikx}) \quad (4.38)$$

Чтобы получить выражение для энергии и импульса в импульсном представлении, воспользуемся соотношениями (4.13-4.16)
Так из уравнения (4.37) следует:

$$\vec{\Phi}(\vec{k},\omega)e^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\sum_{\lambda}[\vec{k}\vec{e}_{\lambda}]a_{\lambda}(\vec{k})e^{(+)}.$$

$$\vec{\Phi'}(\vec{k'},\omega')e'^{(+)} = \frac{i}{\sqrt{2\omega'}}\sum_{\lambda'}[\vec{k'}\vec{e}_{\lambda'}]a_{\lambda'}(\vec{k'})e'^{(+)}.$$

В результате получим:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{x}\int d\vec{k'}\int \partial\vec{k}\vec{\Phi'}(\vec{k'},\omega')\,\vec{\Phi'}(\vec{k},\omega)e'^{(+)}e^{(+)} =$$

$$\int d\vec{k}\,\frac{1}{2\omega}\sum_{\lambda'}\sum_{\lambda}[\vec{k'}\vec{e}_{\lambda'}]\,[\vec{k}\vec{e}_{\lambda}]a_{\lambda'}(-\vec{k})a_{\lambda}(\vec{k})e^{-2i\omega t} = \int \partial\,\vec{k}\sum_{\lambda}\frac{\vec{k}^2}{2\omega}a_{\lambda}(-\vec{k})a_{\lambda}(\vec{k})e^{-2i\omega t}$$

Используя приведенную методику вычислений не трудно показать, что

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int \partial\vec{k}\sum_{\lambda=1}^{2}\omega\left[a_{\lambda}^{+}(\vec{k})a_{\lambda}(\vec{k}) + a_{\lambda}(\vec{k})a_{\lambda}^{+}(\vec{k})\right]. \quad (4.39)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{2}\int \partial\vec{k}\sum_{\lambda=1}^{2}\vec{k}\left[a_\lambda^+(\vec{k})a_\lambda(\vec{k}) + a_\lambda(\vec{k})a_\lambda^+(\vec{k})\right]. \qquad (4.40)$$

Перейдем теперь к физической интерпретации результатов.

Потенциалы электромагнитного поля $A_\mu(x)$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\Box A_\mu(x) = 0. \qquad (4.41)$$

Поэтому с точки зрения квантовой механики $A_\mu(x)$ можно рассматривать как квантовомеханическую волновую функцию.

Решение уравнения (4.41) представляется в виде суперпозиции «чистых» состояний, которые описываются плоскими волнами

$$\vec{A}_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\vec{e}_\lambda}{\sqrt{2\omega}}e^{ikx}. \qquad (4.42)$$

Состояние электромагнитного поля определяется собственными значениями оператора импульса $\hat{\vec{p}}$ и поляризацией плоской волны (4.42).

Разложение (4.36) означает, что электромагнитное поле может находиться в одном из этих «чистых» состояний. Как следует из квантовой механики, вероятность нахождения поля в этом состоянии определяется коэффициентами разложения

$$\omega_\lambda(\vec{k}) = \left|a_\lambda(\vec{k})\right|^2. \qquad (4.43)$$

Выражения (4.39) и (4.40) для энергии и импульса поля можно интерпретировать, как среднее значения поля

$$P_\mu = \int d\vec{k}\sum_\lambda k_\mu\left|a_\lambda(\vec{k})\right|^2, \qquad (4.44)$$

где $k_\mu = \{\vec{k}, i, \omega\}$.

В теории вторичного квантования состояние электромагнитного поля определяется совокупностью фотонов, импульсы и энергии которых равны $\vec{k}$ и ω, а полная энергия поля

$$E = \int d\vec{k}\omega N(\vec{k}),$$

где N($\vec{k}$) -число квантов, имеющих импульс $\vec{k}$.

Тема 5. РЕЛЯТИВИСТСКИ-КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА.

1. Уравнение Дирака
2. Определение оператора спина дираковских частиц

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

3. Лагранжев формализм поля Дирака
4. Решение уравнения Дирака и определение динамических переменных в импульсном представлении

1.Уравнение Дирака

Согласно релятивисткой квантовой механике уравнение Дирака в ковариантной форме имеет вид:

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi(x) = 0. \tag{5.1}$$

В уравнении (5.1) матрицы γ_μ размерности 4×4 и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\ . \tag{5.2}$$

Перестановочные соотношения (5.2) обусловлены тем, что из уравнения Дирака (5.1) следует уравнение непрерывности для плотности тока вероятности и каждая компонента волновой функции $\Psi_\alpha(x)$ (α принимает значения 1,2,3,4) удовлетворяет релятивистскому уравнению КГФ

$$(\Box - m^2)\Psi_\alpha(x) = 0 \tag{5.3}$$

Из уравнения (5.1) и определения дираковски-сопряженной волновой функции

$$\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma_\mu \tag{5.4}$$

следует уравнение

$$\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma_\mu - m\overline{\Psi} = 0\ . \tag{5.5}$$

Матрицы γ_μ, удовлетворяющие (5.2), можно выразить через матрицы Паули σ_i, которые удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i = 2\delta_{ik} \tag{5.6}$$

Эти матрицы образуют полный набор матриц размерности 2×2.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Нетрудно убедиться, что матрицы γ_μ , которые имеют вид

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -i\vec{\sigma} \\ i\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5.8)

удовлетворяют перестановочным соотношениям (5.2).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

Уравнение (5.1) приведем к форме типа уравнения Шредингера, что позволит определить оператор Гамильтона уравнения Дирака. Для этого с помощью матриц (5.8) введем матрицы матрицы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ i\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Которые связаны с $\vec{\gamma}$-матрицами через соотношение $\vec{\gamma} = -i\beta\vec{\alpha}$. Таким образом, используя матрицы (5.9) и уравнения (5.1), получим

$$i\partial_t \Psi = \hat{H}_D \Psi \tag{5.10}$$

где $\hat{H}_D = \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + m\beta$, $\hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla}$.

2. Определение оператора спина дираковских частиц

Из квантовой механики известно, что состояние системы определяется собственными значениями операторов, образующих полный набор и коммутирующих друг с другом.

Убедимся теперь, что полным набором операторов частицы, движение которой описывается уравнением (5.10), являются $\hat{H}_D, \hat{\vec{p}}, \hat{L}_{i,}\ \hat{S}_{i,}$ т.е. наряду с энергией, импульсом, орбитальным моментом количества движения, состояния частицы определяется спиновым квантовым числом.
В самом деле, коммутатор $[\hat{H}_D, \hat{L}_3]$ равен

$$[\hat{H}_D, \hat{L}_{3,}] = \hat{H}_D \hat{L}_3 - \hat{L}_3 \hat{H}_D = i(\alpha_2 \hat{p}_1 - \alpha_1 \hat{p}_2) \tag{5.11}$$

Аналогично можно убедиться, что в общем случае $[\hat{H}_D, \hat{L}_i] \neq 0$.
Следовательно, согласно уравнению движения в форме Гейзенберга операторы компонент орбитального момента количества движения не будут сохраняющимися величинами.
Чтобы построить сохраняющуюся величину введем оператор

$$\hat{S}_3 = -\frac{i}{2}\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Коммутатор $\hat{H}_D$ с оператором $\hat{S}_{3,}$ выглядит так

$$[\hat{H}_D, \hat{S}_{3,}] = -i(\alpha_2 \hat{p}_1 - \alpha_1 \hat{p}_2) \tag{5.13}$$

Сравнивая (5.11) и (5.13), видим, что сохраняющейся величиной является полный угловой момент частицы

$$\hat{J}_i = \hat{L}_i + \hat{S}_i . \tag{5.14}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

Таким образом, частицы, волновые свойства которых описываются полевыми функциями уравнения Дирака, имеют спиновой момент.
Оператор спинового момента имеет вид

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Выражение (5.15) является релятивистским обобщением оператора спина нерелятивистской частицы, имеющей спиновое квантовое число $1/2$.

3.Лагранжев формализм поля Дирака

Лагранжиан поля частиц спина $1/2$ определим следующим образом:

$$L = -\frac{1}{2}\overline{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi - \frac{1}{2}\left[-(\partial_\mu \overline{\Psi})\gamma_\mu + m\overline{\Psi}\right]\Psi =$$

$$-\frac{1}{2}\overline{\Psi}(\gamma_\mu \vec{\partial}_\mu + m)\Psi + \frac{1}{2}\overline{\Psi}(\gamma_\mu \vec{\partial}_\mu m)\Psi\,. \tag{5.16}$$

В уравнении (5.16) стрелки указывают направление действия производных на функции $\overline{\Psi}$ и Ψ. В справедливости формы лагранжиана (5.16) можно убедиться путем получения уравнения Дирака (5.1) и уравнения Дирака для сопряженной волновой функции $\overline{\Psi}$. В самом деле, воспользуемся уравнениями Лагранжа-Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\Psi}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi}\,)} = 0\,, \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi\,)} = 0\,. \tag{5.18}$$

Подставляя (5.16) в (5.17) и (5.18), получим

$$(\gamma_\mu\, \partial_\mu + m)\psi\,(x) = 0\,, \tag{5.19}$$

$$\bar{\psi}\,(x)(\gamma_\mu \overline{\partial_\mu} -\, m) = 0\,. \tag{5.20}$$

Канонический тензор энергии импульса в координатном представлении имеет вид:

$$T_{\mu v} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\, \psi)}(\partial_v \psi) + (\partial_v \bar{\psi})\frac{\partial L}{\partial(\partial_v \bar{\psi})}. \tag{5.21}$$

В определении (5.21)учтено, что $L = 0,$, поскольку в (5.21) $\overline{\Psi}$ и Ψ должны удовлетворять уравнениям (5.19) и (5.20).
Таким образом, используя явный вид лагранжиана (5.16) в (5.21), получим

$$T_{\mu v} = -\frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_v \psi - (\partial_v \bar{\psi})\gamma_\mu \psi\right] = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_v \psi, \tag{5.22}$$

где $\overleftrightarrow{\partial} = \vec{\partial} - \overleftarrow{\partial}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф. СКОРИНЫ

Сохраняющийся четырехмерный вектор энергии импульса в случае поля Дирака имеет вид:

$$P_\mu = i\int T_4\,dV = -i\int(\bar{\psi}\gamma_4\partial_\mu\psi)dV, \tag{5.23}$$

где полевые функции $\bar{\Psi}$ и Ψ являются комплексными функциями.

Следовательно четырёхмерный вектор плотности тока будет отличен от нуля, и будет определяться следующим образом

$$j_\mu = -ie\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\bar{\psi})}\right]. \tag{5.24}$$

Как следует из (5.16) и (5.24) плотность тока для поля Дирака имеет вид

$$j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{5.25}$$

Нетрудно теперь установить, что энергия и заряд поля Дирака определяется соответственно

$$E = \int\psi^+(id_t)\psi dV, \tag{5.26}$$

$$Q = \int\Psi^+(e)\Psi dV. \tag{5.27}$$

4.Решение уравнения Дирака и определение динамических переменных в импульсном представлении.

Для получения импульсного представления динамических переменных решим уравнения Дирака (5.1). В уравнении (5.1) волновая функция $\Psi(x)$ представляется в виде столбца, который имеет четыре компоненты. Обозначим их $\Psi_a(x)$ $(\alpha = 1,2,3,4)$. Каждая компонента $\Psi_a(x)$ удовлетворяет волновому уравнению КГФ. Поэтому в общем случае зависимость волновой функции $\Psi(x)$ от четырёхмерного аргумента x можно представит следующим образом

$$\Psi_{\vec{p}}(x) = u(\vec{p})e^{i(\vec{p}\vec{r}-\varepsilon t)} \tag{5.28}$$

где $u(\vec{p})$ - функция – столбец, зависящий от $\vec{p}$ и ε.

Подставим функцию $\Psi_p(x)$ вида (5.28) в уравнение Дирака в гамильтоновой форме (5.10). В результате получим

$$\widehat{H}_D\Psi = \varepsilon\Psi. \tag{5.29}$$

Введём теперь спинорные функции:

$$\varphi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix}\Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}.$$

В этом случае , учитывая матричную структуру $\widehat{H}_D$ (5.10), нетрудно установить два уравнения:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi + m\varphi - \varepsilon\varphi = 0, \tag{5.30}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi - m\chi - \varepsilon\chi = 0. \qquad (5.31)$$

Однородная система алгебраических уравнений (5.30) и (5.31) имеют решение в том случае, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} m-\varepsilon & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & m+\varepsilon \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.32)$$

Из уравнения (5.32) следует

$$\varepsilon = \pm E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Следовательно, уравнение Дирака имеет решение с $\varepsilon = +E$ и $\varepsilon = -E$.
В случае, когда $\varepsilon = +E$, решение уравнений (5.30) и (5.31) можно представить в виде

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\varphi. \qquad (5.33)$$

Если $\varepsilon = -E$, то из уравнений (5.30) и (5.31) следует

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\chi. \qquad (5.34)$$

Таким образом, уравнение (5.1) имеет решения с $\varepsilon = +E$ и $\varepsilon = -E$, которые можно представить следующим образом:

$$\Psi_p^{(+)}(\vec{r},t) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}}\begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\varphi \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)}, \qquad (5.35)$$

$$\Psi_p^{(-)}(\vec{r},t) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}}\begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\vec{r}+Et)}.$$

(5.36)

В свою очередь спинор φ разлагается по векторам $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

$$\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix} = \psi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \psi_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Вектора $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ являются собственными векторами оператора проекции спина $\hat{S}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ с собственными значениями $+{}^1\!/_2$ и $-{}^1\!/_2$. В таком случае Ψ_1 и Ψ_2 являются амплитудами вероятности нахождения частицы в состояниях с проекцией спина $+{}^1\!/_2$ и $-{}^1\!/_2$ соответственно. Аналогичные аргументы справедливы для спинора χ. В результате приходим к выводу, что уравнение Дирака имеет 4 решения, соответственно:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

$$\psi_p^{(+)}(\vec{r},t,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} U^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)}, \qquad (5.37)$$

$$\psi_p^{(-)}(\vec{r},t,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \vartheta^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}\vec{r}-Et)}. \qquad (5.38)$$

В выражениях (5.37) и (5.38) введём обозначения:

$$U^{(\lambda)}(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\varphi^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \ \ \vartheta^{(\lambda)}(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\chi^{(\lambda)} \\ \chi^{(\lambda)} \end{pmatrix}. \qquad (5.39)$$

Спиноры $\chi^{(\lambda)}$представляются в виде векторов состояний

$$\chi^{(+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \chi^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Определим теперь условие нормировки волновых функций (5.37) и (5.38). Одна из нормировок, которая часто используется, представляется в виде

$$\int dV \overline{\psi}_{p'}^{(\lambda')}(\vec{r},t)\psi_p^{(\lambda)}(\vec{r},t) = \delta_{\lambda'\lambda}\delta(\vec{p}'-\vec{p}). \qquad (5.40)$$

Подставляя (5.37) и (5.38). и используя соотношение $\vec{\sigma}\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\vec{p} = \vec{p}^2$, получим

$$\int dV \frac{1}{(2\pi)^3} \overline{U}^{(\lambda')}(\vec{p}\,')U^{(\lambda)}(\vec{p}) e^{-i(\vec{p}'-\vec{p})\vec{r}} e^{i(E'-E)t} = \overline{U}^{(\lambda')}(\vec{p}')U^{(\lambda)}(\vec{p})\delta(\vec{p}'-\vec{p}) =$$

$$= \delta_{\lambda'\lambda}\delta(\vec{p}'-\vec{p}). \qquad (5.41)$$

В уравнении (5.41) были использованы биспиноры (5.39) $U^{(\lambda)}(\vec{p})$ и $U^{(\lambda)}(\vec{p}) = U^{+(\lambda)}\gamma_4$. Нормированный множитель выбран так, чтобы $\overline{U}^{(\lambda')}(\vec{p})U^{(\lambda)}(\vec{p}) = \delta_{\lambda'\lambda}$.

В самом деле , согласно (5.39)

$$\overline{U}^{(\lambda')}(\vec{p})U^{(\lambda)}(\vec{p}) = N^2\left(\varphi^{(\lambda')^+}, \varphi^{(\lambda')^+}\frac{-\vec{\sigma}\vec{p}}{m+E}\right)\begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\varphi^{(\lambda)} \end{pmatrix} =$$

$$= N^2\left(I - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\vec{p}}{(m+E)^2}\right)\delta_{\lambda'\lambda} = N^2\frac{2m}{E+m}\delta_{\lambda'\lambda}.$$

Отсюда следует, чтобы выполнялось нормировка (5.41) N должно быть.

$$N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}.$$

Таким образом, с учётом нормировки (5.41) биспиноры имеют вид

$$U^{(\lambda)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix} \varphi^{(\lambda)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\varphi^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \qquad (5.42)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

$$\vartheta^{(\lambda)}(\vec{p}) = U^{(\lambda)}(-\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\chi^{(\lambda)} \\ \chi^{(\lambda)} \end{pmatrix}. \qquad (5.43)$$

Из дифференциальных уравнений (5.19) и (5.20) следует, что биспиноры (5.42) и (5.43) удовлетворяют алгебраическим уравнениям

$$(i\hat{p} + m)\, U^{(\lambda)}(\vec{p}) = 0, \qquad (5.44)$$

$$(i\hat{p} - m)\, \vartheta^{(\lambda)}(\vec{p}) = 0. \qquad (5.45)$$

В свою очередь дираковски-сопряжённые биспиноры удовлетворяют уравнениям

$$\overline{U}^{(\lambda)}(\vec{p})(i\hat{p} + m) = 0, \qquad (5.46)$$

$$U^{\lambda}(\vec{p})(i\hat{p} - m) = 0. \qquad (5.47)$$

Волновая функция $\Psi_p^{(+)}$ используется для определения состояний частицы, а функция $\Psi_p^{(-)}$- античастицы, где последовательное описание реализуется в квантовой теории поля посредством операции зарядового сопряжения.

Получим теперь выражение для тензора энергии-импульса и тока дираковского поля.

Общее решение уравнения Дирака (5.1) можно представить в виде интеграла Фурье вида:

$$\Psi(x) = \int N_p \sum\nolimits_\lambda \left[U^{(\lambda)}(\vec{p})c_\lambda(\vec{p})e^{ipx} + \vartheta^{(\lambda)}(\vec{p})d_\lambda^*(\vec{p})e^{-ipx}\right]d^3\,\vec{p}, \qquad (5.48)$$

где

$$N_p = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}.$$

Из (5.48) нетрудно получить выражение для дираковски – сопряжённого поля

$$\overline{\Psi}(x) = \int N_p \sum\nolimits_\lambda \left[\overline{U}^{(\lambda)}(\vec{p})c^+\lambda(\vec{p})e^{-ipx} + \bar{\vartheta}^{(\lambda)}(\vec{p})d_\lambda(\vec{p})e^{ipx}\right] d^3\vec{p}. \qquad (5.49)$$

Подставляя выражения (5.49) и (5.50) в определения $T_{\mu\nu}$ (5.22) и j_μ (5.25), а также используя общие соотношения и условие нормировки (5.40), получим

$$W = \int E[C_\lambda^+(\vec{p})C_\lambda(\vec{p}) - d_\lambda(\vec{p})d_\lambda^+(\vec{p})]\, d\vec{p}, \qquad (5.50)$$

$$\vec{P} = \int \vec{p}[C_\lambda^+(\vec{p})C_\lambda(\vec{p}) - d_\lambda(\vec{p})d_\lambda^+(\vec{p})]d\vec{p}, \qquad (5.51)$$

$$Q = \int [C_\lambda^+(\vec{p})C_\lambda(\vec{p}) + d_\lambda(\vec{p})d_\lambda^+(\vec{p})]d\vec{p}. \qquad (5.52)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Таким образом волновая функция частицы спина $\frac{1}{2}$ имеет вид

$$\Psi_p^+(x,\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}U^{(\lambda)}(\vec{p})e^{ipx}. \qquad (5.53)$$

Коэффициенты $C_\lambda(\vec{p})$ и $d_\lambda(\vec{p})$ в интегральных представлениях (5.48) и (5.49) являются амплитудами вероятности нахождения частицы и античастицы в квантовых состояниях с определёнными значениями $\vec{p}$ и λ. Поэтому W имеет смысл средней энергии фермион-антифермионного поля, а $\vec{P}$ и Q- среднего импульса и заряда этого поля соответственно.

Тема 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ.

1. Лагранжев формализм взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами.
2. Принцип локальной калибровочной инвариантности в теории взаимодействующих полей.
3. Закон сохранения тока, как следствие принципа калибровочной инвариантности.

1. Лагранжев формализм взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами.

Для описания движения заряженной частицы в электромагнитном поле в классической механике используется функция Лагранжа

$$L = -m\sqrt{1-\vec{v}} + e(\vec{v}\vec{A} + iA_4), \qquad (6.1)$$

где $\vec{v}$- скорость частицы, $A_4 = i\varphi$.

Обобщённый импульс в этом случае определяется так

$$\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial v} = \vec{p} + e\vec{A}, \qquad (6.2)$$

где $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$- обычный динамический релятивистский импульс частицы.

Если с помощью (6.1) определить функцию Гамильтона, то получим

$$H = \vec{\pi}\vec{v} - L = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} - ieA_4. \qquad (6.3)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Таким образом, если для свободной частицы справедливо соотношение

$$H^2 = \vec{p}^2 + m^2. \tag{6.4}$$

то для частицы, движущейся в электромагнитном поле, подобное соотношение имеет вид

$$(H + ieA_4)^2 = \left(\vec{\pi} - ie\vec{A}\right)^2 + m^2. \tag{6.5}$$

Следовательно, из сравнения соотношений (6.4) и (6.5) приходим к формальному выводу – для описания движения заряженной частицы в электромагнитном поле достаточно осуществить замену

$$H \to H + ieA_4,$$

$$\vec{p} \to \vec{\pi} - ie\vec{A}.$$

При переходе к квантовомеханическим уравнениям свободно движущихся частиц используем принцип соответствия, а именно осуществим переход

$$H \to i\partial_t,$$

$$\vec{\pi} \to -i\vec{\nabla}.$$

В таком случае для получения квантовомеханических уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле достаточно осуществить замену

$$i\partial_t \to i\partial_t + ieA_4,$$

$$-i\vec{\nabla} \to -i\vec{\nabla} - ie\vec{A}.$$

В четырехмерной форме такая замена обобщается следующим образом

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{6.6}$$

Выполняя замену (6.6) в уравнении (6.5) с учетом действия операторов $\varphi(x)$, получим ковариантное уравнение движения заряженной скалярной частицы в электромагнитном поле:

$$\left|\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)^2 - m^2\right| \varphi(x) = 0. \tag{6.7}$$

Аналогичным методом можно установит уравнения движения заряженной дираковской частицы в электромагнитном поле. Так, выполняя замену (6.6) в уравнении, получим

$$\left|\gamma_\mu(\overrightarrow{\partial_\mu} - ieA_\mu) + m\right| \Psi(\mathrm{x}) = 0, \tag{6.8}$$

где $\Psi(x)$–биспинорные функции.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

2. Принцип локальной калибровочной инвариантности в теории взаимодействующих полей.

Выше, при построении лагранжиана и уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле, было использовано соответствие между классической и квантовыми теориями. По аналогии с введением взаимодействия частиц с электромагнитным полем в классической теории, которое свелось к замене (6.6)

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$$

в лагранжиане и уравнениях движения, покажем, что эта замена вытекает из принципа калибровочной инвариантности и, соответственно, закона сохранения заряда.

В случаи взаимодействующих полей закон сохранения заряда определяется требованием инвариантности лагранжиана и уравнений взаимодействующих полей относительно локальных калибровочных преобразований, т.е. преобразований:

$$\Psi'^{(x)} = e^{i\Lambda(x)}\Psi(x), \tag{6.9}$$

$$\bar{\Psi}'^{(x)} = e^{-i\Lambda(x)}\bar{\Psi}(x), \tag{6.10}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x). \tag{6.11}$$

Очевидно, что комбинации $\bar{\Psi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi$ и $\left[(\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\Psi}\right]\Psi$ инвариантны относительно преобразований (6.9-6.11). Следовательно, и лагранжиан вида

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\partial_\mu\Psi + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\bar{\Psi}\right)\gamma_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + ie\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A_\mu \tag{6.12}$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований (6.9 – 6.11).

Используя лагранжиан (6.12) и уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\right) - \frac{\partial L}{\partial\Psi} = 0, \tag{6.13}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\bar{\Psi}} = 0\,, \tag{6.14}$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0, \tag{6.15}$$

получим уравнения движения дираковских частиц в электромагнитном поле:

$$\left[\gamma_\mu\left(\overrightarrow{\partial_\mu} - ieA_\mu\right) + m\right]\Psi(x) = 0, \tag{6.16}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

$$\bar{\Psi}(x) = \left[\gamma_\mu\left(\overleftarrow{\partial_\mu} + ieA_\mu\right) - m\right] = 0, \tag{6.17}$$

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = ie\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi. \tag{6.18}$$

Из этих уравнений видно, что (6.16) совпадает с уравнением (6.8).

3. Закон сохранения тока как следствие принципа калибровочной инвариантности.

Пусть в калибровочных преобразованиях (6.9 – 6.11) $\Lambda(x)$ бесконечно малая произвольная функция. В этом случае преобразования (6.9- 6.11) можно представить в виде:

$$\Psi'(x) = \Psi + \delta\Psi = \Psi + ie\Lambda\Psi, \tag{6.19}$$

$$\bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi} = \bar{\Psi} - ie\Lambda\bar{\Psi}. \tag{6.20}$$

Функция действия

$$S = \int d^4 x L$$

определяется лагранжианом взаимодействующих полей (6.12).

Вариация функции действия, обусловленная преобразованием (6.19, 6.20), представляется выражением

$$\delta S = \int d^4\,x \left[\frac{\partial L}{\partial \Psi}\delta\Psi + \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \Psi\right)}\partial_\mu(\delta\Psi) + \delta\bar{\Psi}\frac{\partial L}{\partial\bar{\Psi}} + \partial_\mu\left(\delta\bar{\Psi}\right)\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\Psi}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial L}{\partial A_\nu}\delta A_\nu + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)\right]. \tag{6.21}$$

Приравнивая δS к нулю и используя уравнения (6.16 – 6.18), получим:

$$\delta S = \int d^4 x\left\{\Lambda(\mathrm{x})\,\partial_\mu\left[\mathrm{i}\mathrm{e}\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right] - \partial_\mu\Lambda(\mathrm{x})\left[\partial_\mu \mathrm{F}_{\mu\nu} - \mathrm{i}\mathrm{e}\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right]\right\} = 0.$$
(6.22)

Поскольку $\Lambda(x)$ и $\partial_\mu\Lambda(x)$ произвольные функции, то интеграл в (6.22) будет равен нулю при условии, что

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = ie\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi, \tag{6.23}$$

$$\partial_\mu\left[ie\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi\right] = 0. \tag{6.24}$$

Уравнение (6.24) есть уравнение закона сохранения электрического заряда частицы в локальной форме.

Таким образом, из условия инвариантности лагранжиана взаимодействующих полей (6.12) относительно калибровочных преобразований (6.19, 6.20) следует закон сохранения электрического заряда в локальной форме (6.24).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Тема 7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ ГРИНА .

1.Решение полевых уравнений движения на основе функции Грина.
2.Функция Грина спинорного и фотонного полей.
3.Определение амплитуды процессов взаимодействия фотонов с заряженными частицами в рамках теории возмущений.

Задача теории взаимодействия частиц состоит в том, чтобы определить физические характеристики частиц и их квантовые состояния после реакции взаимодействия, если известны начальные состояния известных начальных частиц. В рамках этой теории должны быть методы, с помощью которых можно проводить расчеты вероятностей реализации возможного канала реакции.

В классической теории поля одним из таких методов является метод теории возмущений на основе функций Грина, т.е. в теории поля решения дифференциальных уравнений определяются с помощью функций, которые являются решением уравнения с дельтаобразным источником.

1. Решение полевых уравнений движения на основе функции Грина.

Рассмотрим уравнение (6.18). В этом уравнении будем считать, что A_μ удовлетворяет условию Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \tag{7.1}$$

В этом случае уравнение (6.18) принимает вид:

$$\Box A_\mu = -ie\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi, \tag{7.2}$$

где $\Box = \partial_\mu\partial_\mu = \vec{\nabla} - \partial_t^2$.

При использовании метода функций Грина вместо уравнения (7.2) решается уравнение с точечным источником:

$$\Box\, G(x - x') = -\delta(x - x'). \tag{7.3}$$

В уравнении (7.3) $\delta(x - x')$ - четырехмерная функция Дирака, а функция $G(x - x')$- функция Грина для электромагнитного поля. С помощью функции Грина $G(x - x')$ решение уравнения (7.2) можно представить в интегральной форме:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int G(x - x')\left[ie\overline{\Psi}(x')\gamma_\mu\Psi(x')\right]d^4x', \tag{7.4}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

где $A_\mu^{(0)}(x)$ - решение уравнения

$$\Box A_\mu^{(0)}(x) = 0.$$

Убедимся, что функция (7.4) удовлетворяет уравнению (7.2). Подставим (7.4) в (7.2). В результате получим:

$$\Box A_\mu(x) = \int \Box G(x-x')[ie\overline{\Psi}(x')\gamma_\mu\Psi(x')]d^4x' = -ie\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x).$$

На самом деле (7.4) является записью уравнения (7.2) в интегральной форме. Однако, поскольку правая часть уравнения (7.4) пропорциональна малой величине e ($e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}$), то приближенное решение для $A_\mu(x)$ можно найти из (7.4) с помощью итераций.

Представим теперь решение уравнения (6.16) в интегральной форме аналогичной (7.4). Запишем уравнение (6.16) в виде

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,\Psi(x) = ieA_\mu\gamma_\mu\,\Psi(x) \qquad (7.5)$$

и определим фермионную функцию Грина $G_F(x-x')$,, которая удовлетворяет уравнению

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)G_F(x-x') = \delta(x-x'). \qquad (7.6)$$

Запишем волновую функцию $\Psi(x)$ уравнения (7.5), используя следующую интегральную форму:

$$\Psi(x) = \Psi^{(0)}(x) + ie\int G_F(x-x')\gamma_\mu A_\mu(x')\Psi(x')d^4x', \qquad (7.7)$$

где $\Psi^{(0)}(x)$ - решение свободного уравнения

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,\Psi^{(0)}(x) = 0.$$

Если подставим $\Psi(x)$ из (7.7) в уравнение (7.6), то получим:

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\Psi(x) = ie\int(\gamma_\mu\partial_\mu + m)G_F(x-x')\gamma_\mu A_\mu(x')\,\Psi(x')d^4x' =$$

$$= ie\int\delta(x-x')\gamma_\mu A_\mu(x')\Psi(x')d^4x' = ie\gamma_\mu A_\mu\Psi(x).$$

2. Функции Грина спинорного и фотонного полей.

Определим функцию Грина $G_F(x-x')$. Для этого воспользуемся представлением этой функции в виде четырехмерного интеграла Фурье

$$G_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int G_F(p)e^{ip(x-x')}d^4p, \qquad (7.8)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

где $G_F(p)$ - импульсное представление функции Грина.

Аналогичное разложение Фурье справедливо для четырехмерной δ-функции.

$$\delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ip(x-x')}d^4p. \qquad (7.9)$$

Подставляя (7.9) и (7.8) в (7.6), получим

$$\int (p^2+m^2)\, G_F(p)e^{ip(x-x')}d^4p = \int e^{ip(x-x')}d^4p$$

Таким образом, функция Грина в импульсном представлении имеет вид:

$$G_F(p) = \frac{1}{p^2+m^2}. \qquad (7.10)$$

Согласно (7.8) функция $G_F(x-x')$ определяется с помощью четырехмерного интеграла

$$G_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}\, d^3p \int \frac{e^{-ip\left(x_0-x_0'\right)}}{\vec{p}^2-p_0^2+m^2}\, \mathrm{d}p_0. \qquad (7.11)$$

Как видно из (7.11), интеграл по p_0 имеет полюс $\vec{p}^2-p_0^2+m^2=0$, а поэтому определение этого интеграла надо рассматривать отдельно.

Для определения амплитуды взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами нам понадобится запаздывающая функция Грина $G_F^{(r)}(x-x')$,, с помощью которой учитывается запаздывающее действие источника.

С этой целью перейдем в комплексную плоскость переменной p_0 и сместим на бесконечно малую величину ε полюса интеграла (7.11) с действительной оси, что обеспечит определенный путь обхода полюсов.

Функция Грина (7.11) в этом случае будет определена следующим образом:

$$G_F^{(r)}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{m-i\hat{p}}{p^2+m^2-i\varepsilon}e^{ip(x-x')}d^4p. \qquad (7.12)$$

В выражении (7.12) выделим интеграл по p_0

$$I = \frac{1}{2\pi}\int dp_0 \frac{(-1)(m-i\hat{p})e^{-ip_0(t-t')}}{(p_0-E_p+i\delta)(p_0+E_p-i\delta)}, \qquad (7.13)$$

Где $\delta = \frac{\varepsilon}{2E_p}$, $E_p = \sqrt{\vec{p}^2+m^2}$.

Интеграл (7.13) имеет два полюса (см. рис. 1).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

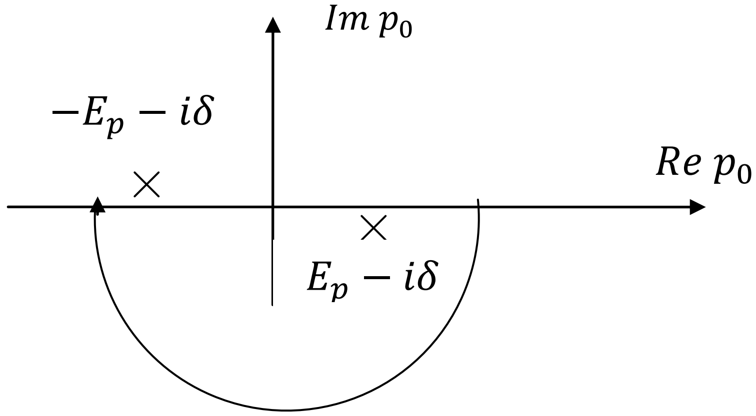

Рис.1 Контур интеграла (7.13) для $x_0 - x_0' > 0$.

Согласно лемме Жордана из теории функций комплексного переменного при $x_0 - x_0' > 0$ интеграл по нижней полуокружности равен нулю при стремлении её радиуса к бесконечности. Поэтому интеграл (7.13) по контуру рис.1 будет равен вычету в полюсе $p_0 = E_p - i\delta$.

$$G_F^{(r)}(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{(m - i\hat{p})}{2E_p} e^{ip(x-x')} \theta(t - t'), \qquad (7.14)$$

где $p_0 = E_p$, а функция $\theta(t - t')$ определена так

$$\theta(t - t') = \begin{cases} 1, t > t' \\ 0, t < t' \end{cases}.$$

Если воспользуемся определением (5.54) функций спинорного поля $\Psi_p^{(+)}(x, \lambda)$ и учтём, что $\sum_\lambda U^{(\lambda)}(\vec{p})\overline{U}^{(\lambda)}(\vec{p}) = \frac{m - i\hat{p}}{2m}$, то

$$G_F^{(r)}(x - x') = i \int d^3p\ \Psi_p^{(+)}(x, \lambda)\overline{\Psi}_p^{(+)}(x', \lambda)\theta(t - t'). \qquad (7.15)$$

Функция Грина для вектора магнитного поля определяется аналогичным образом, только нужно учесть, что $m=0$. В результате получим

$$G^r(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - i\varepsilon} d^4k. \qquad (7.16)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

3. Определение амплитуды процессов взаимодействия фотонов с заряженными частицами в рамках теории возмущений.

Одной из основных задач теории элементарных частиц является описание их взаимодействия и определение на этой основе характеристик и основных свойств элементарных частиц.

Представление о взаимодействии элементарных частиц разбивается на определение начальных состояний свободных частиц до взаимодействия, и определения состояний продуктов реакции после взаимодействия.

Теория взаимодействия должна предсказывать вероятность обнаружения в определённом конечном состоянии частиц, которые являются продуктами реакции.

Решая уравнения взаимодействия (6.16 – 6.18) можно определить вероятность процессов взаимодействия. Согласно квантовой механики, вероятность процессов рассеяния амплитуды, разложения в интеграл Фурье функций взаимодействующих полей.

Включение и выключение взаимодействия частиц осуществляется в моменты времени $t = +\infty$ и $t = -\infty$ соответственно. Считается, что до и после взаимодействия состояния частиц определяются плоскими волнами. Так спинорные частицы будут определяться функциями:

$$\Psi_p(x; r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{m}{E}}\,U^{(r)}(\vec{p})e^{ipx}, \qquad (7.17)$$

$$\bar{\Psi}_p(x; r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{m}{E}}\,\bar{U}^{(r)}(\vec{p})e^{-ipx}, \qquad (7.18)$$

где $U^{(r)}(\vec{p})$ и $\bar{U}^{(r)}(\vec{p})$- биспинор и дираковски-сопряжённый биспинор, принимает значения $\pm\frac{1}{2}$.

Волновые функции (7.17) и (7.18) удовлетворяют условию нормировки:

$$< \Psi_{p'}(x; r'), \Psi_p(x; r) >= \int \bar{\Psi}_{p'}(x; r')\,\gamma_4 \Psi_p(x; z) d^3x = \delta(\overrightarrow{p'} - \vec{p})\delta_{r'r}. \qquad (7.19)$$

Биспиноры $U^{(r)}(\vec{p})$ и $\bar{U}^{(r)}(\vec{p})$ в импульсном представлении удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(i\hat{p} + m)U^{(r)}(\vec{p}) = 0, \qquad (7.20)$$

$$\bar{U}^{(r)}(\vec{p})(i\hat{p} + m) = 0, \qquad (7.21)$$

где $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu.$

Методом итераций интегральное уравнение (7.7) можно представить в виде:

$$\Psi(x) = \Psi^{(0)}(x) + ie\int G_F(x - x')\,\gamma_\mu A_\mu(x')\Psi^{(0)}(x')d^4x' +$$

$$+(ie)^2 \int G_F\,(x - x')\gamma_\mu A_\mu(x')G_F\big(x - x''\big)\gamma_\nu A_\nu\big(x''\big)\Psi^{(0)}\big(x''\big)dx' d^4x'' + \cdots \qquad (7.22)$$

Фактически в этом выражении приведено разложение функции $\Psi(x)$ по константе взаимодействия "e". Представим разложение (7.22) в виде соотношения

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \Psi^{(k)}(x), \qquad (7.23)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Где индекс "n"указывает до какого порядка по константе "e"учитывается разложение функции $\Psi(x)$. Например, $\Psi_1(x)$ в (7.22) выглядит так:

$$\Psi_1(x) = ie\int G_F(x-x')\,\gamma_\mu A_\mu(x')\Psi^{(0)}(x')d^4x'. \qquad (7.24)$$

Поскольку функции $\Psi^{(0)}(x;q)$ удовлетворяет условию нормировки (7.19) и являются независимыми, то функцию $\Psi_n(x)$ можно разложить по $\Psi^{(0)}(x;q)$

$$\Psi_n(x;l) = \sum_q < q|C^n(t)|e > \Psi^{(0)}(x;q). \qquad (7.25)$$

Коэффициенты разложения (7.25) можно определить, воспользовавшись опять условием ортонормировки функций $\Psi^{(0)}(x;q)$.

$$< q|C^n(t)|l > = < \Psi^{(0)}(x;q), \Psi_n(x;l) >. \qquad (7.26)$$

В соотношении (7.26) в правой части воспользуемся разложением (7.23).
В результате получим:

$$< q|C^n(t)|l > = \sum_{k=0}^{n} < \Psi^{(0)}(x;q), \Psi_n(x;l) > = \sum_{k=0}^{n} < q|C_k|l >. \qquad (7.27)$$

В уравнении (7.27) введено обозначение

$$< q|C_k|l > =$$

$$= < \Psi^{(0)}(x;q); (ie)^k \int..k..\int G_F(x-x')\,\hat{A}(x')\,...\,\hat{A}(x^k)\Psi^{(0)}(x^k;l)\prod_k d^4x^k >. \qquad (7.28)$$

При использовании этого выражения в случае конкретных вычислений амплитуд процессов взаимодействия, будем руководствоваться асимптотическими условиями:

$$\Psi(x)|_{t=-\infty} = \Psi^{(0)}(x;l), \qquad \Psi(x)|_{t=+\infty} = \overline{\Psi}^{(0)}(x;q),$$

$$A_\mu(x)\Big|_{t=-\infty} = A_\mu{}^{(0)}(x;l), \qquad A_\mu(x)\Big|_{t=+\infty} = A_\mu^{(0)*}(x;q).$$

Тема 8. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ.

1.Определение амплитуды рассеяния электронов в кулоновском поле.
2.Определение сечений рассеяния электронов в кулоновском поле.
3.Вычисление следов γ −частиц и кинематических соотношений процесса рассеяния.

Для теоретического изучения процессов взаимодействия элементарных частиц нужно рассчитать вероятность рождения частиц в определённых

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

квантовых состояниях, если известны начальные состояния вступающих во взаимодействие частиц. Согласно квантовой теории рассеяния элементарные частицы до и после реакции взаимодействия считаются асимптотически свободными.

1. Определение амплитуды рассеяния электронов в кулоновском поле.

Коэффициенты разложения $< q|C_k|l >$ (7.28) в теории рассеяния имеют смысл амплитуд вероятностей перехода от состояний системы частиц до реакции к определённым состояниям частиц после взаимодействия. Рассмотрим задачу взаимодействия электронов с электромагнитным полем в первом порядке теории возмущений.

Амплитуда вероятности перехода электрона из начального состояния $\Psi^{(0)}(x;q_1)$ в конечное состояние $\Psi^{(0)}(x;q_2)$ при заданном начальном состоянии фотона ${A_\mu}^{(0)}(x;l_1)$ в первом порядке теории возмущений имеет вид:

$$\langle q_2 \big| C^{(1)} \big| q_1, l_1 \rangle =$$

$$= ie \iint \overline{\Psi}^{(0)}(x;q_2)\gamma_4 G_F(x-x')\Big|_{t=+\infty} \widehat{A}^0(x';l_1)\Psi^{(0)}(x';q_1)d^3x d^4x. \qquad (8.1)$$

Воспользовавшись соотношением

$$< \Psi_{p'}(x;r), G_F(x-x')|_{t=+\infty} = i\int d^3p \sum_r < \Psi_{p'}(x;r'), \Psi_{p'}(x;r) > \overline{\Psi}_p(x';r) =$$

$$= i\int d^3p \sum_r \delta(\vec{p}\,' - \vec{p})\delta_{r'r}\ \overline{\Psi}_p(x';r) = i\overline{\Psi}_{p'}(x';r'). \qquad (8.2)$$

При вычислении (8.2) было учтено определение запаздывающей функции Грина (7.15).

Таким образом, матричный элемент (8.1) будет определяться так:

$$<\vec{p}\,', r'|C^{(1)}\big|\vec{p}, \vec{r}; \vec{k}, \lambda >= i(ie)\int \overline{\Psi}^{(0)}(x';\vec{p}\,',r')\,\widehat{A}^0\big(x';\vec{k},\lambda\big)\Psi^{(0)}(x';\vec{p},r)d^4x' =$$

$$= \frac{(-e)m}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\omega E E'}}\overline{U}^{(r')}(\vec{p}\,')\hat{e}^{(\lambda)}U^r(\vec{p})\delta(k+p-p'), \qquad (8.3)$$

где совокупность квантовых характеристик начальных частиц q_1 и l_1 заменены на $\{\vec{p}, r\}$ и $\{\vec{k}, \lambda\}$ соответственно, а характеристики q_2 на $\{\vec{p}\,', r'\}$. А также учтено определение δ функции Дирака

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int exp[i(k+p-p')x']d^4x' = \delta(k+p-p').$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

В виде диаграммы выражение (8.3) можно изобразить так:

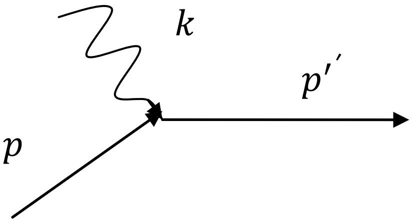

Рис.2 Диаграммное представление матричного элемента (8.3).

Аналогичным образом можно показать, что матричный элемент излучения фотона имеет вид:

$$\left\langle \vec{p}', r'; \vec{k}', \lambda' \middle| C^{(1)} \middle| \vec{p}, r \right\rangle = \frac{(e)m}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\omega' EE'}} \delta(p' + k' - p) \vec{U}^{(r')}(\vec{p}') \hat{e}^{(\lambda')^*} U^{(r)}(\vec{p}). \quad (8.4)$$

Матричный элемент (8.4) изображен в виде диаграммы на рис.3.

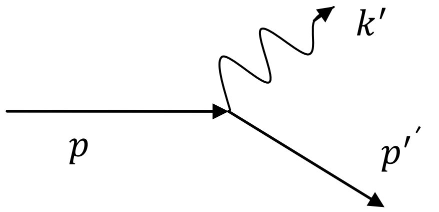

Рис. 3. Диаграммное представлении матричного элемента (8.4).

Рассмотрим теперь рассеяние электрона в кулоновском поле. В результате рассеяния электрон переходит из состояния $\{\vec{p}, r\}$ в состояние $\{\vec{p}', r'\}$. Вычисляя матричный элемент перехода по аналогии с получением выражения (8.3), получим

$$\left\langle \vec{p}', r' \middle| S^{(1)} \middle| \vec{p}, r \right\rangle = -e \int \bar{\Psi}\,(x'; \vec{p}', r') \hat{A}(x') \Psi(x'; \vec{p}, r) d^4x' =$$

$$= -\frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{m}{\sqrt{EE'}} \bar{U}^{(r')}\,(\vec{p}') \hat{A}(x') U^{(r)}(\vec{p}) e^{-i(p'-p)x'} d^4x' =$$

$$= -\frac{em}{(2\pi)^3\sqrt{EE'}} \bar{U}^{(r')}(\vec{p}') \gamma_\mu U^{(r)}(\vec{p}) \int A_\mu(x') e^{-iqx'} d^4x', \quad (8.5)$$

где $q = p' - p$.

Рассмотрим случай рассеяния электрона на кулоновском поле ядра с зарядом Ze, когда компоненты четырехмерного вектора потенциала $A_\mu(x)$ в системе единиц Хевисайда-Лоренца определяются следующим образом

$$\vec{A}(x) = 0,\ A_4 = i\varphi(x) = i\,\frac{Ze}{4\pi r}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

В этом случае матричный элемент (8.5) примет вид

$$S_{fi} = \langle \vec{p}', r' | C^{(1)} | \vec{p}, r \rangle = \frac{-iZe^2 m}{(2\pi)^3 \sqrt{EE'}} \frac{\bar{U}^{(r')}(\vec{p}')\gamma_4 U^{(r)}(\vec{p})}{\vec{q}^2} [(2\pi)\delta(E' - E)] \qquad (8.6)$$

При получении выражения (8.6) использовано соотношение

$$\int \frac{d^3 x'}{|x'|} e^{-i\vec{q}\vec{x}'} = \frac{4\pi}{\vec{q}^2}.$$

Функция $\delta(E' - E)$ отражает тот факт что рассеяние электрона будет упругим, т.е. $E' = E$, однако направление импульса будет меняться.

2. Определение сечений рассеяния электронов в кулоновском поле.

Вероятность перехода электрона в процессе рассеяния в трехмерный элемент импульса $d^3 p'$ равен

$$|S_{fi}|^2 d^3 p' = \frac{Z^2 (4\pi\alpha)^2}{(2\pi)^6 EE'} \frac{\left|\bar{U}^{(r')}(\vec{p}')\gamma_4 U^{(r)}(\vec{p})\right|^2}{\vec{q}^4} [(2\pi)\delta(E' - E)]^2 d^3 p', \qquad (8.7)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ - постоянная тонкой структуры.
Квадрат δ – функции в (8.7) определим исходя из соотношения

$$2\pi\delta(E' - E) = lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt e^{i(E'-E)t}. \qquad (8.8)$$

Из (8.8) следует, что

$$2\pi\delta(0) = lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T. \qquad (8.9)$$

Следовательно, вероятность перехода в процессе рассеяния в единицу времени равна:

$$R = \frac{|S_{fi}|^2 d^3 p'}{T} = \frac{4Z^2\alpha^2}{(2\pi)^3 EE'} \frac{\left|\bar{U}^{(r')}(\vec{p}')\gamma_4 U^{(r)}(\vec{p})\right|}{\vec{q}^4} \delta(E' - E). \qquad (8.10)$$

Сечение рассеяния определяется, как отношение R к падающему потоку начальных частиц:

$$\vec{J}_{\text{пад}} = \vec{\Psi}\vec{\gamma}\Psi. \qquad (8.11)$$

Учитывая нормировку волновых функций Ψ, получим

$$|\vec{J}_{\text{пад}}| = \frac{|\vec{V}|}{(2\pi)^3}, \qquad (8.12)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ. Ф. СКОРИНЫ

где $\left|\vec{V}\right| = \frac{|\vec{p}|}{E}$.

Таким образом, выражение для дифференциального сечения рассеяния электронов на кулоновском поле принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\vec{V}|E} \frac{\left|\overline{U}^{(r')}(\vec{p}\prime)\gamma_4 U^{(r)}(\vec{p})\right|^2}{\vec{q}^4} \frac{{p'}^2 dp'}{E'} \delta(E'-E). \qquad (8.13)$$

Из соотношения

$$E'^2 = \vec{p}'^2 + m^2$$

следует, что

$$|\vec{p}'|d|\vec{p}'| = E'dE'. \qquad (8.14)$$

Поэтому, выполняя интегрирование в (8.13) с учетом δ-функции и соотношения (8.14), получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2m^2}{|\vec{q}|^4} \left|\overline{U}^{(r')}(\vec{p}')\gamma_4 U^{(r)}(\vec{p})\right|^2. \qquad (8.15)$$

В случае, когда поляризация начальных и конечных электронов не учитывается, тогда выполняют усреднение по поляризациям начальных электронов и суммирование по поляризациям конечных электронов в (8.15)

$$\left\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\right\rangle = \frac{1}{2}\sum_r \sum_{r'} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \qquad (8.16)$$

3. Вычисление следов γ-матриц и кинематических соотношений процесса рассеяния.

Вычислим теперь сумму по поляризациям электронов в (8.16). Сумму по спиновым состояниям запишем в виде:

$$\sum_r \sum_{r'} \left|\overline{U}^{(r')}(\vec{p}')\gamma_4 U^{(r)}(\vec{p})\right|^2 =$$

$$= \sum_r \sum_{r'} \left[\overline{U}_\alpha{}^{(r')}(\vec{p}')(\gamma_4)_{\alpha\beta} U_\beta{}^{(r)}(\vec{p})\right]^* \left[\overline{U}_{\alpha'}{}^{(r')}(\vec{p}')(\gamma_4)_{\alpha'\beta'} U_{\beta'}{}^{(r)}(\vec{p})\right] =$$

$$= \sum_r \sum_{r'} \overline{U}_\beta{}^{(r)^*}(\vec{p})(\gamma_4)^+_{\beta\alpha}(\gamma_4)_{\alpha\gamma} U_\alpha{}^{(r')}(\vec{p}')\overline{U}_\alpha{}^{(r')}(\vec{p}')\,(\gamma_4)_{\alpha'\beta'} U_{\beta'}{}^{(r)}(\vec{p}) =$$

$$= \sum_r \sum_{r'} \left[\overline{U}^{(r)}(\vec{p})(\widetilde{\gamma_4}) U^{(r')}(\vec{p}')\overline{U}^{(r')}(\vec{p}')(\gamma_4) U^{(r)}(\vec{p})\right]. \qquad (8.17)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

В этом выражении по повторяющимся индексам α, β, α' и β' приводится суммирование по компонентам биспиноров, $\tilde{\gamma}_4 = \gamma_4 {\gamma_4}^{+} \gamma_4 = \gamma_4$.
Учитывая, что

$$\sum_r U^{(r)}(\vec{p}) \overline{U}^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - i\hat{p}}{2m},$$

выражение (8.17) можно свести к вычислению следа:

$$\sum_r \sum_{r'} \left| \overline{U}^{(r')}(\vec{p}') \gamma_4 U^{(r)}(\vec{p}) \right|^2 = \frac{1}{4m^2} Sp[\gamma_4 (m - i\hat{p}') \gamma_4 (m - i\hat{p})]. \quad (8.18)$$

В общем случае вычисление следов произведения γ-матриц основывается на соотношениях

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (8.19)$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0. \quad (8.20)$$

В соотношении (8.20) введена γ_5-матрица

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При вычислении следов произведения γ-матриц необходимо иметь в виду, что

$$Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A}).$$

В самом деле

$$Sp(\hat{A}\hat{B}) = \sum_a \sum_{\alpha'} A_{\alpha\alpha'} B_{\alpha'\alpha} = \sum_a \sum_{\alpha'} B_{\alpha'\alpha} A_{\alpha\alpha'} = Sp(\hat{B}\hat{A}).$$

Теперь можно показать, что след произведения нечетного числа γ-матриц равен нулю. Действительно,

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\varrho) = Sp(\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\varrho) = -Sp(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\varrho \gamma_5) =$$

$$= -Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\varrho) = 0. \quad (8.21)$$

При доказательстве (8.21) используется соотношение (8.20) и тот факт, что

$${\gamma_5}^2 = I.$$

Из соотношения (8.19) следует, что

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = Sp\{2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu\} = 8\delta_{\mu\nu} - Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu).$$

Таким образом, очевидно

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}. \qquad (8.22)$$

Аналогичным образом, используя (8.19) можно показать, что

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\varrho \gamma_5) = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\varrho\sigma} - \delta_{\mu\varrho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\varrho}). \qquad (8.23)$$

Если (8.22) умножить на четырехмерные векторы a_μ и b_ν, а (8.23) на четырехмерные векторы a_μ, b_ν, c_ϱ и d_σ и просуммировать по индексам $\mu, \nu, \varrho, \sigma$, то получим

$$Sp(\hat{a}\hat{b}) = 4(ab), \qquad (8.24)$$

$$Sp(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) = 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)]. \qquad (8.25)$$

Теперь вычислим след в (8.18)

$$Sp[\gamma_4(m - i\hat{p}')\gamma_4(m - i\hat{p})] = 4m^2 - Sp(\gamma_4\hat{p}'\gamma_4\hat{p}) = 4m^2 + Sp(\hat{a}\hat{p}'\hat{a}\hat{p}).$$

Чтобы воспользоваться (8.25), был введен четырехмерный вектор «а» с компонентами

$$a\{\vec{0}, a_4 = i\}.$$

Таким образом, результаты вычислений следа можно представить в виде соотношения

$$Sp[m^2 - \gamma_4\hat{p}'\gamma_4\hat{p}] = 4[m^2 + E'E + (\vec{p}'\vec{p})]. \qquad (8.26)$$

Учитывая теперь (8.18) и (8.26) в определении (8.16), получим

$$\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\rangle = \frac{2z^2\alpha^2}{|\vec{q}|^4}[m^2 + E'E + (\vec{p}'\vec{p})]. \qquad (8.27)$$

Как было отмечено ранее, процесс рассеяния является упругим, следовательно

$$E' = E, \quad |\vec{p}'| = |\vec{p}|.$$

В этом случае

$$E'E + (\vec{p}'\vec{p}) = E^2 + |\vec{p}|^2\cos\theta = E^2(1 + \vartheta^2\cos\theta),$$

где θ - угол рассеяния, $\vec{\vartheta} = \frac{\vec{p}}{E}$.

Квадрат переданного импульса равен:

$$\vec{q}^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 = 4\vec{p}^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Подставляя полученные кинетические соотношения в выражение (8.27) получим формулу Мотта для дифференциального сечения рассеяния электронов в кулоновском поле

$$\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\rangle = \frac{4z^2\alpha^2E^2}{\vec{q}^4}\left(1-\frac{\vec{q}^2}{4E^2}\right) = \frac{z^2\alpha^2}{4E^2\vartheta^4\,sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-\vartheta^2\,sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (8.28)$$

Множитель в круглых скобках в (8.28) обязан своим происхождением наличию у электрона спин ½, ибо возникает он при вычислении суммы по поляризациям электрона. Если осуществить замену

$$1-\vartheta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\to 1,$$

то получим формулу Резерфорда

$$\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\rangle = \frac{z^2\alpha^2}{4E^2\vartheta^4\,sin^4\frac{\theta}{2}}\,, \qquad (8.29)$$

которая определяется в случае рассеяния заряженной частицы спина нуль на кулоновском центре.

Таким образом, наличие у электрона спина связано с изменением зависимости дифференциального сечения от угла рассеяния.

В нерелятивистском случае, когда E~m и ϑ <<1, из (8.29) следует, что

$$\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\rangle > \sim \frac{z^2\alpha^2}{4m^2\vartheta^4\,sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

В этом случае $\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\rangle$ имеет сингулярность при θ→0, что обусловлено дальнодействующим характером кулоновского взаимодействия.

В области высоких энергий, когда E>>m, ϑ~1, сечение рассеяния имеет вид

$$\langle\frac{d\sigma}{d\Omega}\rangle \sim \frac{z^2\alpha^2}{4E^2\,sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-\vartheta^2\,sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Из этого соотношения видно, что быстрые электроны будут рассеиваться преимущественно вперед.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

Библиографический список.

1. Бьёркен, Д.Д. Релятивистская квантовая теория поля: в 2 т. /Д.Д. Бьёркен, С.Д. Дрелл.- Москва:Наука,1978.- Т.1:Релятивистская квантовая механика. -296с.

2. Богуш, А. А. Введение в теорию классических полей / А. А. Богуш, Л.Г. Мороз. — Минск: Наука и техника, 1968. — 387 с.

3. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. –Минск: Наука и техника, 1987.-359с.

4. Биленкий, С.М. Введение в диаграммную технику Фейнмана: учеб. пособие для вузов / С.М. Биленкий-1-е изд. –М.: Атомиздат, 1971. -215 с.С.М.

5. Москалёв, А.Н. Релятивистская теория поля / А.Н. Москалев.- Санкт-Петербург, 2006.-206с.

6. Гальцов, Д.В. Классические поля / Д.В. Гальцов, Ю.В. Грац, В.И. Жуковский. -изд. МГУ, 1991.-150с.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.Ф.СКОРИНЫ