Проблемы физики, математики и техники, № 2 (35), 2018

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

В.Н. Тютянов[1], **Т.В. Тихоненко**[2], **П.В. Бычков**[3]

[1]*Международный университет «МИТСО», Гомель*
[2]*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*
[3]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

PRODUCT OF TWO $\mathbb{P}$-SUBNORMAL SUBGROUPS

V.N. Tyutyanov[1], **T.V. Tihonenko**[2], **P.V. Bychkov**[3]

[1]*International University «MITSO», Gomel*
[2]*P.O. Sukhoi Gomel State Technical University*
[3]*F. Scorina Gomel State University*

Получены свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп и свойства групп, которые являются произведением двух своих $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп.

Ключевые слова*: конечная группа, простая неабелева группа, факторизуемая группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа.*

Some properties of $\mathbb{P}$-subnormal subgroups and the groups that are products of two $\mathbb{P}$-subnormal subgroups are obtained.

Keywords*: finite group, simple non-abelian group, factorized group, $\mathbb{P}$-subnormal subgroup.*

Введение

В статье рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Л.С. Казарин определил неабелевы композиционные факторы конечной группы *G*, обладающей рядом подгрупп

$$1 = Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_{n-1} \subset Y_n = G,$$

где $|Y_i : Y_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \ldots, n.$ Данная цепь начинается с единичной подгруппы Y_0. Поэтому в [2] введено следующее естественное определение.

Определение. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается H $\mathbb{P}$-sn G), если либо H = G, либо существует цепь подгрупп* $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \ldots, n$.

Данное определение оказалось весьма полезным и неоднократно обобщалось [3], [4]. Группам с системами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп посвящено достаточно много работ. В частности, в ряде из них изучалось строение факторизуемых групп с $\mathbb{P}$-субнормальными сомножителями [4], [5], [6].

1 Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти, например, в [7]. Для удобства приведем некоторые обозначения. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы *G*; $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп *N* и *M* группы *G* $N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$; R^n – прямое произведение *n* сомножителей, каждый из которых изоморфен группе *R*; если $H \le G$, то $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

***Лемма* 1.1.** *Пусть G = AB – конечная группа, где A $\mathbb{P}$-sn G и B $\mathbb{P}$-sn G, тогда G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Предположим, что *G* – простая неабелева группа. По условию существуют подгруппы $M_1 \supseteq A$ и $M_2 \supseteq B$ такие, что $|G : M_1| = p$ и $|G : M_2| = q$, где *p* и *q* – простые числа. Так как *G* – простая неабелева группа, то, очевидно, что *G* изоморфно вкладывается в симметрические группы S_p и S_q, причем $p = \max \pi(G)$ и $q = \max \pi(G)$. Следовательно, $p = q$, а M_1 и M_2 – p'-подгруппы в группе *G*. Противоречие с тем, что $G = M_1 M_2$. Таким образом, *G* не является простой неабелевой группой. □

***Лемма* 1.2.** *Пусть G – конечная группа, $N \trianglelefteq G$ и R $\mathbb{P}$-sn G. Тогда существует R-инвариантная цепь $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{n-1} \subset N_n = N$, где $|N_i : N_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \ldots, n$. В частности, R $\mathbb{P}$-sn NR.*

Доказательство. Так как *R* – $\mathbb{P}$-*sn G*, то существует цепь

$$R = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_{t-1} \subset R_t = G,$$

где $|R_i : R_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1, \ldots, t.$

Рассмотрим цепь

$$R \cap N = R_0 \cap N \subseteq$$
$$\subseteq R_1 \cap N \subseteq \ldots \subseteq R_{t-1} \cap N \subseteq R_t \cap N = N.$$

Поскольку для всех $i = 1,\ldots,t$ $R \leq R_i$ и $R_i \cap N \trianglelefteq R_i$, то цепь является R-инвариантной. Так как

$$| R_i \cap N : R_{i-1} | = |(R_i \cap N) : R_{i-1} |$$

и

$$|R_i : R_{i-1}| = |R_i : (R_i \cap N)R_{i-1}||(R_i \cap N)R_{i-1} : R_{i-1}|,$$

то $|R_i \cap N : R_{i-1} \cap N|$ делит простое число. Следовательно, существует R-инвариантная цепь $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{n-1} \subset N_n = N$, где $|N_i : N_{i-1}|$ – простое число и $n \leq t$. □

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, *где* N_i – *изоморфные простые неабелевы группы* $k \geq 2$. *Если* $H < N$ *и* $|N : H| = p$ – *простое число, то* $H = N_{i_1} \times \ldots \times N_{i_{k-1}} \times \widetilde{N_{i_k}}$ *для некоторой перестановки* $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, *где* $\widetilde{N_{i_k}} < N_{i_k}$ *и* $|N_{i_k} : \widetilde{N_{i_k}}| = p$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k. Пусть $k = 2$. Если $H_N = 1$, то N изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_p. Так как p^2 делит $|N|$, то это невозможно. Значит, $H_N \neq 1$. Очевидно, что $H_N = N_1$ или $H_N = N_2$. Поэтому $H = N_1 \times (H \cap N_2)$ или $H = N_2 \times (H \cap N_1)$ и лемма верна. Следовательно, $k \geq 3$. Ясно, что $H_N \neq 1$. Поэтому $H_N = N_{i_1} \times \ldots \times N_{i_t}$. Если $t = k-1$, то лемма верна. При $t < k-1$ рассмотрим фактор-группу N / H_N и применим индукцию.

***Лемма* 1.4** [5, лемма 3.1]. *Пусть* H – *подгруппа группы* G, $N \trianglelefteq G$. *Тогда, если* H $\mathbb{P}$*-sn* G, *то* $(H \cap N)\mathbb{P}$*-sn* N *и* HN/N $\mathbb{P}$*-sn* G/N.

***Лемма* 1.5** [8, теорема 1]. *Пусть* G – *простая неабелева группа*, $H < G$ *и* $|G : H| = p^a$, *где* p – *простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(*a*) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, *где* $n = p^a$;

(*b*) $G \cong PSL_r(q)$, H – *параболическая подгруппа в* G, $|G : H| = \dfrac{q^r - 1}{q - 1} = p^a$ *и* r – *простое число*;

(*c*) $G \cong PSL_2(11)$, $H \cong A_5$;

(*d*) $G \cong M_{23}$, $H \cong M_{22}$ *или* $G \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$;

(*e*) $G \cong PSU_4(2)$, H – *параболическая подгруппа индекса* 27.

***Лемма* 1.6** [9, лемма 1.1]. *Пусть* G – *простая неабелева группа и* 1 $\mathbb{P}$*-sn* G. *Тогда*

$$G \in \left\{SL_3(3); SL_3(5); PSL_2(7); PSL_2(11); SL_2\left(2^n\right),\right.$$
где $\left. 2^n + 1 = p \text{ – простое число Ферма}\right\}$.

Множество групп из леммы 1.6 обозначим $\mathfrak{D}$.

***Лемма* 1.7** [5, лемма 4.1]. *Пусть группа* $G = AB$ – *произведение подгрупп* A *и* B. *Если существуют цепи подгрупп*

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$
$$B = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$$

с простыми индексами $|A_i : A_{i-1}|$, $|B_j : B_{j-1}|$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, *то* $(A_{i-1} \cap B)\mathbb{P}$*-sn* A_{i-1} *и* $(B_{j-1} \cap A)\mathbb{P}$*-sn* B_{j-1} *для всех* $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

***Лемма* 1.8.** *Пусть* $G = AB$, *где* A *и* B – *простые неабелевы группы*, $\mathbb{P}$*-субнормальные в* G. *Если* $A \cap B = 1$, *то* $A \in \mathfrak{D}$ *и* $B \in \mathfrak{D}$.

Доказательство. Положив в лемме 1.7 $i = j = 0$, получим, что $A \cap B$ $\mathbb{P}$*-sn* A и $A \cap B$ $\mathbb{P}$*-sn* B. Так как $A \cap B = 1$, то $A \in \mathfrak{D}$ *и* $B \in \mathfrak{D}$. □

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $G = AB$ – *конечная группа, где* A $\mathbb{P}$*-sn* G *и* B $\mathbb{P}$*-sn* G. *Если* $\mathfrak{R}_A$ *и* $\mathfrak{R}_B$ – *простые неабелевы композиционные факторы* A *и* B *соответственно, то* $\mathfrak{R}_G = \mathfrak{R}_A \cup \mathfrak{R}_B$ – *простые неабелевы композиционные факторы группы* G.

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. По лемме 1.1 G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G/N удовлетворяет условию теоремы, то, в силу минимальности контрпримера, N является неразрешимой группой. Следовательно, $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Отметим, $N_1 \notin \mathfrak{R}_A \cup \mathfrak{R}_B$ и, в частности, $N \not\subseteq A$ и $N \not\subseteq B$.

Пусть $A \subset N$, тогда $B \not\subseteq N$. Так как $G = AB$, то $N = A(N \cap B)$ и по лемме 1.4 A $\mathbb{P}$*-sn* N, $N \cap B$ $\mathbb{P}$*-sn* N. Поскольку G – минимальный контрпример, то $N_1 \in \mathfrak{R}_A \cup \mathfrak{R}_{N \cap B}$, что невозможно. Таким образом, $A \not\subseteq N$ и $B \not\subseteq N$.

Предположим, что $k = 1$. Рассмотрим группу NA. По лемме 1.2 в N существует A-инвариантная цепь

$$N \cap A = N_1 \subset \ldots \subset N_{t-1} = H \subset N_t = N,$$

где $|N : H| = p$ – простое число. Из леммы 1.5 следует, что это возможно только в случаях пар $\{N; H\}$: $\{A_p;\ A_{p-1}\}$, $\{PSL_r(q)$, где $\dfrac{q^r - 1}{q - 1} = p$ и r – простое число; P_1 или $P_{r-1}\}$, $\{M_{23};\ M_{22}\}$, $\{M_{11}$;

$M_{10}\}$, $\{PSL_2(11); A_5\}$. Аналогично, для подгруппы NB получим точно такие же пары $\{N; U\}$. Рассмотрим последовательно все случаи. Отметим, что факторизации почти простых групп рассмотрены в работе [10], которой мы воспользуемся.

(1) $N \cong A_p$. В этом случае $H \cong U \cong A_{p-1}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому

$$G = N_G(H)N_G(U).$$

Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(2) $N \cong PSL_r(q)$. В этом случае $H \in \{P_1, P_{r-1}\}$ $U \in \{P_1, P_{r-1}\}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому $G = N_G(H)N_G(U)$. Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(3) $N \cong M_{23}$. В этом случае $H \cong U \cong M_{22}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому

$$G = N_G(H)N_G(U).$$

Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(4) $N \cong M_{11}$. В этом случае $H \cong U \cong M_{10}$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому

$$G = N_G(H)N_G(U).$$

Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

(5) $N \cong PSL_2(11)$. В этом случае $H \cong$ $\cong U \cong A_5$ и $A \subseteq N_G(H)$, $B \subseteq N_G(U)$. Поэтому $G = N_G(H)N_G(U)$. Из [10] следует, что G не имеет такой факторизации.

Следовательно, $k \geq 2$. По лемме 1.2 подгруппа N имеет A-инвариантную подгруппу H простого индекса p в N. По лемме 1.3 будем считать, что $H = N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \times \widetilde{N_k}$, где $\left|N_k : \widetilde{N_k}\right| = p$. Покажем, что группа $N_1 \times \ldots \times N_{k-1}$ является A-инвариантной. Так как для всякого $a \in A$ имеем $(N_1 \times \ldots N_{k-1})^a \subseteq H^a = H$, то, если $N_i^a = N_k$ для некоторого $1 \leq i \leq k-1$, получим, что $N \subseteq H$. Последнее невозможно. Поэтому $N_1 \times \ldots \times N_{k-1}$ – A-инвариантна.

Подгруппа N имеет B-инвариантную подгруппу U простого индекса p в N. Если $U = N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \times N_k^*$, где $\left|N_k : N_k^*\right| = p$, то $N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \lhd AB = G$, что невозможно, поскольку N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Без ограничения общности можно считать, что $U = N_2 \times \ldots \times N_k \times \widetilde{N_1}$, где $\left|N_1 : \widetilde{N_1}\right| = p$. Так как G действует транзитивно на $\{N_1, \ldots, N_k\}$, то найдется элемент $g \in G$ такой, что $N_1^g = N_k$. Тогда

$$U^g = N_2^g \times \ldots \times N_k^g \times \widetilde{N_1}^g =$$
$$= N_2^g \times \ldots \times N_k^g \times \widehat{N_k} = N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \times \widehat{N_k},$$

где $\left|N_k : \widehat{N_k}\right| = p$ и $N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \lhd B^g$. Так как $G = AB^g$, то $N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \lhd G$. Последнее невозможно, так как N – минимальная нормальная подгруппа в G. □

***Следствие* 2.2** [5, теорема 4.2]. *Пусть группа $G = AB$ – произведение разрешимых подгрупп A и B. Если A и B – $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, то G разрешима.*

***Теорема* 2.3.** *Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A $\mathbb{P}$-субнормальная в G подгруппа нечетного порядка, B – разрешимая подгруппа. Тогда G является разрешимой группой.*

Доказательство. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Предположим, что G – простая неабелева группа. По теореме Томпсона – Фейта A – разрешимая группа. Так как A – $\mathbb{P}$-субнормальная в G подгруппа, то 1 $\mathbb{P}$-*sn* G и по лемме 1.6 $G \in \mathfrak{D}$. Рассмотрим все случаи.

(1) $G \cong SL_3(3)$. Группа $SL_3(3)$ допускает только следующие факторизации:

$$SL_3(3) = 13\left(3^2 : 2S_4\right) = 13\left(3^2 : 2S_4\right)^* =$$
$$= (13:3)\left(3^2 : 2S_4\right) = (13:3)\left(3^2 : 2S_4\right)^*,$$

где $3^2 : 2S_4$ и $\left(3^2 : 2S_4\right)^*$ – несопряженные в $SL_3(3)$ подгруппы. Поскольку подгруппы 13 и 13:3 не $\mathbb{P}$-субнормальны в $SL_3(3)$, то группа $SL_3(3)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(2) $G \cong SL_3(5)$. Группа $SL_3(5)$ допускает только следующие факторизации:

$$SL_3(5) = 31\left(5^2 : GL_2(5)\right) = 31\left(5^2 : GL_2(5)\right)^* =$$
$$= (31:3)\left(5^2 : GL_2(5)\right) = (31:3)\left(5^2 : GL_2(5)\right)^*,$$

где $5^2 : GL_2(5)$ и $\left(5^2 : GL_2(5)\right)^*$ – несопряженные в $SL_3(5)$ подгруппы. Поскольку подгруппы 31 и 31:3 не $\mathbb{P}$-субнормальны в $SL_3(5)$, то группа $SL_3(5)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(3) $G \cong PSL_2(7)$. Группа $PSL_2(7)$ допускает только следующие факторизации:

$$PSL_2(7) = NG_2 = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

где

$$N \cong 7:3,\ G_2 \in Syl_2(PSL_2(7)),$$
$$G_7 \in Syl_7(PSL_2(7)),$$

S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL_2(7)$ подгруппы.

Поскольку подгруппы 7 и 7:3 не $\mathbb{P}$-субнормальны в $PSL_2(7)$, то группа $SL_2(7)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(4) $G \cong PSL_2(11)$. Группа $PSL_2(11)$ допускает только следующие факторизации:

$$PSL_2(11) = (11:5)D_{12} = (11:5)A_4 =$$
$$= (11:5)A_5 = (11:5)A_5^* = 11A_5 = 11A_5^*,$$

где D_{12} – диэдр порядка 12, A_4 – знакопеременная группа степени 4, A_5 и A_5^* – несопряженные в $PSL_2(11)$ знакопеременные группы степени 5. Так как подгруппы 11 и 11:5 не $\mathbb{P}$-субнормальны в $PSL_2(11)$, то группа $PSL_2(11)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

(5) $G \cong SL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ – простое число Ферма и $n = 2^k$. Группа $SL_2(2^n)$ допускает только следующие факторизации: $SL_2(2^n) = ND = NZ$, где N – нормализатор силовской 2-подгруппы, D – диэдр порядка $2p$, Z – циклическая группа порядка p. Так как подгруппа p не является $\mathbb{P}$-субнормальной в $SL_2(2^n)$, то группа $SL_2(2^n)$ не удовлетворяет условиям теоремы.

Таким образом, группа G не является простой неабелевой группой. Так как условия теоремы наследуются на фактор-группы, то минимальная нормальная подгруппа в G имеет вид $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы и $k \ge 1$.

Пусть $k \ge 2$. Если $A \subset N$, то A $\mathbb{P}$-*sn* N и $N = A(N \cap B)$ удовлетворяет условию теоремы, а поэтому разрешима. Последнее невозможно. Следовательно, $A \subsetneq N$. По условию теоремы существует цепь

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$

где $|A_i : A_{i-1}|$ – простое число для всех $i = 1,\ldots,n$. Из тождества Дедекинда следует, что $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$. Так как A $\mathbb{P}$-*sn* A_{n-1}, то в силу минимальности контрпримера A_{n-1} является разрешимой группой и $|G : A_{n-1}| = p$ – простое число. Ясно, что $G = A_{n-1}N$. Отсюда следует, что $|N| = p|A_{n-1} \cap B|$. Поэтому N содержит разрешимую подгруппу индекса p в N. Это невозможно по лемме 1.3.

Таким образом, $k = 1$ и N – простая неабелева группа. По лемме 1.2 N имеет A-инвариантную цепь: $A \cap N = R_0 \subset \ldots \subset R_n = N$. Поскольку $A \cap N$ – разрешимая группа, то 1 $\mathbb{P}$-*sn* N и $N \in \mathfrak{D}$. Так как $Out(N)/N$ имеет порядок 2^k, то $A \subset N$. Выше было показано, что это невозможно. □

Замечание. *Условие нечетности порядка подгруппы A в теореме отбросить нельзя. Симметрическая подгруппа S_4 $\mathbb{P}$-субнормальна в $PSL_2(7)$ и $PSL_2(7) = S_4Z_7$. Однако $PSL_2(7)$ является простой неабелевой группой.*

Лемма 2.4. *Пусть $G = AB$, где A и B – простые неабелевы группы, $\mathbb{P}$-субнормальные в G. Если $G = N \rtimes A$, где N – простая неабелева группа и $A, B \in \mathfrak{D}$, то $G = N \times C$ и $N \cong B$, $C \cong A$, N $\mathbb{P}$-sn G, C $\mathbb{P}$-sn G, N, $C \in \mathfrak{D}$.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что $N \cong B$. Следовательно, $|G| = |A||B|$. Поэтому $A \cap B = 1$ и по лемме 1.8 получим, что $A, B \in \mathfrak{D}$. Если $[N, A] = 1$, то лемма верна. Следовательно, найдется $a_0 \in A$, для которого $[N, a_0] \ne 1$. Так как $Out(N)$ является разрешимой группой, то существует $n_0 \in N$ такой, что $n^{a_0} = n^{n_0}$ для всех $n \in N$. Отсюда следует, что $a_0 n_0^{-1} \in C_G(N)$. Обозначим $C = C_G(N) \lhd G$. Имеем, что $N \times C = N((NC) \cap A))$. Поскольку $1 \ne (NC) \cap A \trianglelefteq A$ и A – простая неабелева группа, то $(NC) \cap A = A$ и $A \subseteq NC$. Следовательно, $NC = N \times C = G$, где $C \cong A$ и лемма верна. □

Теорема 2.5. *Пусть $G = AB$, где A и B – простые неабелевы группы, $\mathbb{P}$-субнормальные в G. Тогда $G = P \times Q \cong A \times B$, где $P \cong A$, $Q \cong B$, P $\mathbb{P}$-sn G, Q $\mathbb{P}$-sn G, $A, B \in \mathfrak{D}$.*

Доказательство. Будем считать, что G – минимальный контрпример к теореме. По лемме 1.1 G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Предположим, что $A \cap N \ne 1$. Так как $A \cap N \trianglelefteq A$, то, поскольку A – простая неабелева группа, имеем $A \subseteq N$ и $G = NB$. Если $B \cap N \ne 1$, то $B \subseteq N$, а значит $G \subseteq N$, что невозможно. Следовательно, $B \cap N = 1$ и $G = N \rtimes B$. Так как $|G| = |N||B|$ и $A \subseteq N$, то $N = A$ и $G = A \rtimes B$. По лемме 1.8 $A, B \in \mathfrak{D}$. Таким образом, по лемме 2.4 теорема верна. Следовательно, $A \cap N = B \cap N = 1$.

Пусть сначала $N \cong \mathbb{Z}_p^k$. Предположим, что $G = N \rtimes A$. Так как A $\mathbb{P}$-*sn* G, то по лемме 1.2 в N существует A-инвариантная цепь

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{n-1} \subset N_n = N,$$

где $|N_i : N_{i-1}|$ *– простое число для всех* $i = 1,\ldots,n$. Отсюда следует, что имеется подгруппа $T = N_1 \rtimes A$, где $N_1 \cong \mathbb{Z}_p$. Если $C_{N_1 A}(N_1) = N_1$, то по теореме Бернсайда $N_1 \leftthreetimes A = N_1 \times A$. Если $C_{N_1 A}(N_1) \supset N_1$, то так как A – простая неабелева группа и $C_{N_1 A}(N_1) \trianglelefteq N_1 A$ получим, что $N_1 A = N_1 \times A$. Поскольку $G = NA$ и N – абелева группа, то $N_1 \triangleleft G$. Так как N – минимальная нормальная подгруппа в G, то $N_1 = N$ и $G = N \times A$. Таким образом, $A \triangleleft G$. Поскольку $G = AB$, то $A \bigcap B \trianglelefteq B$. Если $A \bigcap B = 1$, то $G = A \leftthreetimes B$. Данный случай был рассмотрен выше. Значит $A \bigcap B \neq 1$. Тогда $A \bigcap B = B$ и $B \subseteq A$, что невозможно.

Поэтому $AN \neq G \neq BN$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G / N = (AN / N)(BN / N) = \overline{A}\overline{B}$. Поскольку $AN / N \cong A / A \bigcap N = A$ и $BN / N \cong$ $\cong B / B \bigcap N$, то $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – простые неабелевы группы, изоморфные A и B соответственно. По лемме 1.4 $\overline{A}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$ и $\overline{B}$ $\mathbb{P}$-sn $\overline{G}$. Так как G – минимальный контрпример к теореме, то $\overline{G} \cong A \times B$. Тогда $|\overline{G}| \geq |G|$. Следовательно, $N = 1$. Последнее невозможно.

Таким образом, N является неразрешимой группой. Ситуация $AN \neq G \neq BN$ рассматривается точно также как в случае, когда N – разрешимая группа. Поэтому будем считать, что $G = N \leftthreetimes A$.

Пусть сначала N является простой неабелевой группой. Из теоремы 2.1 следует, что $N \cong B$. Следовательно, $|G| = |A||B|$. Значит $A \bigcap B = 1$ и по лемме 1.8 $A, B \in \mathfrak{D}$. Таким образом, по лемме 2.4 теорема верна.

Поэтому будем считать, что $N = N_1 \times \ldots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы и $k \geq 2$. По лемме 1.2 N имеет A-инвариантную подгруппу H простого индекса p в N. По лемме 1.3 можно считать, что

$$H = N_1 \times \ldots \times N_{k-1} \times \widetilde{N_k},$$

где $\left|N_k : \widetilde{N_k}\right| = p$. Покажем, что группа $N_1 \times \ldots \times N_{k-1}$ является A-инвариантной. Так как для всякого $a \in A$ имеем $(N_1 \times \ldots \times N_{k-1})^a \subseteq H^a = H$, то если $N_i^a = N_k$ для некоторого $1 \leq i \leq k-1$, то $N \subseteq H$, что невозможно. Поэтому $N_1 \times \ldots \times N_{k-1}$ – A-инвариантна, а, следовательно, нормальна в G. Это противоречит минимальности подгруппы N. □

Замечание. *Отметим, что подгруппы A и B в формулировке теоремы* 2.5 *могут быть не нормальными в группе G. Пусть* $G = T \times T^{t_0}$, *где* $T \in \mathfrak{D}$ *и* $1 \neq t_0 \in T$. *Тогда t индуцирует нетривиальный внутренний автоморфзм на группе T. По-ложив* $A = T$ *и* $B = \{tt^{t_0} \mid t \in T\}$, *получим* $G = A \leftthreetimes B$, *где B не является нормальной подгруппой в группе G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казарин*, *Л.С.* О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 256, № 1. – С. 26–29.

2. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

3. *Васильев*, *А.Ф.* О K – $\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

4. *Тютянов*, *В.Н.* Факторизации конечных групп *r*-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Княгина // Укр. матем. журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1431–1435.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

6. *Monakhov*, *V.S.* Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Lobachevsii Jornal math. – 2015. – Vol. 36, № 4. – P. 441–445.

7. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.], – Oxford, 1985. – 252 p.

8. *Guralnick*, *R.M.* Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81. – P. 304–311.

9. *Тютянов*, *В.Н.* Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 88–91.

10. *Liebeck*, *M.W.* The factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Prager, J. Saxl // Mem. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1–151.

Поступила в редакцию 14.03.18.