**Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»**

В.И. БОГДАНОВИЧ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ: КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**Для студентов первого курса специальности
1-31 04 03 «Физическая электроника»**

ПРЕПРИНТ РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

**Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015**

Лекция 2

Раздел 1 Электрические цепи постоянного тока. Тема 2 Методы эквивалентного преобразования схем электрических цепей с пассивными элементами

Методы эквивалентного преобразования схем электрических цепей с пассивными элементами

Часто при анализе электрических цепей постоянного тока приходится иметь дело со сложными разветвленными цепями. Если такие цепи состоят из соединения линейных пассивных элементов, то анализ значительно упрощается, если в схемах цепей провести определенные эквивалентные преобразования. Метод эквивалентного преобразования схем заключается в том, что сложные участки цепи заменяются более простыми, им эквивалентными. Преобразование будет эквивалентным, если оно не оказывает влияния на режим остальной, не затронутой преобразованием части цепи, т. е. если оно не вызывает в оставшейся части цепи изменений напряжений и токов. Примером такого преобразования может служить замена параллельного или смешанного соединения элементов одной ветвью с эквивалентным сопротивлением. Рассмотрим методы эквивалентных преобразований схем электрических цепей.

Цепь с последовательно соединенными резисторами. На рисунке 19, а) представлена схема с последовательно соединенными резисторами. Известно, что в этом случае через все элементы цепи проходит один и тот же ток. Приведем эту схему к эквивалентной схеме (рисунок 19, б), в которой эквивалентное сопротивление $R_{экв.посл.}$ выбрано таким, чтобы ток в цепи оставался без изменения. По второму правилу Кирхгофа можно записать:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR_{зкв}, \qquad (13)$$

откуда $R_{зкв.пос} = R_1 + R_2 + R_3$.

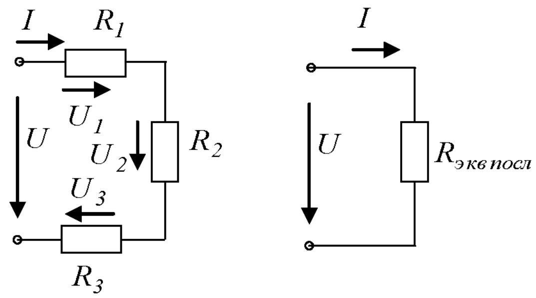
Эквивалентное сопротивление при последовательном соединении элементов цепи равно сумме сопротивлений отдельных элементов. Напряжение на зажимах последовательно соединенных приемников распределяется пропорционально их сопротивлениям.

Ток в цепи при последовательном соединении резисторов

$$I = \frac{U}{R_{экв.пос}}, \qquad (14)$$

а мощность, подводимая к цепи, равна сумме мощностей отдельных элементов:

$$P = UI = UI_1 + U_2 I + U_2 I + \ldots + U_n I = I^2 R_1 + I^2 R_2 + \ldots + I^2 R_n = \sum_{i=1}^{n} P_i \,.$$



а) б)

Рисунок 19 − Схема электрической цепи с последовательно соединенными резисторами

Последовательное соединение применяют в тех случаях, когда номинальные напряжения приемников ниже напряжения сети, например в измерительных приборах для расширения пределов измерения, в двигателях постоянного тока для ограничения пусковых токов и регулирования частоты вращения и т. д. Однако приемники, как правило, последовательно не включают, так как при выходе из строя одного из них происходит отключение остальных, что на практике нежелательно. Кроме того, при последовательном включении приемников мощность, выделяемая в цепи, пропорциональна их сопротивлениям, так как через все приемники проходит один и тот же ток. Следовательно, приемники, рассчитанные на меньшую номинальную мощность, будут работать с перегрузкой, а приемники, рассчитанные на большую номинальную мощность, - с недогрузкой. Отметим, что приемники с одинаковыми номинальными напряжениями и мощностями окажутся в лучших условиях работы при последовательном соединении.

Цепь с параллельно включенными резисторами. Рассмотрим параллельно соединенные приемники (рисунок 20, а), т. е. случай, когда приемники находятся под одним и тем же напряжением, что наиболее часто используют на практике. Это удобно, так как не требуется согласовывать номинальные данные приемников и имеется возможность их включать и выключать независимо друг от друга.

Схема рисунка 20, а) состоит из трех параллельных ветвей. По первому правилу Кирхгофа,

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \qquad (15)$$

где: $I_1 = \dfrac{U}{R_1}; I_2 = \dfrac{U}{R_2}; \; I_3 = \dfrac{U}{R_3}$.

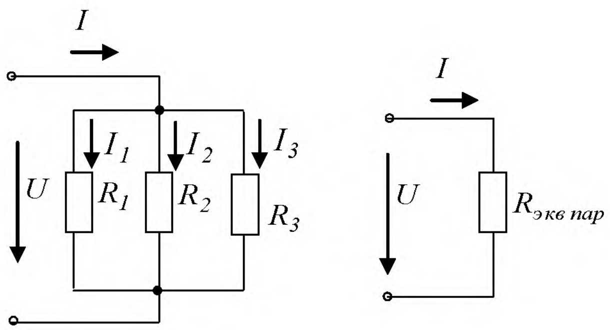


Рисунок 20 Схема электрической цепи с параллельно соединенными резисторами

Тогда для эквивалентной схемы (рисунок 20, б) $I = \dfrac{U}{R_{экв.пар}}$.
Подставляя полученные значения токов в (15) и сокращая на U, получим

$$\frac{1}{R_{экв.пар}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \qquad (16)$$

Уравнение (1.29) можно переписать для проводимости как

$$g_{экв.пар} = g_1 + g_2 + g_3, \qquad (17)$$

где $g = \dfrac{1}{R}$.

Или в общем виде

$$g_{экв.пар} = \sum_{i=1}^{n} g_i.$$

Следовательно, при параллельном соединении элементов электрической цепи эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей ее отдельных параллельно включенных ветвей.

При увеличении числа параллельных ветвей эквивалентная проводимость цепи возрастает, а эквивалентное сопротивление $R_{экв.пар} = \dfrac{1}{g_{экв.пар}}$ уменьшается, вследствие чего ток в неразветвленной части цепи возрастает. При этом увеличивается мощность P всей цепи. Мощность, подводимая к цепи с параллельно включенными резисторами, равна сумме мощностей ее отдельных параллельно включенных ветвей:

$$P = UI = UI_1 + UI_2 + \ldots + UI_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Получим формулы эквивалентных сопротивлений для двух частных случаев, представляющих практический интерес: для цепи с двумя параллельно включенными резисторами с сопротивлениями R_1 и R_2 и цепи с тремя параллельно включенными резисторами с сопротивлениями R_1, R_2, R_3.

Эквивалентное сопротивление цепи с двумя параллельно включенными резисторами

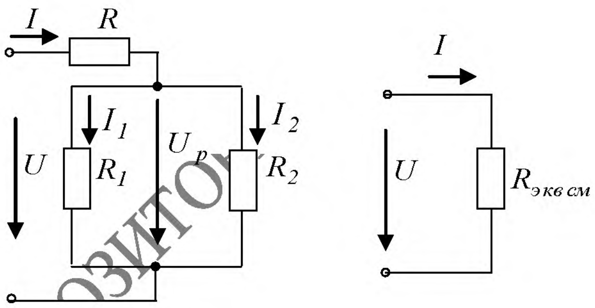
$$R_{экв.пар} = \frac{1}{g_{экв.пар.}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (18)$$

Эквивалентное сопротивление цепи с тремя параллельно включенными резисторами:

$$R_{экв.пар} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (19)$$

Следует отметить, что эквивалентное сопротивление при параллельном соединении резисторов будет всегда меньше самого малого сопротивления, включенного в цепь.

Смешанное соединение резисторов. Рассмотрим простейшую цепь со смешанным соединением, т. е. содержащую последовательно и параллельно включенные резисторы, которая показана на рисунке 21, а).



а) б)

Рисунок 21− Схема электрической цепи со смешанным соединением резисторов

Эта цепь может быть приведена к схеме с одним эквивалентным сопротивлением $R_{экв.см} = \frac{U}{I}$ (рисунок 21, б).

Преобразование схемы удобно проводить в два приема. Вначале заменяют сопротивления параллельных ветвей на эквивалентное $R_{экв.1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а затем, зная, что эквивалентное сопротивление $R_{экв.1,2}$ включено последовательно с сопротивлением R, находят эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R_{экв.см} = R + R_{экв.1,2} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

После нахождения эквивалентного $R_{экв.см}$, можно определить ток в неразветвленной части цепи: $I = \frac{U}{R_{экв.см}}$ Для определения токов в параллельных ветвях I_1 и I_2 вначале находят напряжение разветвления $U_p = IR_{экв.1,2}$, затем записывают токи в ветвях $I_1 = \frac{U_p}{R_1}$ и $I_2 = \frac{U_p}{R_2}$.

Последовательное, параллельное и смешанное соединения образуют цепи, которые называются простыми цепями постоянного тока.

Определение значения токов в простых цепях постоянного тока, если известны ЭДС и сопротивления участков цепи, производится с использованием закона Ома. Для сложных многоконтурных разветвленных цепей, в которых произвольно размещены резисторы и источники ЭДС, закона Ома для расчета недостаточно. В этом случае и используют правила Кирхгофа.

Преобразование треугольника в эквивалентную звезду. Рассмотрим электрическую схему рисунка 22, а). В этой схеме соединения элементов нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному. В этом случае цепь образует треугольник, вершинами, которых являются три узла $1, 2, 3$, а сторонами три ветви с сопротивлениями R_{12}, R_{23}, R_{31}, включенные между этими узлами. Расчет такой цепи удобно проводить, используя эквивалентную замену трех ветвей, соединенных треугольником, тремя ветвями, соединенными трехлучевой звездой, т.е. в треугольник с сопротивлениями R_{12}, R_{23}, R_{31} необходимо вписать звезду с сопротивлениями R_1, R_2, R_3.

ПРЕПРИНТ РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМ.

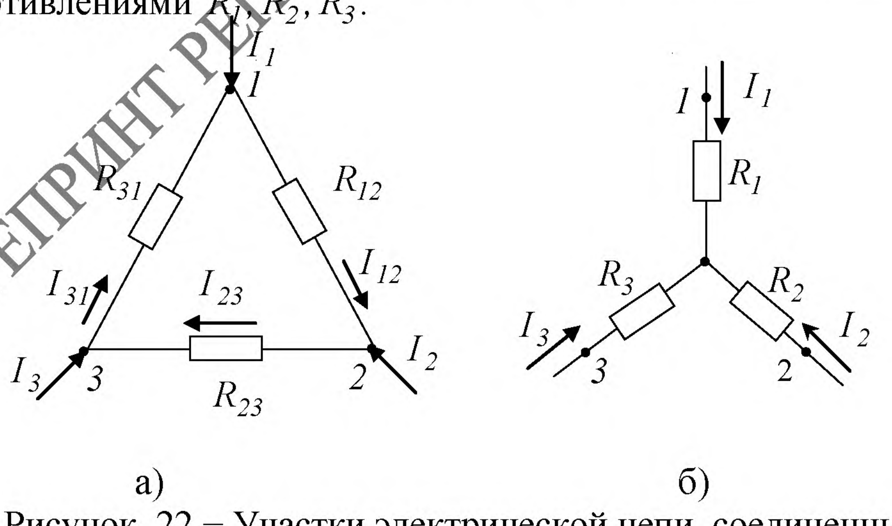


Рисунок 22 − Участки электрической цепи, соединенные треугольником (а) и звездой (б)

Введем обозначения:

R_{12}, R_{23}, R_{31} – сопротивление сторон треугольника;

R_1, R_2, R_3 – сопротивление лучей звезды;

I_1, I_2, I_3 – токи, подходящие к выводам;

I_{12}, I_{23}, I_{31} – токи в ветвях треугольника.

Выразим токи в ветвях треугольника через приходящие токи (рисунок 26, а). По второму правилу Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна 0, т. е.

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0.$$

По первому правилу Кирхгофа для узлов 2 и 1:

$$I_{23} = I_{12} + I_2; \quad I_{31} = I_{12} - I_1.$$

Решая уравнения, определяем

$$I_{12} = \frac{R_{31}I_1 - R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение между выводами 1 и 2 для треугольника:

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{31}I_1 - R_{12}R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Для звезды:

$$U_{12} = R_1I_1 - R_2I_2.$$

Для эквивалентности необходимо равенство напряжений U_{12} при всяких токах I_1 и I_2, т. е.

$$\frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2 = R_1I_1 - R_2I_2,$$

а это возможно, если

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, делённому на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.

$$I_{23} = \frac{R_{12}I_2 - R_{31}I_3}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad I_{31} = \frac{R_{23}I_3 - R_{12}I_1}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Преобразование звезды в эквивалентный треугольник. Рассмотрим электрическую схему рисунка 22, б. При переходе от звезды к треугольнику заданным является сопротивление звезды R_1, R_2, R_3, а необходимо определить значения сопротивлений сторон треугольников R_{12}, R_{23}, R_{31}.

ПРЕПРИНТ РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_2}; R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

Сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и произведения их, деленного на сопротивление третьего луча.

Преобразование треугольника сопротивлений с источником напряжения в эквивалентную звезду.

Рассмотрим схему на рисунке 23, а).

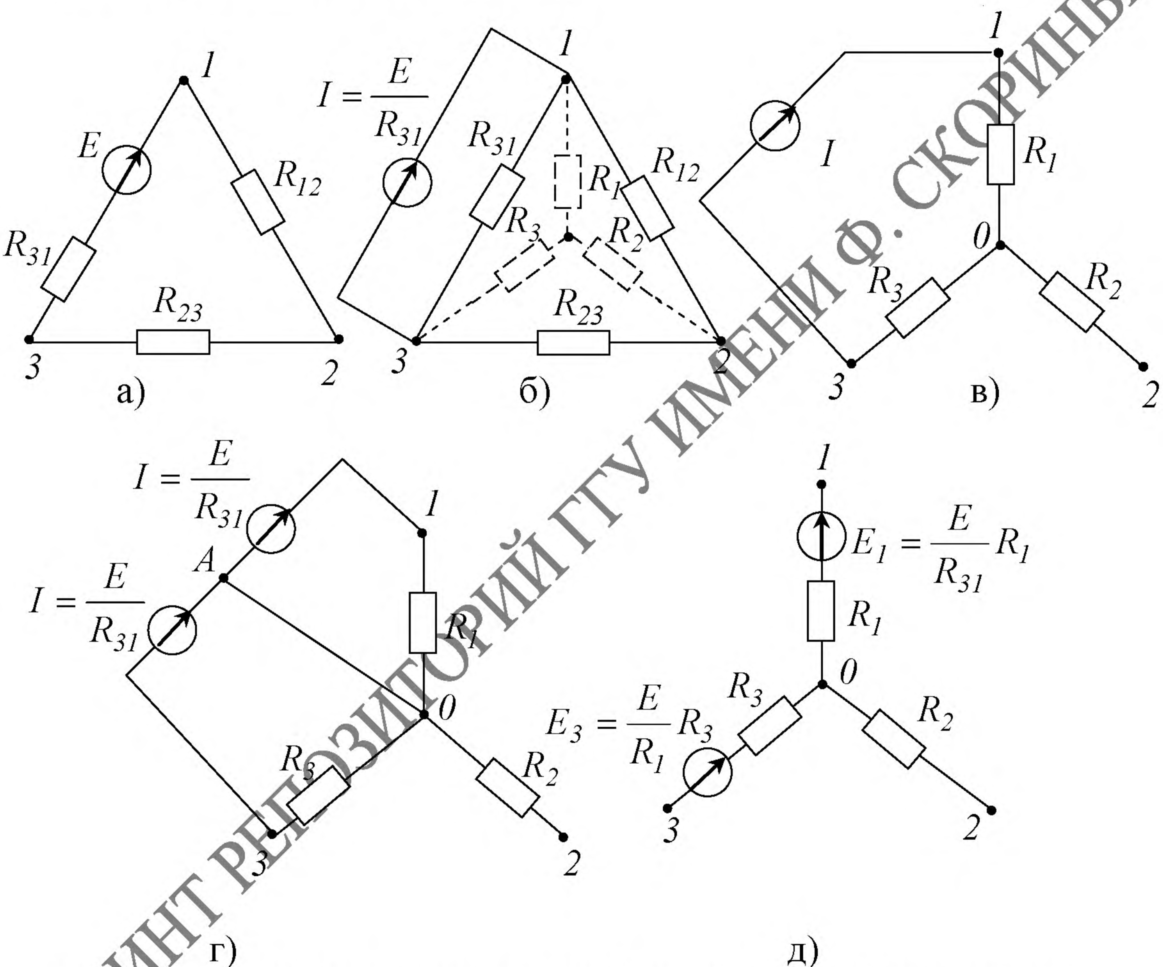


Рисунок 23 − Схемы электрической цепи для преобразования треугольника сопротивлений с источником напряжения в эквивалентную звезду

Заменяем источник ЭДС с напряжением E эквивалентным источником тока (рисунок 23, б).

Преобразуем, треугольник сопротивлений в эквивалентную звезду рисунок 23, б) сопротивления которой вычисляются по формулам:

ПРЕПРИНТ РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad ; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \; ;$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Между точками $1,3$ рисунка 23, в) остается неизменный источник тока с $I = \frac{E}{R_{31}}$.

Расщепим источник тока I на два источника (рисунок 23, г) и соединим точку A с точкой 0. Теперь источник тока можно заменить эквивалентным источником напряжения, при этом получится схема эквивалентной звезды с источниками напряжений (рисунок 23, д)).

ПРЕПРИНТ РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ