Учреждение образования
"ТОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ"
Кафедра теоретической физики

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Лабораторный практикум

Специальность

1-31 04 01 Физика (по направлениям)

(1-31 04 01-02 производственная деятельность)

Материал подготовил

Андреев

Виктор Васильевич

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Гомель, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Лабораторная работа № 1

Изучение генераторов случайных чисел и их тестирование. Розыгрыш дискретной случайной величины.

Цель работы: Изучить встроенные генераторы псевдослучайных чисел и проверить правильность их работы их с помощью статистической обработки результатов генерации. Изучить метод розыгрыша дискретной случайной величины.

Краткая теория

Розыгрыш дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина χ, как правило, задается законом распределения в виде таблицы

$$\chi = \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{array} \right) \tag{1.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - значения случайной величины χ, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - вероятности появления этих значений. Другими словами $\text{Prob}\,(\chi = x_i) = p_i$.

Наша задача состоит в воспроизведении значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины χ, с вероятностями появления равными $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно.

Алгоритм розыгрыша дискретной случайной величины

1. Необходимо разбить интервал (0,1) на n - интервалов, длины которых равны $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно.

2. Разыгрываем значение стандартной случайной величины γ.

3. Проверяем условие попадания значения γ в i-тый интервал длинной p_i:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \ldots + p_i \ . \tag{1.2}$$

Если неравенство верно, то приписываем случайной величине χ значение, соответствующее данному интервалу т.е. x_i.

4. При необходимости повторяем шаги $1 - 3$ несколько раз с помощью новых значений стандартной величины γ для получения других значений дискретной случайной величины с законом распределения вероятностей (1.1).

Задание

1. С помощью встроенного генератора получить 300 значений псевдослучайной величины равномерно распределенной в интервале (0,1)

2. С помощью критериев согласия (например, хи-квадрат) убедиться в том, что полученные псевдослучайные числа соответствуют равномерному распределению в интервале (0,1).

   Свой вывод "подкрепите" построением гистограммы.

3. Проверить статистически метод середины квадрата (метод Неймана) для розыгрыша псевдослучайной величины равномерно распределенной в интервале (0,1) (аналогично предыдущему пункту)

4. С помощью "стандартного" генератора разыграть 100 событий бросания кубика с числами (1-6). По результатам розыгрыша найти частоту попадания чисел 3 и 6.

5. С помощью "стандартного" генератора разыграть 100 событий одновременного бросания двух кубиков с числами. По результатам розыгрыша В найти частоту одновременного попадания двух 6 и чисел 2 и 4.

   Примечание. Для быстрого выполнения работы необходимо вспомнить курс "Статистическая обработка физической информации".

   Желаем удачи в выполнении работы. **Успехов!**

   Любящие Вас преподаватели.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.

2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.

3. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.:Наука,1982. 296 с.

4. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. М.: Мир, 1990.-349 с.

5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. М.: Мир, 1990.-400 с.

2 Лабораторная работа №2

Розыгрыш непрерывных случайных величин

Цель работы: Изучить методы генерации непрерывных случайных случайных величин методом Неймана, методом обратной функции и методом суперпозициию

Краткая теория

Метод обратной функции

Метод обратной функции основан на теореме

Теорема. *Если случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятности $p(x) > 0$ на интервале (a, b) $(a < x < b)$, то случайная величина ξ удовлетворяющая уравнению*

$$F(\xi) = \gamma \tag{2.1}$$

где $F(x)$ функция распределения

$$F(x) = \int\limits_a^x p(x')\mathbf{d}x' \quad ,$$

а γ стандартная равномерно распределенная величина на интервале (0,1) *величина*
имеет плотность распределения $p(x)$.

Как следует из этой теоремы, с помощью генератора случайных чисел γ уравнение

$$\gamma = F(x) = \int\limits_a^x p(x')\mathbf{d}x' \tag{2.2}$$

позволяет воспроизвести значения случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x)$ на интервале (a, b) путем обращения (инверсии) уравнения (2.2):

$$x = F^{-1}(\gamma) \ . \tag{2.3}$$

Такой метод получения называют *методом обратной функции* (или методом инверсии).

Метод Неймана

Метод Неймана (метод отбраковки) основан на следующей теореме из математической статистики и теории вероятностей.

Пусть ξ-случайная величина, с плотностью распределения $p(x) \le c$ (-некоторое положительное число) на интервале $a < x < b$.

Теорема. Если γ_1 и γ_2 - независимые случайные величины и

$$\xi^{'} = a + \gamma_1(b - a) \qquad , \qquad \nu' = c\,\gamma_2 \tag{2.4}$$

то случайная величина ξ, определяемая условием:

$$\xi = \xi' \qquad , \qquad \textbf{если} \qquad \nu' < p(\xi') \tag{2.5}$$

имеет плотность вероятности равную $p(x)$.

Исходя из этой теоремы метод получения значений случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x) \le c$ на интервале (a, b) состоит в следующем:

1. Получаем пару значений γ_1, γ_2 с помощью стандартного генератора.

2. С их помощью строим два случайных числа

$$\xi' = a + \gamma_1(b - a) \tag{2.6}$$

равномерно распределенное на интервале (a, b) и

$$\nu' = c\,\gamma_2 \tag{2.7}$$

равномерно распределенное на интервале $(0, c)$

3. С помощью чисел ξ' и ν' проверяем выполнение условия

$$\nu' < p\,(\xi') \tag{2.8}$$

4. Если условие (2.7) выполняется, то считаем, что значение случайной величины ξ равно ξ', если условие не выполняется, то повторяем процедуру начиная с шага 1.

Метод суперпозиции

Первая версия этого метода получения случайных чисел с заданным законом распределения вероятностей была предложен *Дж.Батлером*.

Предположим, что функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(x) \ , \tag{2.9}$$

так, что все значения $C_k > 0$ и $C_1 + \ldots + C_n = 1$, причем $F_k(x)$ достаточно "простые" функции (например, могут быть разыграны методом обратной функции).

Введем дискретную величину ν с помощью числа слагаемых в (2.9) и коэффициентов C_k

$$\nu = \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots, n \\ C_1, & C_2, \ldots, C_n \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

т.е. значения случайной величины ν представляют собой номер слагаемого в ряде (2.9), а значения коэффициентов этого разложения представляют собой вероятности появления соответствующих номеров слагаемых.

Тогда алгоритм розыгрыша случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ (2.9) методом суперпозиции состоит в следующем:

1. Получаем пару значений γ_1, γ_2 с помощью стандартного генератора.
2. С помощью γ_1 проведем розыгрыш дискретной величины ν (2.10) посредством алгоритма, изложенного в (**??**). Результатом розыгрыша будет **число** k, нумерующее соответствующее слагаемое в разложении функции распределения (2.9).
3. С помощью полученного числа k выбираем соответствующую функцию $F_k(x)$ и проводим розыгрыш значения ξ методом обратной функции, используя число γ_2:
$$x = F_k^{-1}(\gamma_2) \ . \tag{2.11}$$
4. При необходимости повторяем шаги $1-3$ несколько раз с помощью значений стандартной величины γ для получения новых значений случайной величины с законом распределения вероятностей $F(x)$ (2.9).

Задание

1. Методом обратной функции разыграть случайную величину имеющей плотность распределения:

   А. $p(x) = C \exp(-\alpha\, x)$ на интервале $x \in (0{,}1)$ с $\alpha = 1/2$.

   Б. $p(x) = C(1-x)$ на интервале $x \in (0{,}1/2)$.

   Примечание. Константу нормировки C определить самостоятельно, используя условие нормировки

$$\int\limits_a^b p\,(x)\,\mathrm{d}x = 1\ . \tag{2.12}$$

2. Методом Неймана разыграть случайную величину с плотностью распределения:

   А. $p(x) = C(1 + 3x + x^2 - 5x^3)$ на интервале $x \in (0{,}1)$.

   Б. $p(x) = C \exp(-x^3)/\left(2x^2+1\right)$ на интервале $x \in (-1{,}1)$.

3. С помощью метода суперпозиции разыграть случайную величину с плотностью распределения:

$$p(x) = \frac{3}{8}(1 + x^2)$$

   для $-1 < x < 1$

Проверить правильность полученных значений случайных величин с заданными плотностями распределений с помощью построения гистограмм для разыгранных значений случайных величин.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.

2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.

3. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество М.: Энергоиздат 1985. 248с.

4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.:Наука,1982. 296 с.

5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. М.: Мир, 1990.-349 с.
6. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. М.: Мир, 1990.-400 с.

3 Лабораторная работа № 3

Комптоновское рассеяние фотона

Цель работы: С помощью метода Монте-Карло смоделировать процесс рассеяния гамма кванта на электроне.

Краткая теория

Дифференциальное сечение комптоновского рассеянного фотона с энергией E_0 на свободном электроне с излучением вторичного фотона с энергией $E_\gamma = \epsilon E_0$ в лабораторной системе отсчета определяется формулой *Клейна-Нишины-Тамма*:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\epsilon,E_0)}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\pi\ r_0^2}{b_0^3\ \epsilon^2}\Bigg[1 + \big(b_0^2 - 2\ b_0 - 2\big)\epsilon + $$

$$+\big(1 + 2\ b_0\big)\epsilon^2 + b_0^2\epsilon^3\Bigg], \qquad (3.1)$$

где $b_0 = E_0/m_e$, r_0 - классический радиус электрона, m_e - масса электрона.

Кинематическая область ϵ находится в пределах:

$$\frac{1}{1 + 2\ b_0} \le \epsilon \le 1 \qquad (3.2)$$

Сечение процесса (3.1) представим в виде:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\epsilon,E_0)}{\mathrm{d}\epsilon} = \alpha\ f(\epsilon)\ g(\epsilon)\ , \qquad (3.3)$$

где

$$\alpha = 8\pi r_0^2\ \frac{\ln(1 + 2\ b_0)}{b_0}\ , \qquad (3.4)$$

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\ln(1 + 2b_0)}\frac{1}{\epsilon}\ , \qquad (3.5)$$

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2\ b_0^2\epsilon}\Bigg[1 + \big(b_0^2 - 2b_0 - 2\big)\epsilon + \big(1 + 2b_0\big)\epsilon^2 + b_0^2\ \epsilon^3\Bigg]\ . \qquad (3.6)$$

Алгоритм розыгрыша величины ϵ согласно общей схеме моделирования состоит из следующих шагов:

1. Разыгрывается величина ϵ из распределения $f(\epsilon)$ с помощью (γ_1,γ_2 - случайные числа генерируемые стандартным генератором)

$$\epsilon = \frac{1}{(1+2b_0)\,\gamma_1}$$

2. Вычисляем функцию режекции $g(\epsilon)$ и проверяем условие:
   если $\gamma_2 \leq g(\epsilon)$,то принимаем значение ϵ полученное в пункте 1 ,
   если $\gamma_2 > g(\epsilon)$, то начинаем снова с пункта 1.

После розыгрыша величины ϵ находим энергию вторичного фотона $E_\gamma = \epsilon E_0$, где E_0-энергия начального фотона.

Далее используя кинематические соотношения лабораторной системы отсчета рассчитываем энергию вторичного (конечного) электрона E_e и углы вылета вторичного фотона $\cos\theta_\gamma$ и электрона $\cos\theta_e$:

$$E_e = E_0 + m_e - \epsilon E_0\,, \tag{3.7}$$

$$\cos\theta_\gamma = \frac{E_0^2 + \epsilon^2 E_0^2 - E_e^2 + m_e^2}{2\,\epsilon\,E_0^2}\,,$$

$$\cos\theta_e = \frac{E_0^2 - \epsilon^2 E_0^2 + E_e^2 - m_e^2}{2\,E_0\sqrt{E_e^2 - m_e^2}}\,. \tag{3.8}$$

Сферические углы ϕ_γ, ϕ_e принимают значения в интервале $(0{,}2\pi)$ с равной вероятностью и следовательно могут быть разыграны как равномерно распределенные величины.

Таким образом, в результате розыгрыша мы имеем угловые характеристики вторичного электрона и фотона: $\cos\theta_e, \cos\theta_\gamma$ и ϕ_γ, ϕ_e, а также их энергии E_e,$E_\gamma = \epsilon\,E_0$.

Задание

1. Для энергий начального фотона $E_0 = 0.5$ МэВ и $E_0 = 1.5$ МэВ смоделировать энергии и углы вылета вторичных частиц (фотона и электрона) в лабораторной системе отсчета. Получить не менее 100 значений каждой физической величины для каждого значения энергии начального фотона.

2. Провести статистическую обработку полученных данных т.е. построить гистограммы энергетического и углового (только по углу θ) распределений вторичных частиц.

3. Провести качественный анализ полученных распределений в зависимости от энергии начального фотона.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.
2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.
3. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество М.: Энергоиздат 1985. 248с.
4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.:Наука,1982. 296 с.
5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. М.: Мир, 1990.-349 с.
6. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. М.: Мир, 1990.-400 с.
7. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц. М.: Энергоиздат 1991. 200 с.
8. GEANT4 User's Documents: Physics Reference Manual http://geant4.web.cern.ch/geant4.

4 Лабораторная работа № 4
Позитрон-электронное рассеяние

Цель работы: С помощью метода Монте-Карло смоделировать процесс рассеяния электрона на позитроне в лабораторной системе отсчета.

Краткая теория

Сечение рассеяния позитрона на покоящемся электроне $e^+e^- \to e^+e^-$ дается формулой Баба. Поскольку при моделировании со средой данный процесс происходит на атомных электронах, то сечение рассеяния позитрона на одиночном электроне следует умножить на Z, чтобы получить сечение рассеяния позитронов на атомных электронах. Дифференциальное сечение может быть записано в виде:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{2\pi r_0^2 Z}{\gamma - 1}\frac{1}{\epsilon^2}\left[B_0 - B_1\epsilon + B_2\epsilon^2 - B_3\epsilon^3 + B_4\epsilon^4\right] , \tag{4.1}$$

где $B_0 = 1/\beta^2$, а также

$$\beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \qquad \text{и} \qquad \gamma = \frac{E}{m_e} . \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 2 - Y^2 , \qquad & B_2 &= (1-2Y)(3+Y^2) , \\ B_3 &= (1-2Y)^3 + (1-2Y)^2 , \qquad & B_4 &= (1-2Y)^3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

с $Y = 1/(\gamma+1)$ и $\epsilon = T/(E_0 - m_e)$. Величина T задает кинетическую энергия электрона отдачи, а E_0-энергия начального позитрона e^+.

Кинематическая область ϵ находится для данного процесса в пределах

$$\epsilon_0 = \frac{T_{min}}{E_0 - m_e} \leq \epsilon \leq 1 . \tag{4.4}$$

Здесь T_{min} - минимальная кинетическая энергия электрона, начиная с которой процесс неупругого рассеяния позитрона на электроне рассматривается как дискретный.

При энергиях $T < T_{min}$ столкновения включаются в непрерывные ионизационные потери энергии. Значение T_{min} обычно выбирают достаточно большим, что сложно было рассматривать атомные электроны как практически свободные.

Разложение Батлера для сечения (4.1) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\epsilon} = \alpha f(\epsilon) g(\epsilon) \tag{4.5}$$

$$\alpha = \frac{2\pi r_0^2 Z}{(\gamma - 1)} \frac{1-\epsilon}{\epsilon_0} \left[B_0 - B_1\epsilon + B_2\epsilon^2 - B_3\epsilon^3 + B_4\epsilon^4 \right] \tag{4.6}$$

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon_0}{1-\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^2} \tag{4.7}$$

$$g(\epsilon) = \frac{B_0 - B_1\epsilon + B_2\epsilon^2 - B_3\epsilon^3 + B_4\epsilon^4}{B_0 - B_1\epsilon_0 + B_2\epsilon_0^2 - B_3\epsilon_0^3 + B_4\epsilon_0^4} \tag{4.8}$$

Алгоритм розыгрыша полной энергии электрона отдачи в данном процессе состоит из (γ_0,γ_1 -случайные числа)

1. Разыгрывается величина ϵ с плотностью распределения $f(\epsilon)$ (4.7) методом обратной функции с помощью случайного числа γ_0:

$$\epsilon = \frac{1}{1 - (1-\epsilon_0)\gamma_0} \tag{4.9}$$

2. Вычисляем функцию режекции $g(\epsilon)$ и с помощью γ_1 проверяем условие: если $g(\epsilon) \le \gamma_1$, то принимаем значение ϵ,
а если $g(\epsilon) > \gamma_1$, то начинаем снова с 1.

Далее используя кинематические соотношения лабораторной системы отсчета рассчитываем энергию вторичного (конечного) электрона E_e и углы вылета вторичного позитрона $\cos\theta_p$ и электрона $\cos\theta_e$:

$$E_e = (E_0 - m_e)\epsilon + m_e \ , \tag{4.10}$$

$$\cos\theta_p = \frac{E_e^2 - E_0^2 - E_p^2 + m_e^2}{2\sqrt{(E_0^2 - m_e^2)\left(E_p^2 - m_e^2\right)}} \ ,$$
$$\cos\theta_e = \frac{E_0^2 - \epsilon^2 E_0^2 + E_e^2 - m_e^2}{2\sqrt{(E_0^2 - m_e^2)\left(E_p^2 - m_e^2\right)}} \ . \tag{4.11}$$

Сферические углы ϕ_p, ϕ_e принимают значения в интервале $(0{,}2\pi)$ с равной вероятностью и следовательно могут быть разыграны как равномерно распределенные величины.

Таким образом, в результате розыгрыша мы имеем угловые характеристики вторичного электрона и позитрона: $\cos\theta_e, \cos\theta_p$ и ϕ_p, ϕ_e, а также их энергии E_e,$E_p = \epsilon\ E_0$.

Задание

1. Проверить правильность формулы (4.9).

2. Для энергий начального позитрона $E_0 = 2.5$ МэВ и $E_0 = 4.0$ МэВ смоделировать энергии и углы вылета вторичных частиц (позитрона и электрона) в лабораторной системе отсчета. Получить не менее 100 значений каждой физической величины для каждого значения энергии начального позитрона.

   Примечание. В формуле (4.1) положить $Z = 1$, а значение минимальной кинетической энергии принять равным $T_{min} = 0.55$ МэВ.

3. Провести статистическую обработку полученных данных т.е. построить гистограммы энергетического и углового (только по углу θ) распределений вторичных частиц.

4. Провести качественный анализ полученных распределений в зависимости от энергии начального позитрона.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.

2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.

3. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество М.: Энергоиздат 1985. 248с.

4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.:Наука,1982. 296 с.

5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. М.: Мир, 1990.-349 с.

6. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. М.: Мир, 1990.-400 с.

7. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц. М.: Энергоиздат 1991. 200 с.
8. GEANT4 User's Documents: Physics Reference Manual http:// geant4.web.cern.ch/ geant4.

5 Лабораторная работа № 5

Рассеяние электрона на атомных электронах

Цель работы: С помощью метода Монте-Карло смоделировать процесс рассеяния электрона на электроне в лабораторной системе отсчета.

Краткая теория

Сечение рассеяния электрона с энергией E_0 на покоящихся атомных электронах (или сечение образования δ - электронов) может быть записано в виде (формула Мёллера (Möller))

$$\frac{d\sigma(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{2\pi r_0^2 Z}{(\gamma-1)\beta^2}\frac{1}{\epsilon^2(1-\epsilon)^2}\left[1 + \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2}\epsilon(1-\epsilon)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{[2\gamma^2+2\gamma-1]}{\gamma^2}\epsilon(1-\epsilon)\right] . \tag{5.1}$$

Здесь m_e -масса электрона, Z - атомный номер, r_0- классический радиус электрона. Величины γ, β, и ϵ определяются соотношениями:

$$\gamma = \frac{E_0}{m_e} ,$$
$$\beta^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} ,$$
$$\epsilon = \frac{T}{E_0 - m_e} , \tag{5.2}$$

где T - кинетическая энергия отдачи электрона (электрона с меньшей энергией).

Кинематическая область для переменной ϵ :

$$\epsilon_0 = \frac{T_{min}}{E_0 - m_e} \leq \epsilon \leq \frac{1}{2} . \tag{5.3}$$

Сокращение области в два раза по сравнению с e^+e^- рассеянием связано с тождественностью вторичных электронов.
T_{min} - пороговая (минимальная) энергия первичного электрона начиная с которой процесс $e^+e^- \to e^+e^-$ можно рассматривать как дискретный . Как и в случае e^+e^- рассеивания величина T_{min} берется такой, чтобы атомные электроны можно считать свободными.

Разложение Батлера для данного процесса примет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} = \alpha\ f(\epsilon)\ g(\epsilon)\ , \tag{5.4}$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi r_0^2 Z}{(\gamma-1)\gamma^2} \frac{\left(9\gamma^2 - 10\gamma + 5\right)}{4} \frac{(1-2\epsilon_0)}{\epsilon_0}\ , \tag{5.5}$$

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon_0}{1-2\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon^2}\ , \tag{5.6}$$

$$g(\epsilon) = \frac{4}{9\gamma^2 - 10\gamma + 5} \times$$
$$\times \left[(\gamma-1)^2\epsilon^2 - (2\gamma^2 + 2\gamma - 1)\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{\gamma^2}{(1-\epsilon)^2}\right]. \tag{5.7}$$

Для того чтобы разыгрывать энергию отдачи электрона (напомним, что это электрон с меньшей энергией) необходимо:

1. Разыгрывается величина ϵ с плотностью распределения $f(\epsilon)$ (5.6) методом обратной функции с помощью случайного числа γ_0:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{1-(1-\epsilon_0)\gamma_0}\ . \tag{5.8}$$

2. Вычисляем функцию режекции $g(\epsilon)$ (5.7) и с помощью γ_1 проверяем условие:
   если $g(\epsilon) \leq \gamma_1$, то принимаем значение ϵ,
   а если $g(\epsilon) > \gamma_1$, то начинаем снова с 1.

3. Энергию отдачи электрона E_1' вычисляем по формуле:

$$E_1' = (E_0 - m_e)\epsilon + m_e\ . \tag{5.9}$$

4. Далее используя кинематические соотношения лабораторной системы отсчета рассчитываем энергию второго конечного электрона E_2' и углы вылета вторичных электронов.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.
2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.
3. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество М.: Энергоиздат 1985. 248с.
4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.:Наука,1982. 296 с.
5. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 1. М.: Мир, 1990.-349 с.
6. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. М.: Мир, 1990.-400 с.
7. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц. М.: Энергоиздат 1991. 200 с.
8. GEANT4 User's Documents: Physics Reference Manual http://geant4.web.cern.ch/ geant4.

6 Лабораторная работа № 6

Аннигиляция позитрона на атомном электроне

Цель работы: С помощью метода Монте-Карло смоделировать процесс аннигиляции позитрона на атомном электроне в два гамма кванта в лабораторной системе отсчета.

Краткая теория

Дифференциальное сечение процесса аннигиляция позитрона e^+ с энергией E_0 на покоящемся электроне e^- в два γ – кванта может быть записано в виде

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = C_1\ [S(a\varepsilon) + S(a(1-\varepsilon))] \quad , \tag{6.1}$$

где

$$\gamma = \frac{E_0}{m_e}, \quad a = \gamma + 1 \tag{6.2}$$

а m_e - масса электрона. Функция $S(x)$ задается выражением:

$$S(x) = \left[-1 + \frac{C_2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] , \tag{6.3}$$

а коэффициенты C_1,C_2

$$C_1 = \frac{\pi r_0^2}{\gamma - 1}, \qquad C_2 = a + \frac{2\gamma}{a}. \tag{6.4}$$

Величина ε связана с энергией одного из вторичных фотонов с наименьшей энергией k_1 соотношением:

$$\varepsilon = \frac{k_1}{E_0 + m_e} . \tag{6.5}$$

Если позитрон взаимодействует с атомными электронами, то величина сечения (6.1) должна быть умножена на атомный номер среды Z (количество атомных электронов), т.е.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(Z,\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = Z\frac{\mathrm{d}\sigma(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} . \tag{6.6}$$

Кинематические пределы для величины ε находятся в области:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{a + \sqrt{\gamma^2 - 1}} \leq \varepsilon \leq 1 - \varepsilon_0 \tag{6.7}$$

Разложение Батлера для (6.6) состоит из одного слагаемого и запищется в виде

$$\frac{\mathrm{d}\sigma\left(Z,\varepsilon\right)\mathrm{d}\varepsilon}{=}\alpha\ f\left(\varepsilon\right)\ g\left(\varepsilon\right) \tag{6.8}$$

с

$$\alpha = \frac{\pi r_0^2 Z m_e}{E_0 - m_e} \ln\left(\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)\ , \tag{6.9}$$

$$f\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)}\frac{1}{\varepsilon}\ , \tag{6.10}$$

и функцией режекции

$$g\left(\varepsilon\right) = \left[S\left(a\varepsilon\right) + S\left(a\left(1-\varepsilon\right)\right)\right]\varepsilon\ . \tag{6.11}$$

С помощью разложения Батлера (6.8) энергия вторичного фотона может быть получена путем методом Монте-Карло следующим образом (напомним, что γ_0,γ_1 - случайные числа равномерно распределенные на интервале $(0,1)$):

1. Получить значение ε с помощью функции плотности вероятности $f\left(\varepsilon\right)$ (6.10), разрешая уравнение ниже относительно ε

$$F\left(\varepsilon\right) = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f\left(\varepsilon'\right)\mathrm{d}\varepsilon' = \frac{1}{\ln\left(\frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\varepsilon'}{\varepsilon'} = \gamma_0 \tag{6.12}$$

2. Проверяем условие с помощью функции режекции $g\left(\varepsilon\right)$ и γ_1:
если $\gamma_1 \leq g\left(\varepsilon\right)$, то принимаем данное значение ε;
если $\gamma_1 > g\left(\varepsilon\right)$, то начинаем вновь с пункта 1.

После розыгрыша ε энергия фотона k вычисляется с помощью соотношения

$$k_1 = \left(E_0 + m_e\right)\varepsilon \tag{6.13}$$

3. Далее используя кинематические соотношения лабораторной системы отсчета рассчитываем энергию второго (конечного) фотона k_2 и углы вылета тонов $\cos\theta_{\gamma_1}$ и электрона $\cos\theta_{\gamma_2}$. Сферические углы ϕ_γ, ϕ_e принимают значения в интервале $(0{,}2\pi)$ с равной вероятностью и следовательно могут быть разыграны как равномерно распределенные величины.

Задание

1. Для энергий начального позитрона $E_0 = 0.5$ МэВ и $E_0 = 1.5$ МэВ смоделировать энергии и углы вылета вторичных частиц (фотонов) в лабораторной системе отсчета. Получить не менее 100 значений каждой физической величины для каждого значения энергии начального позитрона.

2. Провести статистическую обработку полученных данных т.е. построить гистограммы энергетического и углового (только по углу θ) распределений вторичных частиц.

3. Провести качественный анализ полученных распределений в зависимости от энергии начального позитрона.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.

2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.

3. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество М.: Энергоиздат 1985. 248с.

4. GEANT4 User's Documents: Physics Reference Manual http://geant4.web.cern.ch/geant4.

7 Лабораторная работа № 7

Тормозное излучение

Цель работы: С помощью метода Монте-Карло смоделировать процесс излучения фотона заряженной частицей в поле ядра и атомных электронов в лабораторной системе отсчета.

Краткая теория

Тормозное излучение представляет собой процесс излучения фотона заряженной частицей в поле ядра и атомных электронов. Сечение испускания фотона с энергией $k = \epsilon E$ электроном энергии E в лабораторной системе отсчета можно представить в виде:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(Z,E,\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\alpha\, r_0^2\, Z\Big[Z+\xi(Z)\Big]}{\epsilon}\Bigg\{\Big[1+(1-\epsilon)^2\Big]$$
$$\Big[\Phi_1(\delta) - F(Z)\Big] - (2/3)(1-\epsilon)\Big[\Phi_2(\delta) - F(Z)\ \Big]\Bigg\}\,, \tag{7.1}$$

где $\Phi_i(\delta)$ является функциями параметрами экранирования

$$\delta = \frac{136}{E}\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)}\frac{m}{Z^{1/3}} \tag{7.2}$$

и с точностью 1-2 % $\Phi_i(\delta)$ определяются выражениями

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(\delta) = 20.867 - 3.242\,\delta + 0.625\,\delta^2\\ \Phi_2(\delta) = 20.209 - 1.930\,\delta + 0.086\,\delta^2\end{array}\right\}\delta \le \mathbf{1}\,,$$
$$\Phi_1(\delta) = \Phi_2(\delta) = 21.12 - 4.184\ \ln(\delta + 0.952)\ \Big\}\delta > \mathbf{1}\,. \tag{7.3}$$

Функции $F\,(Z)$ и $\xi\,(Z)$ задаются выражениями

$$F\,(Z) = \left\{\begin{array}{ll}(4/3)\ln Z, & E < 0.05\text{ГэВ}\\ (4/3)\ln Z + 4\,f_c\,(Z)\,, & E \ge 0.05\text{ГэВ}\end{array}\right. \tag{7.4}$$

$$\xi\,(Z) = \ln\frac{1440}{Z^{2/3}}\Big[1/\big(\ln\frac{183}{Z^{1/3}} - f_c(Z)\big)\Big] \tag{7.5}$$

с так называемой кулоновской поправкой

$$f_c\,(Z) = a\sum_{k=1}^{\infty}(1/k)\,(1/\left(k^2 - a\right))\,, \tag{7.6}$$

которая с погрешностью до 4 значащих цифр может быть записана в виде:

$$f_c(Z) = a\Big(\frac{1}{1+a} + 0.20206 + 0.0369\,a + \\ +0.0083\,a^2 - 0.002\,a^3\Big)\ . \tag{7.7}$$

Параметр a имеет вид

$$a = (\alpha Z)^2\ , \qquad \alpha = \frac{1}{137.06}\ . \tag{7.8}$$

Кинематически разрешенной областью для ϵ является область

$$\epsilon_c = \frac{k_c}{E} \le \epsilon \le 1 - \frac{m}{E} = \epsilon_1\ , \tag{7.9}$$

где k_c - параметр обрезания энергии фотона, ниже которой процесс потери энергии электроном трактуется как непрерывные потери энергии.

Сечение процесса тормозного излучения (7.1) может быть представлена в виде разложения Батлера:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(Z,E,\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_i\ f_i(\epsilon)\ g_i(\epsilon) \tag{7.10}$$

с

$$\alpha_1 = F_{10} \ln\frac{\epsilon_1}{\epsilon_c} \qquad\qquad \alpha_2 = F_{20}\frac{3}{8}\frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_c^2}{1-\epsilon_c} \tag{7.11}$$

$$f_1(\epsilon) = \Big(1/\ln\frac{\epsilon_1}{\epsilon_c}\Big)\frac{1}{\epsilon} \qquad\qquad f_2(\epsilon) = \frac{2\epsilon}{\epsilon_1^2 - \epsilon_c^2} \tag{7.12}$$

$$g_1(\epsilon) = \frac{f_1}{F_{10}}\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon_c}C_M(\epsilon) \qquad\qquad g_2(\epsilon) = \frac{f_2}{F_{20}}C_M(\epsilon) \tag{7.13}$$

и

$$F_1 = F_1(\delta) = 3\Phi_1(\delta) - \Phi_2(\delta) - 2F(z) \tag{7.14}$$

$$F_2 = F_2\,(\delta) = 2\Phi_1(\delta) - 2\ F(Z) \tag{7.15}$$

$$F_{10} = F_1(\delta_{min}) \qquad\qquad F_{20} = F_2(\delta_{min})\ , \tag{7.16}$$

где

$$\delta_{min} = \frac{136}{Z^{1/3}}\frac{m}{E}\frac{\epsilon_c}{1-\epsilon_c} \tag{7.17}$$

- минимальное значение параметра δ, а функция $C_M(\epsilon)$ носит название фактора Мигдала

$$C_M(\epsilon) = \frac{1 + C_0/\epsilon_1^2}{1 + C_0/\epsilon^2} \, . \tag{7.18}$$

Вспомогательные параметры задаются

$$C_0 = \frac{n \, r_0 \lambda^2}{4 \, \pi^3}$$

n - плотность электронов в среде ,
r_0 - классический радиус электрона ,
λ - комптоновская длина волны электрона .
Эта поправка исчезает в сечении для низких энергий фотона.

Используя разложение Батлера величину ϵ можно получить следующим образом (γ_0, γ_1, γ_2 - набор чисел "стандартного"генератора псевдослучайных чисел):

1. Разыграем номер i (1 или 2) слагаемого в разложении (7.10) как дискретную случайную величину. Если

$$\gamma_0 \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad \text{,то} \qquad i = 1 \, , \tag{7.19}$$

а если

$$\gamma_0 > \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \qquad \text{,то} \qquad i = 2 \, . \tag{7.20}$$

2. Разыгрываем ϵ, используя функцию распределения $f_i(\epsilon)$,

$$\epsilon = \epsilon_c * \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_c}\right)^{\gamma_1} \qquad i = 1 \tag{7.21}$$

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_c^2 + \gamma_1(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)} \qquad i = 2 \tag{7.22}$$

3. Вычисляем функцию режекции $g_i(\epsilon)$ и если $\gamma_2 > g_i(\epsilon)$ стартуем вновь с пункта 1
если $\gamma_2 \leq g_i(\epsilon)$, принимаем данное значение ϵ.

4. Проверяем условие

$$\delta = \frac{136}{Z^{1/3}} \frac{m}{E} \, \frac{E}{1 - \epsilon} \leq \delta_{max} = \exp\left(\frac{21.12 - F(Z)}{4.184}\right) - 0.952 \tag{7.23}$$

если это условие не выполняется, то начинаем с 1. Если да - оставляем данное значение ϵ.

Ограничение $\delta \leq \delta_{max}$, обусловлено тем, что при $\delta \longrightarrow \infty$ сечение становится отрицательным, что противоречит смыслу понятия о дифференциальном сечении.

Задание

1. Для энергий начального электрона $E = 2.5$ МэВ и $E = 4.5$ МэВ смоделировать энергии и углы вылета тормозного фотона в лабораторной системе отсчета. Получить не менее 100 значений каждой физической величины для каждого значения энергии начального электрона. Положить $Z = 1$, $m = 0.511$ МэВ.

2. Провести статистическую обработку полученных данных т.е. построить гистограммы энергетического распределений вторичных частиц.

3. Провести качественный анализ полученных распределений в зависимости от энергии начального электрона.

Литература

1. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.:Наука,1973. 321 с.

2. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.:Наука,1971. 328 с.

3. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество М.: Энергоиздат 1985. 248с.

4. GEANT4 User's Documents: Physics Reference Manual http://geant4.web.cern.ch/geant4.