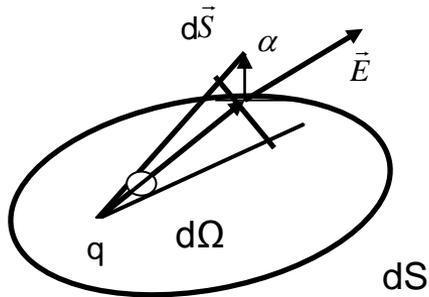


Лекция 2: Электростатическая теорема Гаусса (ЭТГ).

1. ЭТГ для точечного заряда.
2. ЭТГ для системы зарядов и для непрерывно распределённого заряда.
3. Закон Кулона в дифференциальной форме. Электрические заряды как источник электрического поля.

1. ЭТГ для точечного заряда.



Выберем элемент некоторой поверхности dS .
 $d\Omega$ - телесный угол под которым виден элемент поверхности dS ;

$dS' = dS \cos \alpha$ – проекция dS на поверхность перпендикулярной вектору .

Поток вектора через элемент
поверхности dS

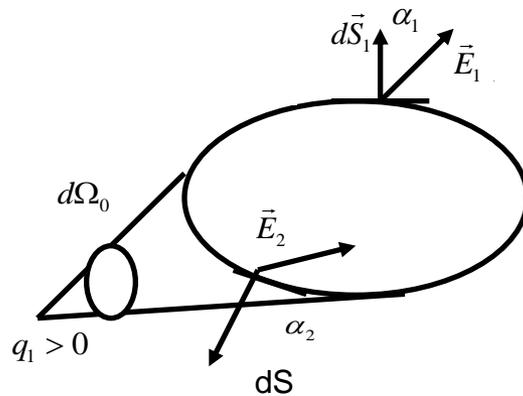
$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S}$$

Поток вектора через элемент поверхности dS при q расположенном внутри объёма

$$\begin{aligned}dN &= \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot r \cdot dS \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dS' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot d\Omega\end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Рассмотрим случай, когда заряд находится вне ограниченной поверхности.



$$\alpha_1 < \frac{\pi}{2} \quad \cos \alpha_1 > 0$$

$$dS'_1 = dS_1 \cos \alpha_1$$

$$\alpha_2 > \frac{\pi}{2} \quad \cos \alpha_2 < 0$$

$$dS'_2 = -dS_2 \cos \alpha_2$$

Поток вектора напряжённости через элемент поверхности dS , если заряд находится вне объёма поверхности.

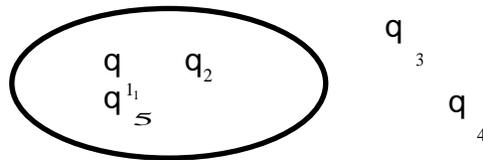
$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\Omega_0} d\Omega - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\Omega_0} d\Omega = 0$$

Электростатическая теорема Гаусса для точечного заряда

$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_0} \\ 0 \end{cases}$$

2. ЭТГ для системы зарядов и для непрерывно распределённого заряда.

Рассмотрим систему точечных зарядов и поверхность S произвольной формы, часть зарядов находится внутри объёма, а часть – снаружи объёма.



ЭТГ для системы точечных зарядов

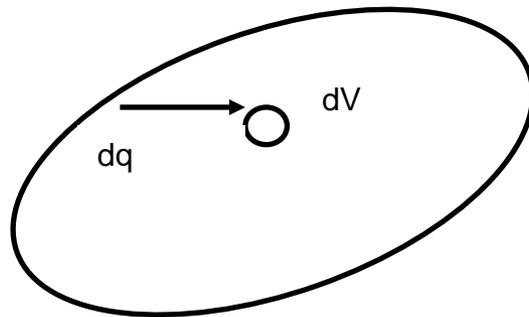
$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int_{(S)} \left(\sum_{k=1}^n \vec{E}_k \right) d\vec{S} = \sum_{k=1}^n \int_{(S)} \vec{E}_k d\vec{S} = \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

2. ЭТГ для системы зарядов и для

непрерывно распределённого заряда

Рассмотрим некоторую область объёмом V , в которой заряжённые частицы расположены настолько плотно, что можно говорить о непрерывном распределении заряда.



ЭТГ для непрерывно распределённого заряда.

$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int q = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(V)} \rho dV$$

3. Закон Кулона в дифференциальной форме.

$$N = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{(V)} \rho dV$$

$$\int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV$$

$$\int_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{[V]} \rho dV$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$