А. А. Гришечкина (ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ПОВЕДЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрим следующие релятивистские функции Грина системы двух частиц массы m каждая, которые в импульсном представлении имеют вид [1]:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\chi-\cos a};\qquad \frac{1}{\operatorname{ch}^2\chi-\cos^2 a};$$
$$\frac{\operatorname{ch}\chi}{\operatorname{ch}^2\chi-\cos^2 a};\qquad \frac{1}{\operatorname{ch}\chi(\operatorname{ch}\chi-\cos a)}. \tag{1}$$

Здесь χ – быстрота, связанная с релятивистским импульсом p соотношением $p=m\operatorname{sh}\chi$, a – параметр, с помощью которого параметризуется энергия связанного состояния $E=m\cos a$.

Переход в релятивистское конфигурационное представление в одномерном случае осуществляется с помощью преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi-\cos a}d\chi;\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}^2\chi-\cos^2 a}d\chi;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\rho\chi}\operatorname{ch}\chi}{\operatorname{ch}^2\chi-\cos^2 a}d\chi;\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi(\operatorname{ch}\chi-\cos a)}d\chi. \tag{2}$$

Для нахождения функций Грина в релятивистском конфигурационном представлении необходимо вычислить эти интегралы. Для этого воспользуемся методами теории функций комплексной переменной [2]. Рассмотрим вместо интегралов по вещественной прямой (2) интегралы по замкнутому контуру $C=C_1+C_2+C_3+C_4$, показанному на рисунке 1:

$$\oint_C\frac{e^{i\rho z}}{\operatorname{ch}z-\cos a}dz;\qquad \oint_C\frac{e^{i\rho z}}{\operatorname{ch}^2 z-\cos^2 a}dz;$$
$$\oint_C\frac{e^{i\upsilon z}\operatorname{ch}z}{\operatorname{ch}^2 z-\cos^2 a}dz;\qquad \oint_C\frac{e^{i\rho z}}{\operatorname{ch}z(\operatorname{ch}z-\cos a)}dz. \tag{3}$$

Предельный переход $R\to\infty$ вдоль вещественной оси даст искомые интегралы (2). Путь вдоль линии C_3 выбран таким образом, чтобы знаменатель подынтегральной функции остался неизменным. При этом в числителе появится постоянный множитель $e^{-2\pi\rho}$. Интегралы

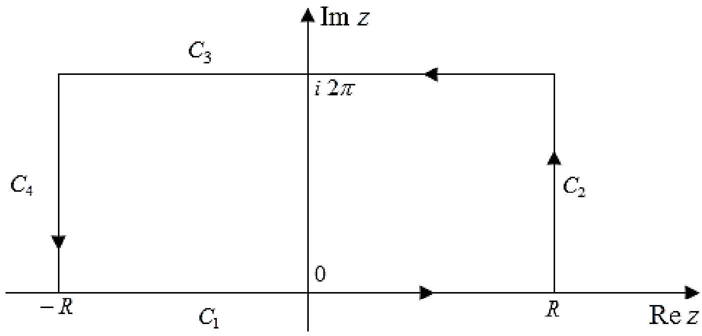

Рисунок 1 – Контур интегрирования в комплексной плоскости

по линиям C_2 и C_4 стремятся к 0 при $R \to \infty$. Таким образом, для одного из интегралов (2) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \cos a} d\chi = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\rho}} \oint\limits_{C} \frac{e^{i\rho z}}{\operatorname{ch} z - \cos a} dz\,. \tag{4}$$

Аналогично доказывается связь остальных интегралов (2) с интегралами (3).

Значения интегралов (3) можно определить, используя теорему о вычетах [2]. Находя особые точки для каждой из подынтегральных функций и соответствующие значения вычетов в них, получим следующие результаты:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \cos a} d\chi = \frac{2\pi}{\sin a} \frac{\operatorname{sh}(\rho(\pi - a))}{\operatorname{sh}(\rho\pi)};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}^2\chi - \cos^2 a} d\chi = \frac{\pi}{\cos a \cdot \sin a} \frac{\operatorname{sh}(\rho(\pi/2 - a))}{\operatorname{sh}(\rho\pi/2)};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}\operatorname{ch}\chi}{\operatorname{ch}^2\chi - \cos^2 a} d\chi = \frac{\pi}{\sin a} \frac{\operatorname{ch}(\rho(a - \pi/2))}{\operatorname{ch}(\rho\pi/2)};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi(\operatorname{ch}\chi - \cos a)} d\chi = \frac{2\pi}{\cos a} \frac{1}{\operatorname{sh}(\rho\pi)} \left[\frac{\operatorname{sh}(\rho(\pi - a))}{\sin a} - \operatorname{sh}(\rho\pi/2) \right].$$

Теперь если в интегралах (2) заменить $\cos a$ на $\operatorname{ch} b$ получим Фурье-преобразования функций Грина для состояний рассеяния, для которых энергия параметризуется соотношением $E = m \operatorname{ch} b$. При вычислении полученных интегралов возникнут трудности, связанные с дополнительными полюсами, которые попадут на контур интегрирования в комплексной плоскости. Для устранения данной проблемы сместим полюса с контура интегрирования. Это можно сделать несколькими способами, например, путем замены $\operatorname{ch} b$ на $\operatorname{ch}(b+i\varepsilon)$ или $\operatorname{ch}(b-i\varepsilon)$. В таком случае получим Фурье-преобразования для двух разных типов функций Грина. Нахождение значений интегралов аналогично процедуре, описанной выше. В пределе $\varepsilon \to +0$ получим:

- при замене $\cos a$ на $\operatorname{ch}(b+i\varepsilon)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}(b+i\varepsilon)} d\chi = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}(\pi\rho)} \frac{\operatorname{sh}(\rho(ib+\pi))}{\operatorname{sh} b};$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}^2\chi - \operatorname{ch}^2(b+i\varepsilon)} d\chi = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}(\rho\pi/2)} \frac{\operatorname{sh}(\rho(ib+\pi/2))}{\operatorname{sh}(2b)};$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}\operatorname{ch}(\chi)}{\operatorname{ch}^2\chi - \operatorname{ch}^2(b+i\varepsilon)} d\chi = \frac{\pi i}{\operatorname{ch}(\rho\pi/2)} \frac{\operatorname{ch}(\rho(ib+\pi/2))}{\operatorname{sh} b}; \qquad (5)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}(b+i\varepsilon))} d\chi = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}(\rho\pi)}\left[\frac{-\operatorname{sh}(\rho\pi/2)}{i\cdot\operatorname{ch} b} + \frac{2\operatorname{sh}(\rho(ib+\pi))}{\operatorname{sh}(2b)}\right];$$

- при замене $\cos a$ на $\operatorname{ch}(b-i\varepsilon)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}(b-i\varepsilon)} d\chi = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}(\pi\rho)} \frac{\operatorname{sh}(\rho(ib-\pi))}{\operatorname{sh} b};$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}^2\chi - \operatorname{ch}^2(b-i\varepsilon)} d\chi = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}(\rho\pi/2)} \frac{\operatorname{sh}(\rho(ib-\pi/2))}{\operatorname{sh}(2b)};$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}\operatorname{ch}\chi}{\operatorname{ch}^2\chi - \operatorname{ch}^2(b-i\varepsilon)} d\chi = \frac{-\pi i}{\operatorname{ch}(\rho\pi/2)} \frac{\operatorname{ch}(\rho(ib-\pi/2))}{\operatorname{sh} b}; \qquad (6)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho\chi}}{\operatorname{ch}\chi(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}(b-i\varepsilon))} d\chi = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh}(\rho\pi)}\left[\frac{-\operatorname{sh}(\rho\pi/2)}{i\cdot\operatorname{ch} b} + \frac{2\operatorname{sh}(\rho(ib-\pi))}{\operatorname{sh}(2b)}\right].$$

Действительные части полученных выражений одинаковы, а мнимые отличаются знаком. На рисунках 2, 3 представлены графики зависимости мнимой и действительной частей первого из выражений (5) и (6) от ρ. Из полученных результатов ясно, что все функции Грина при $\rho \to 0$ конечны, а при $\rho \to \infty$ и $\rho \to -\infty$ ведут себя как функция $Ae^{\pm i\rho b}$.

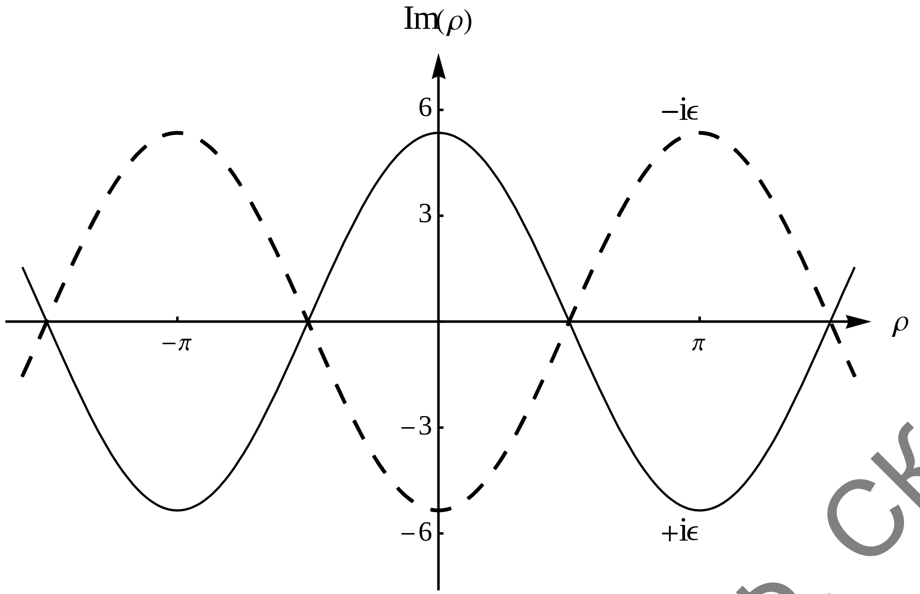

Рисунок 2 – Графики зависимости мнимой части первого из выражений (5) и (6) от ρ

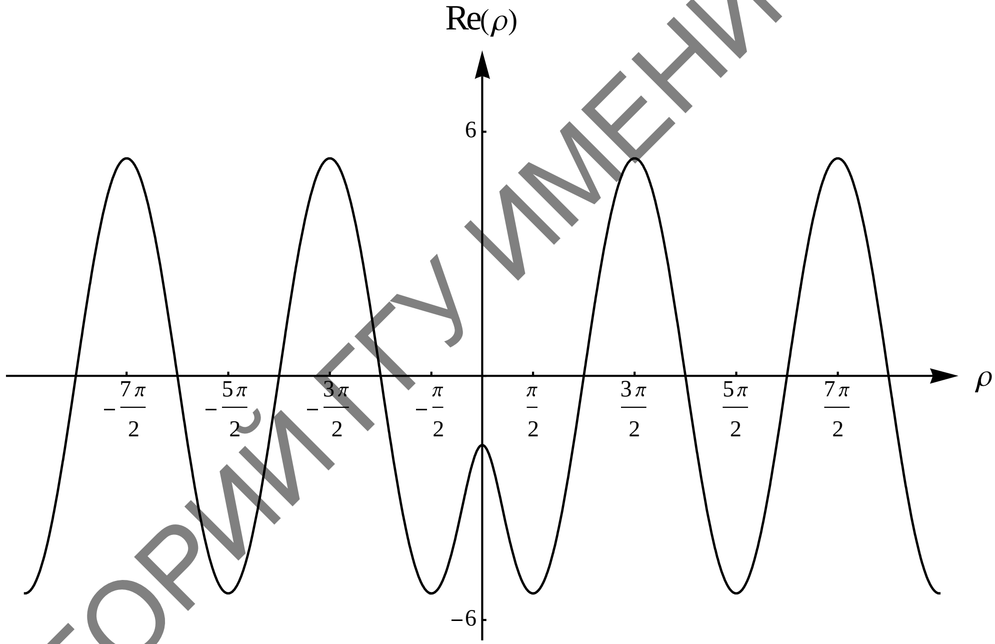

Рисунок 3 – График зависимости действительной части первого из выражений (5) и (6) от ρ

Литература

1. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V. N. Kapshai, T. A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol.32. – P.5329-5342.

2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лавреньтьев, Б.В. Шабат. – М. : Физматлит, 1958. – 678 с.