

РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ ГЕНЕРАЦИИ В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДИАФРАГМОЙ. IV

Ю. В. Глушченко, Т. В. Радина и Э. Е. Фрадкин

Рассчитано дифракционное расщепление частот генерации встречных волн кольцевого лазера с диафрагмой с острым краем. Расчет проводился по методу Слэтера в первом порядке теории возмущений. Получено удовлетворительное согласие результатов расчета с данными, найденными путем численного интегрирования уравнений Фокса и Ли с последующим восстановлением поля в объеме резонатора с помощью интеграла Кирхгофа. С ослаблением дифракции ($N=1.5 \div 2$) возрастает степень совпадения результатов. Это подтверждает корректность расчета дифракционного расщепления частот по методу Слэтера в практически важной области слабой дифракции ($N > 2$), где расчеты численными методами затруднены. Найдено, что резонаторы с вырожденным спектром частот и минимальными дифракционными потерями основной моды характеризуются минимальным дифракционным расщеплением частот.

В работах [1-4] развита методика расчета дифракционной разности частот генерации встречных волн одномодового кольцевого лазера. Метод основан на перенесении идей приближенного подхода Слэтера, использованного им в СВЧ резонаторах, в оптическую область. В обычных приближениях квазиоптики выведена и решена система связанных уравнений, описывающих генерацию встречных волн в кольцевом лазере с диафрагмой. Центр диафрагмы может как совпадать с оптической осью (сьюсти-рованный резонатор), так и находиться вне оси (разъюстированный резонатор). Решение получено методом теории возмущений путем разложения полей волн по собственным функциям идеального резонатора.

В настоящей работе выражение для дифракционной невязки частот [1-4] приведены в удобной для расчетов форме. Показано существенное различие между полученным выражением и формулой для разности частот, выведенной методом теории возмущений в работе [7]. Проанализированы результаты численных расчетов и проведено их сравнение с результатами работ [5-7, 10, 14].

Т е о р и я

В модели тонкой среды при генерации наиболее добротной моды $N(q_x, 0, 0)$ вблизи центра линии генерации получено следующее значение разностной частоты [1-4, 8]

$$\omega_r - \omega_l = \frac{|W - H|^2}{(\text{Im } W)^2 - (\text{Im } H)^2} G \eta F, \quad (1)$$

где r, l — индексы встречных волн (направление волны r совпадает с положительным направлением оси z), $G = \Delta \omega_p / 2 N_0 / N_{\text{пор}}$ — линейный коэффициент усиления в единицу времени на центре линии усиления, $\Delta \omega_p / 2$ — полуширина линии резонатора, $N_{\text{пор}}$ — пороговое значение инверсной заселенности, η — превышение усиления на частоте генерации над порогом, W и H — комплексные коэффициенты самонасыщения и кросснасыщения встречных волн [4].

Сомножитель выражения (1) F определяется билинейной комбинацией коэффициентов разложения, найденных в первом порядке теории возмущений. Величина F зависит от геометрии резонатора, апертуры и положения диафрагмы.

$$F = 2 \sum_{b, c} \frac{\Omega_{bN} \Omega_{cN} \nu_0^2}{\left[\Omega_{bN}^2 + \left(\frac{\Delta \omega_{bN}}{2} \right)^2 \right] \left[\Omega_{cN}^2 + \left(\frac{\Delta \omega_{cN}}{2} \right)^2 \right]} \mathcal{F}_{bc}. \quad (2)$$

Суммирование проводится по модам $b(q_b, m_b, n_b)$ и $c(q_c, m_c, n_c)$, у которых по крайней мере один поперечный индекс отличен от нуля. В формуле (2) $\nu_0 = c/L$, L — периметр резонатора, $\Omega_{iN} = \Omega_i - \Omega_N$ и $\Delta \omega_{iN} = \Delta \omega_i - \Delta \omega_N$ ($i = b, c$) — разности собственных резонаторных частот соответствующих мод и их ширин,

$$\Omega_{iN} = 2\pi\nu_0 \left(q_{iN} + \frac{\psi_i}{\pi} \right), \quad (3)$$

$q_{iN} = q_i - q_N$ — разность продольных индексов мод,

$$\psi_i = m_i \arctg \frac{1}{2\omega_x} + n_i \arctg \frac{1}{2\omega_y}, \quad (4)$$

$\omega_j = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+g_j}{1-g_j}}$, $g_j = 1 - L/R_j$, R_j ($j = x, y$) — эквивалентный радиус кривизны

$$\Delta \omega_{iN} = 2\nu_0 (S_{00} - S_{ii}) \quad (i = b, c). \quad (5)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} S_{kl} &= S_{m_k m_l} S_{n_k n_l}, \\ S_{m_k m_l} &= \int_{c_{x_1}}^{c_{x_2}} e^{-\xi^2} H_{m_k}(\xi) H_{m_l}(\xi) d\xi', \quad S_{n_k n_l} = \int_{c_{y_1}}^{c_{y_2}} e^{-\xi^2} H_{n_k}(\xi) H_{n_l}(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $H_k(\xi) = \frac{(-1)^k e^{-\xi^2}}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{\xi^2}$ — нормированный полином Эрмита, $c_{j1,2} = \frac{a_{j1,2}}{p_j}$,

$p_j = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}} \sqrt{\omega_j + \frac{z_j^2}{\omega_j}}$ ($j = x, y$), $a_{x1,2}$, $a_{y1,2}$ — размеры диафрагмы в направлениях соответствующих осей (рис. 1), $z_i = Z_i/L$ — безразмерная координата по оси резонатора,

$$\mathcal{F}_{bc} = -8S_{b0}S_{c0}(a_{bc} - a_{b0}a_{c0}) \sin(2\pi z q_{bN} + \chi_b) \cos(2\pi z q_{cN} + \chi_c), \quad (7)$$

где $z = z_0 - z_t$, z_0 и z_t — безразмерные координаты центра трубки с активной средой и диафрагмы.

$$\chi_i = \varphi_i(z_t) - \varphi_i(z_0),$$

$$\varphi_i(z) = m_i \arctg \frac{z}{\omega_x} + n_i \arctg \frac{z}{\omega_y} \quad (i = b, c).$$

Величины S_{b0} , S_{c0} определяются из выражений (6)

$$S_{m_i 0} = -\frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{2m_i} \sqrt{\pi}} H_{m_i-1}(\xi) \Big|_{c_{x_1}}^{c_{x_2}}; \quad S_{n_i 0} = -\frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{2n_i} \sqrt{\pi}} H_{n_i-1}(\xi) \Big|_{c_{y_1}}^{c_{y_2}} \quad (i = b, c). \quad (8)$$

Значения коэффициентов S_{b0} , S_{c0} зависят от положения центра диафрагмы относительно оптической оси. В съюстированном резонаторе ($c_{x_2} = -c_{x_1}$, $c_{y_2} = -c_{y_1}$) вклад в расщепление частот дают моды с четными m и n (поскольку $H_{2k}(\xi)$ четная функция параметра ξ).

Кроме того, в выражение (7) входят параметры

$$\left. \begin{aligned} a_{bc} &= a_{m_b m_c} a_{n_b n_c}, \\ a_{m_b m_c} &= (-1)^{\frac{m_b - m_c}{2}} \frac{(m_b + m_c - 1)!!}{2^{\frac{m_b + m_c}{2}} \sqrt{m_b! m_c!}} \text{ при } m_b + m_c = 2k, \\ a_{m_b m_c} &= 0 \text{ при } m_b + m_c = 2k + 1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Значения $a_{n_b n_c}$ получаются заменой индексов $m_b \rightarrow n_b$, $m_c \rightarrow n_c$. Из выражений для коэффициентов a_{bc} следует, что вклад в сумму (2) дают лишь четно—четные и нечетно—нечетные моды.

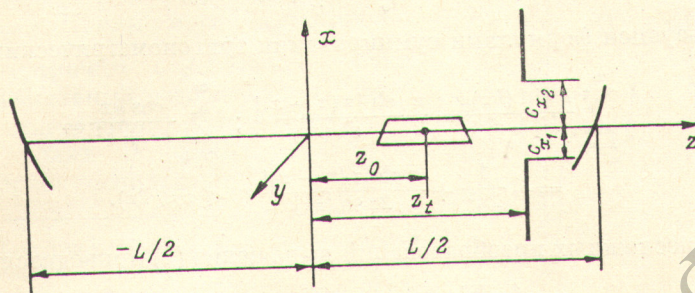


Рис. 1. Эквивалентная схема кольцевого резонатора.

Начало прямоугольной системы координат находится в геометрическом центре резонатора. Ось y направлена вверх перпендикулярно плоскости чертежа. z_0 — координата центра трубки с активной средой, z_t — координата диафрагмы.

Отметим, что в работах [1-4, 8] выражение для $\mathcal{F}_{bc}$ представлено в виде $\mathcal{F}_{bc} = \mathcal{P}_{bc} - 2c_{bN} D_{cN}$, причем в работах [3, 4] учет второго слагаемого, величина которого меньше первого, не проводился.

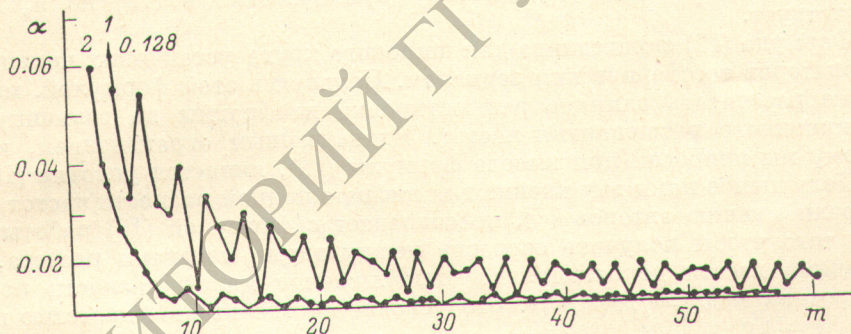


Рис. 2. Зависимость коэффициента α от целочисленного индекса моды m .
1 — $c=1.5$, 2 — $c=2.5$.

При выводе формулы (1) использовалось условие малой связанности волн [2, 4]. Выполнение этого условия обеспечивается справедливостью следующего неравенства:

$$a_b = \frac{1}{2} \left| \frac{S_{b0}}{S_{bb} - S_{00}} \right| \ll 1. \quad (10)$$

Значение S_{b0} определено формулами (8), а значение S_{bb} получается из выражений (6) путем интегрирования по частям с применением рекуррентных формул для полиномов Эрмита.

Нетрудно получить, что для первой моды ($m=1$) $\alpha_1 \ll 1$ при $c \gg 0.7$, для второй моды ($m=2$) $\alpha_2 \ll 1$ при $c \gg 0.4$. С увеличением номера моды значение c , при котором выполняется неравенство (10), быстро уменьшается. Рис. 2 иллюстрирует выполнение условия (10) при $c=1.5$ (кри-

вая 1) и $c=2.5$ (кривая 2) для первых шестидесяти мод в случае одномерной диафрагмы. Функция α_b имеет смысл только для целочисленных значений m . Такие значения отмечены на графиках точками.

Проведем в выражении (2) суммирование по продольным индексам q_b, q_c . Для этого представим сомножитель дроби (2) в виде

$$\frac{\Omega_{bN} \gamma_0}{\Omega_{bN}^2 + \left(\frac{\Delta\omega_{bN}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{q_{bN} + i \frac{\delta\omega_b - i\psi_b}{\pi}} \right\},$$

$$\delta\omega_b = \frac{\Delta\omega_{bN}}{4\gamma_0} = \frac{1}{2} (S_{00} - S_{bb}) \quad (11)$$

и воспользуемся формулами суммирования тригонометрических рядов [9]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(kx)}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh}[\alpha(\pi - x)]}{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + a^2} =$$

$$= -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \operatorname{ch}[\alpha(\pi - x)]}{2a \operatorname{sh}(\alpha\pi)} \quad (0 < x < 2\pi).$$

После несложных преобразований выражение (2) приводится к виду [8]

$$F = \frac{1}{2} \sum_{m_b n_b} \sum_{m_c n_c} S_{b0} S_{c0} (a_{bc} - a_{b0} a_{c0}) A_b A_c, \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_b &= \frac{\operatorname{ch}[2\delta\omega_b(1-z)] \cos \chi_b - \operatorname{ch}(2z\delta\omega_b) \cos[\chi_b + 2\psi_b]}{\operatorname{sh}^2 \delta\omega_b + \sin^2 \psi_b}, \\ A_c &= \frac{\operatorname{ch}[2\delta\omega_c(1-z)] \sin \chi_c - \operatorname{ch}(2z\delta\omega_c) \sin[\chi_c + 2\psi_c]}{\operatorname{sh}^2 \delta\omega_c + \sin^2 \psi_c}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для одномерной диафрагмы ($c_{y_2} \rightarrow -\infty, c_{y_2} \rightarrow \infty$) в силу выражения (6) $S_{nb0} = \delta_{nb0}$ и $S_{nc0} = \delta_{nc0}$, поэтому суммирование в (12) по n_b и n_c отсутствует.

Формула (12) справедлива для широкого круга устойчивых кольцевых резонаторов со сферическим зеркалом. Пользуясь этой формулой, можно также рассчитать влияние разбюстировки диафрагмы на величину дифракционного расщепления частот. Единственным ограничением, к которому мы прибегли при выводе формулы (12), является условие (10).

Полученное нами выражение для дифракционной разности частот (12), вопреки мнению авторов [7], не совпадает с формулой (13) работы [7]. Для того чтобы получить согласие между двумя методами расчета, необходимо ввести дополнительное приближение малой разности потерь поперечных мод $(\Delta\omega_{bN})^2 \ll \Omega_{bN}^2$. Это условие обеспечивается малостью параметра $\beta = |S_{m_b m_b} - 1|$. В нулевом порядке по β

$$A_b A_c = - \frac{2 \sin \left\{ (m_b + m_c) \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z_t}{\omega_x} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z_0}{\omega_x} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\omega_x} \right] \right\}}{\sin \left(m_b \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2\omega_x} \right) \sin \left(m_c \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2\omega_x} \right)} \quad (14)$$

и выражения для разности частот (12), (14) совпадают с формулой (16) работы [7]. Уже в первом порядке по β результаты расходятся.

Мы провели расчет величины максимального по модулю значения $\max |F|$ ($z \in (-0.5, +0.5)$) от геометрического параметра резонатора g для случая одномерной симметричной диафрагмы при $c_x = 2$ ($c_y = \infty$), $z_t = -0.5$ по формулам (12), (13) и сравнили его с результатами, приведенными на рис. 3 работы [7]. Обе кривые представлены на рис. 3. Нетрудно убедиться в существенном различии кривых. Отметим, что в силу зависимости величины s от параметра g в дальнейшем мы перейдем к более информативному параметру — числу зон Френеля $N = a^2/\lambda L$.

Все приводимые расчеты проводились по формулам (12), (13) для случая одномерной диафрагмы, которая помещалась на сферическое зеркало ($z_t = -0.5$).

На рис. 4, а сплошными линиями представлено максимальное по модулю значение $\max |F|$ ($z_0 \in (-0.5, +0.5)$) в зависимости от параметра g при различных значениях числа Френеля $N = \frac{a^2}{\lambda L}$ ($N = \frac{c^2}{2\pi\sqrt{1-g}}$). Кривые $\max |F(g)|$ приближенно симметричны относительно точки $g=0$ (конфокальный резонатор). На фоне общего симметричного спада кривых к значению $\max |F(g=0)|$ наблюдаются резкие осцилляции в области

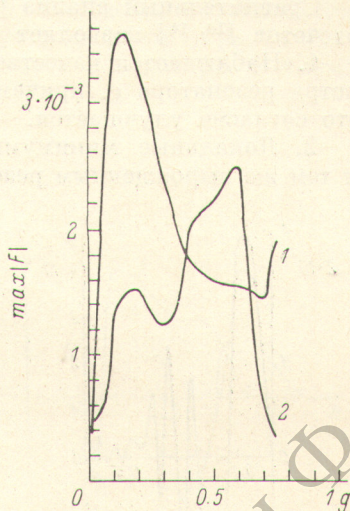


Рис. 3. Максимальное по модулю значение $\max |F|$ ($z_0 \in (-0.5, 0.5)$, $z_t = -0.5$) для щелевой диафрагмы в зависимости от геометрического параметра резонатора g ($c=2$).

1 — наши результаты, 2 — из работы [7].

$-0.5 \leq g \leq 0.5$. Глубина и частота осцилляций зависят от величины N . Наиболее ярко немонотонность кривых выражена в области $1.5 \leq N \leq 2.5$. Точки локальных минимумов величины $\max |F|$ соответствуют вырожден-

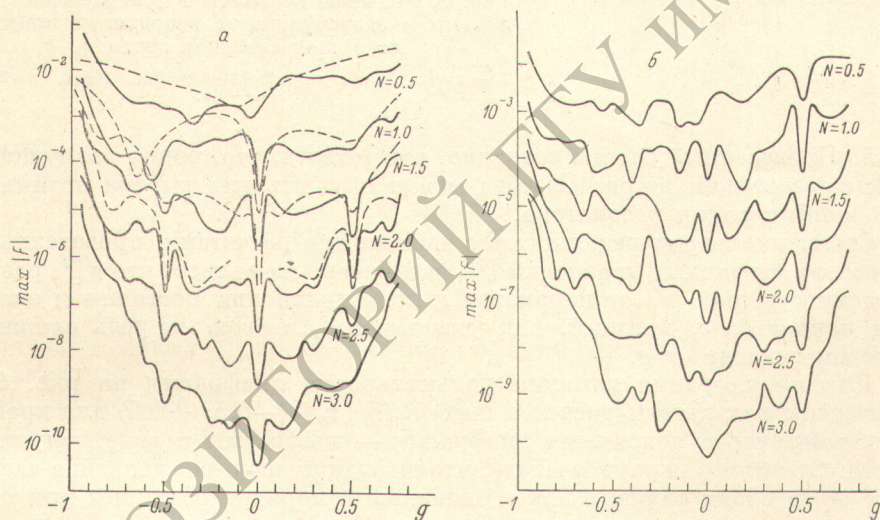


Рис. 4. Зависимость максимального по модулю значения $\max |F|$ ($z_0 \in (-0.5, 0.5)$, $z_t = -0.5$) от геометрического параметра резонатора g при различных N в случае щелевой диафрагмы (а) и диафрагмы в виде полуплоскости (б).

Штриховые линии соответствуют численному решению [10, 14].

ными резонаторам $g = \cos \alpha$, $\alpha = k\pi/l$ (k, l — целые числа). Наиболее резко выражены минимумы в точках $g = -0.5$ ($\alpha = 2\pi/3$), $g = 0$ ($\alpha = \pi/2$), $g = 0.3$ ($\alpha = 2\pi/5$), $g = 0.5$ ($\alpha = \pi/3$), $g = 0.7$ ($\alpha = \pi/4$). Эти точки соответствуют резонаторам, обладающим минимальными дифракционными потерями основной моды [10, 11]. Интересно отметить, что в этих резонаторах существуют замкнутые конфигурации внеосевых лучей [12, 13]. Штриховыми линиями на рис. 4, а представлены графики аналогичных зависимостей

работ [10, 14]. В этих работах при вычислении функционалов, определяющих разность частот встречных волн, распределения полей волн находились путем численного интегрирования интегральных уравнений Фокса и Ли с последующим восстановлением поля в объеме резонатора с помощью интеграла Кирхгофа.

Сравнительный анализ результатов теории возмущений и численных расчетов [10, 14] позволяет сделать следующие выводы.

1. Наблюдается качественное согласие зависимости $\max |F|$ от параметра резонатора g , причем при ослаблении дифракции (увеличении N) это согласие улучшается.

2. Локальные минимумы кривых $\max |F(g)|$ соответствуют одним и тем же вырожденным резонаторам. Даже направление сдвигов локальных минимумов (влево от точки $g=0$ на кривой $N=0.5$ и от точки $g=-0.5$ на кривой $N=1$) одинаково.

3. Характерной особенностью обоих семейств кривых является увеличение с ростом N крутизны симметричного спада кривых $\max |F(g)|$ к значению $\max |F(g=0)|$.

4. Имеется удовлетворительное количественное согласие в среднем, хотя для отдельных резонаторов расхождение в величине $\max |F(g)|$ может достигать 3—5 раз.

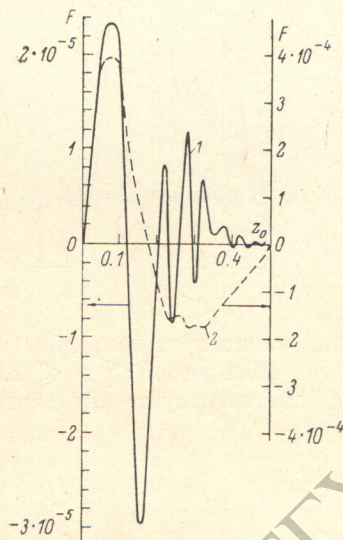


Рис. 5. Значение величины F для щелевой диафрагмы в зависимости от координаты продольного слоя активной среды z_0 .

1 — $g=0$, $N=1$, $c=2.5$; 2 — $g=0.2$, $N=1$, $c=2.48$, $z_0=-0.5$.

5. Проведенный анализ позволяет утверждать, что теория возмущений с использованием метода Слэтера может служить для выбора оптимальной конфигурации резонатора.

Сравнение наших результатов с численными расчетами, проведенными на основе матричных уравнений [6], затруднено из-за того, что в [6] расчет зависимости $\max |F|$ от параметра g проводился при постоянном значении параметра c , который, как указывалось, в свою очередь сложным образом зависит от g .

Для иллюстрации влияния разъюстировки диафрагмы на рис. 4, 6 приведены результаты расчетов $\max |F(g)|$ $z_0 \in (-0.5, +0.5)$ для крайне несимметричного положения диафрагмы — диафрагмы в виде полуплоскости. Отметим в первую очередь, что дифракционное расщепление частот $\max |F|$ в обоих случаях имеет одинаковый порядок величины при одинаковых значениях параметра Френеля N . Качественный ход кривых $\max |F|$ от g также в целом весьма схож. Однако для полуплоскости характерна большая немонотонность зависимости $\max |F|$ от g и нарушение четного характера этой зависимости относительно знака параметра g . Так, минимум кривых на рис. 4, 6 при $g=0.5$ отчетливо проявляется для всех N , в то время как минимум при $g=-0.5$ отсутствует.

Интересно также исследовать поведение величины F от перемещения слоя активной среды вдоль оси резонатора. Расчеты показали, что характер изменения $F(z_0)$ существенно зависит от параметра g и величины N . Так, если зависимость $F(z_0)$ в конфокальном резонаторе (кривая 1 на рис. 5) носит сугубо осциллирующий характер, то в других резонаторах число осцилляций значительно меньше вплоть до единицы (кривая 2

на рис. 5). В конфокальном резонаторе число осцилляций зависит от N и имеет максимум при $N=1.5$ ($c=3.07$).

В экспериментальных работах [15, 16] по исследованию дифракционного расщепления частот отмечалось, что перемещение диафрагмы перпендикулярно лучу сопровождается осцилляциями разностной частоты. Мы провели расчеты зависимости величины F от параметра диафрагмы N . Расчеты показали, что вид зависимости $F(N)$ определяется типом диафрагмы (щелевая, полуплоскость), конфигурацией резонатора (величиной g), а также взаимным положением элементов резонатора. В случае

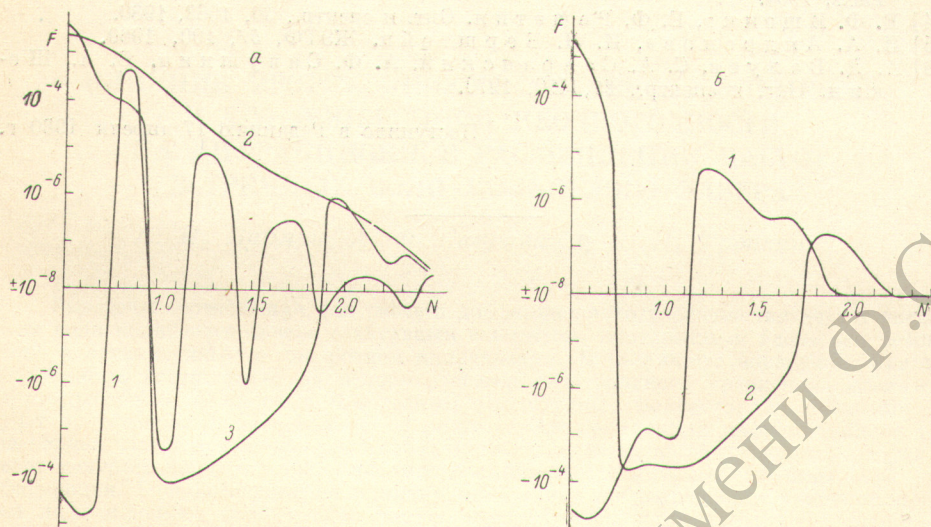


Рис. 6. Зависимость величины F от параметра N .

a — щелевая диафрагма: 1 — $g=0$, $z_0=-0.2$; 2 — $g=0.25$, $z_0=-0.4$; 3 — $g=0.25$, $z_0=-0.2$, b — диафрагма в виде полуплоскости: 1 — $g=0$, $z_0=-0.2$; 2 — $g=0.25$, $z_0=-0.2$.

симметричной щелевой диафрагмы (рис. 6, a) кривая $F(N)$ может носить как осциллирующий характер (кривая 1), так и быть относительно гладкой (кривая 2). Общим является быстрое убывание F с ростом N . Наибольшее число осцилляций кривая $F(N)$ имеет в случае вырожденных резонаторов ($g=0, \pm 0.5$), причем у этих резонаторов спад F с ростом N наиболее быстрый.

В случае несимметричной диафрагмы в виде полуплоскости (рис. 6, b) порядок величины $F(N)$ сохраняется прежним, однако число осцилляций уменьшается.

В заключение отметим, что применяемый нами слэтеровский вариант теории возмущений находится в хорошем согласии с численными расчетами [10, 14]. Это дает возможность оценить значения дифракционного расщепления частот в важной для практики области больших N (слабая дифракция).

Считаем своим приятным долгом поблагодарить Е. Ф. Ищенко и Е. Ф. Решетина за полезные обсуждения результатов данной работы.

Литература

- [1] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 31, 952, 1971.
- [2] Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 32, 132, 1972.
- [3] Т. В. Гусева, Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 36, 975, 1971.
- [4] С. Г. Зейгер, Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионов, Э. Е. Фрадкин. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах, гл. XI, XV. «Наука», М., 1974.
- [5] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро. Опт. и спектр., 47, 739, 1979.

- [6] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро. Опт. и спектр., 47, 948, 1979.
- [7] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро. Опт. и спектр., 47, 1166, 1979.
- [8] Т. В. Гусева. Автореф. канд. дисс., Л., 1975.
- [9] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
- [10] Е. Ф. Решетин. Тр. МЭИ. Прикладная физическая оптика, вып. 350, 41, 1978.
- [11] М. М. Попов, Т. М. Попова. Опт. и спектр., 39, 719, 1975; 39, 1157, 1975.
- [12] В. Н. Курятов, Э. Е. Фрадкин. Опт. и спектр., 20, 324, 1966.
- [13] M. Ranthier. Quantum electronics. Proc. 3^d internat. Congress, v. 2, p. 1253, Paris, 1964.
- [14] Е. Ф. Ищенко, Е. Ф. Решетин. Опт. и спектр., 50, 1062, 1980.
- [15] И. А. Андропова, И. Л. Берштейн. ЖЭТФ, 57, 100, 1969.
- [16] А. Д. Валуев, С. А. Савранский, А. Ф. Савушкин, В. А. Шоккин. Опт. и спектр., 29, 410, 1970.

Поступило в Редакцию 17 апреля 1980 г.
