А. В. Павленко
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **Ю. А. Гришечкин,** канд. физ.-мат. наук, доцент

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА–ТАВХЕЛИДЗЕ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Уравнение Логунова-Тавхелидзе, описывающее связанные состояния двух скалярных частиц одинаковой массы m, в двумерном импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2 - E_p^2)\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}d^2\mathbf{k}\,,\ E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,, \quad (1)$$

где $0 < 2E < 2m$ – энергия двухчастичной системы, $\mathbf{p}$ – относительный импульс в системе центра масс, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – релятивистский потенциал.

В полярных координатах представим искомую волновую функцию $\psi(\mathbf{p})$ и потенциал $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ в форме [1, 2]

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi),\ V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}V_\mu(p,k)\exp(i\mu\gamma), \quad (2)$$

где $\psi_\mu(p)$ – парциальная волновая функция, $V_\mu(p,k)$ – парциальный потенциал, $p = |\mathbf{p}|$, φ – угол в полярной системе координат, γ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. Подстановка ряда (2) в (1) приводит к интегральному уравнению для парциальной волновой функции

$$(E^2 - E_p^2)\psi_\mu(p) = \frac{\sqrt{p}}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \sqrt{k}V_\mu(p,k)\frac{m}{E_k}\psi_\mu(k)dk\,. \quad (3)$$

Парциальный потенциал в импульсном представлении связан с двумерным потенциалом в координатном представлении $V(\rho)$ следующим интегральным соотношением [2]:

$$V_\mu(p,k) = 2\pi \int_0^\infty \rho J_\mu(p\rho) V(\rho) J_\mu(k\rho)\, d\rho, \tag{4}$$

где $J_\mu(z)$ – функция Бесселя [3]. В данной работе мы рассматриваем δ–потенциал в координатном представлении

$$V(\rho) = -\lambda\delta(\rho - a), \tag{5}$$

где $\lambda > 0, a > 0$ – константы. Подставив (5) в (4) и проинтегрировав, получим следующее выражение для парциального потенциала в импульсном представлении

$$V_\mu(p,k) = -\lambda 2\pi a J_\mu(pa) J_\mu(ka). \tag{6}$$

Потенциал (6) является сепарабельным. Подстановка (6) в (3) позволяет преобразовать интегральное уравнение к следующему выражению:

$$\psi_\mu(p) = C\frac{\lambda a}{2\pi}\sqrt{p}\frac{J_\mu(pa)}{E_p^2 - E^2}, \quad C = \int_0^\infty \sqrt{k}\frac{m}{E_k} J_\mu(ka)\psi(k)\, dk. \tag{7}$$

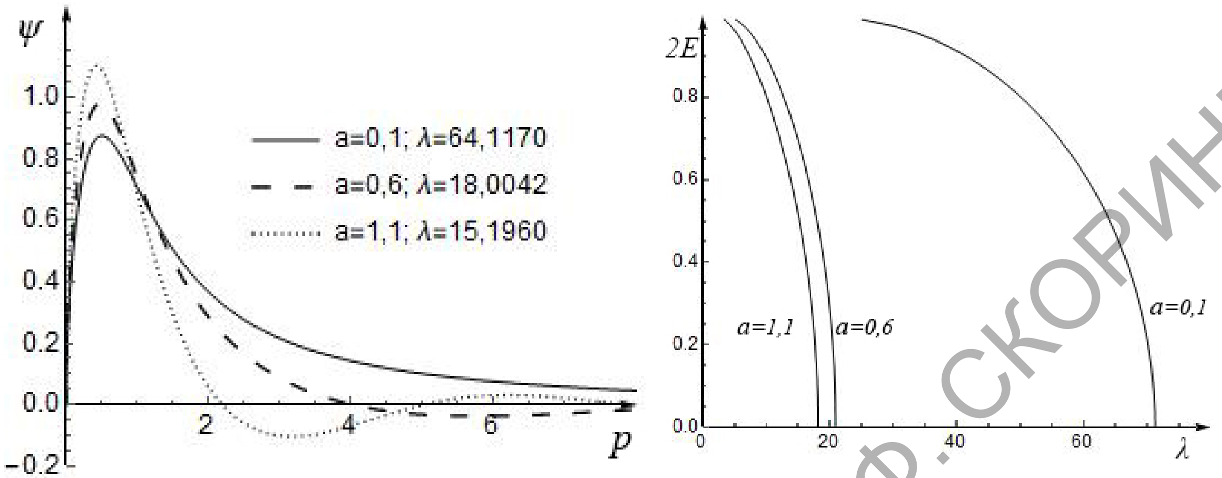
Для получения условия квантования энергии двухчастичной системы умножим равенство (7) на выражение $\sqrt{p}\frac{m}{E_p}J_\mu(pa)$ и проинтегрируем его на интервале $p \in [0;\infty)$. В результате получим равенство

$$1 = \frac{\lambda a}{2\pi}\int_0^\infty p \frac{J_\mu^2(pa)}{E_p^2 - E^2}\frac{m}{E_p}\, dp, \tag{8}$$

которое, является условием квантования энергии двухчастичной системы. На рисунке 1 (а) приведены парциальные волновые функции для $\mu = 0$ и различных значений параметров a, λ. Для нормировки приведенных на рисунке волновых функций мы использовали следующее нерелятивистское выражение [1, 4]:

$$\int_0^\infty \psi_\mu^2(p)\, dp = 1. \tag{9}$$

На рисунке 1 (б) приведены графики зависимости энергии от величины параметра λ для трех различных значений параметра a В ходе выполнения вычислений мы полагали, что $m = 1$.



а) б)

Рисунок 1 – а) волновые функции; б) условие квантования энергии

На рисунке 1 (а) показано, что с ростом параметра a максимумы и минимумы волновых функций смещаются влево вдоль оси op. На рисунке 1(б) видно, что при больших значениях параметра a система двух релятивистских частиц будет существовать в связанном состоянии при меньших значениях параметра λ.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 6-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2004. – 800 с.

2. Ктиторов, С. А. Рассеяние электронов в монослойном графене: модель кольцеобразной ямы / С. А. Ктиторов., Н. Е. Фирсова // Физика твердого тела. – 2011 г. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 384–388.

3. Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris – 7-th ed. – San Diego: Academic Press, 2012. – 1205 p.

4. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3 изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.