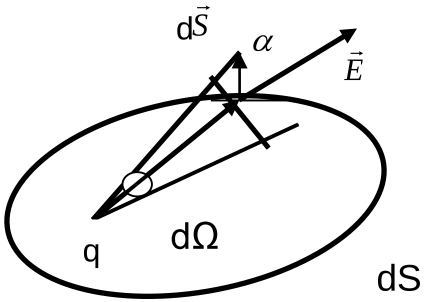
Лекция 2: Электростатическая теорема Гаусса (ЭТГ).

1. ЭТГ для точечного заряда.
2. ЭТГ для системы зарядов и для непрерывно распределённого заряда.
3. Закон Кулона в дифференциальной форме. Электрические заряды как источник электрического поля.

1. ЭТГ для точечного заряда.



Выберем элемент некоторой поверхности dS.

dΩ - телесный угол под которым виден элемент поверхности dS;

dS′ = dScosα – проекция dS на поверхность перпендикулярной вектору .

Поток вектора через элемент поверхности dS

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S}$$

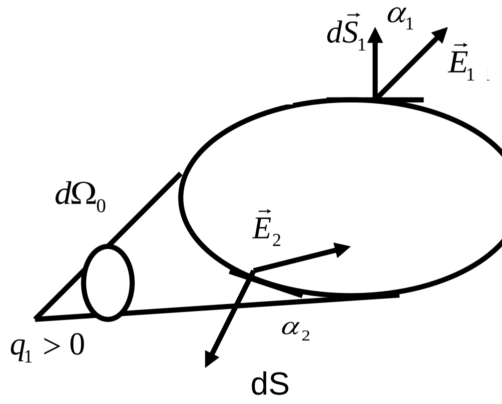
Поток вектора через элемент поверхности dS при q расположенном внутри объёма

$$dN = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\cdot\vec{r}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^3}\cdot r\cdot dS\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}dS' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\cdot d\Omega = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\cdot d\Omega$$

$$N = \int\limits_{(S)}\vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Рассмотрим случай, когда заряд находится вне ограниченной поверхности.



$$\alpha_1 < \frac{\pi}{2} \qquad \cos\alpha_1 > 0$$

$$dS_1^{'} = dS_1 \cos\alpha_1$$

$$\alpha_2 > \frac{\pi}{2} \qquad \cos\alpha_2 < 0$$

$$dS_2^{'} = -dS_2 \cos\alpha_2$$

Поток вектора напряжённости через элемент поверхности dS, если заряд находится вне объёма поверхности.

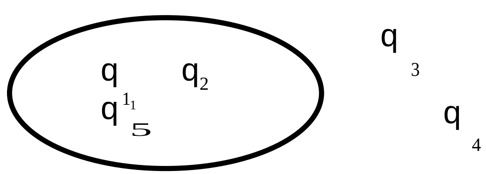
$$\mathrm{N} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega_0} d\Omega - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\Omega_0} d\Omega = 0$$

Электростатическая теорема Гаусса для точечного заряда

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} \\ 0 \end{cases}$$

2. ЭТГ для системы зарядов и для непрерывно распределённого заряда.

Рассмотрим систему точечных зарядов и поверхность S произвольной формы, часть зарядов находится внутри объёма, а часть – снаружи объёма.



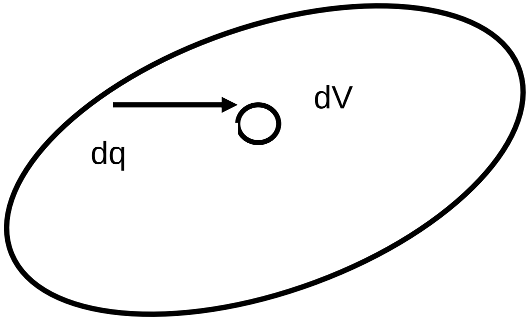
ЭТГ для системы точечных зарядов

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int\limits_{(S)} \left(\sum_{k=1}^{n} E_k \right) d\vec{S} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(S)} \vec{E}_k d\vec{S} = \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

2. **ЭТГ для системы зарядов и для непрерывно распределённого заряда**

Рассмотрим некоторую область объёмом V, в которой заряжённые частицы расположены настолько плотно, что можно говорить о непрерывном распределении заряда.



ЭТГ для непрерывно распределённого заряда.

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int q = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{V} \rho dV$$

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{(V)} \rho dV$$

3. Закон Кулона в дифференциальной форме.

$$\mathrm{N} = \int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{(V)} \rho dV$$

$$\int\limits_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int\limits_{(V)} div\vec{E} dV$$

$$\int\limits_{(V)} div\vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{[V]} \rho dV$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$