

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ЭКРАНИРОВАНИИ И РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В. А. Крутиков и А. А. Намивайко

Приведены результаты расчета функции спектральной плотности флуктуаций логарифма интенсивности для системы крупномасштабных неоднородностей в приближении статистического экранирования и численного моделирования восстановления функции распределения рассеивателей по размерам с достаточной для практики точностью.

При распространении света в системе крупномасштабных неоднородностей типа осадков, гидрозолей или искусственных рассеивающих сред параметр ka^2 ($k=2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения, a — размер отдельной неоднородности) становится больше, чем среднее расстояние между рассеивателями, и даже сравнимым с длиной рассеивающего слоя L . А это означает, что область возможного затенения рассеивателей охватывает весь рассеивающий объем, и здесь уже можно использовать законы геометрической оптики, связывающие структуру оптического излучения с геометрическими размерами неоднородностей. В случае, когда рассеиватели являются большими, т. е. $ka \gg 1$ и «оптически мягкими» ($k^2 \text{Re}V_0 \ll 1$, где V_0 — комплексный потенциал, описывающий свойства отдельного рассеивателя в волновом уравнении), использование приближения «прямых путей», включающего в себя модель «черных экранов», позволяет осуществить полное статистическое описание волнового поля и связанных с ним величин [1]. Причем в этом приближении статистика волнового поля наиболее просто связана с геометрическими параметрами рассеивателей: размером, формой, ориентацией в пространстве, поэтому его удобно использовать для постановки и решения обратных задач. Такой подход реализован в [2-6] для нахождения некоторых характеристик распределения рассеивающих частиц по размерам, а также для получения информации о форме рассеивателей.

В данном сообщении для восстановления закона распределения рассеивателей по размерам предлагается использовать выражения для функции спектральной плотности флуктуаций логарифма интенсивности, которые получены в [1].

Для рассеивающей среды, состоящей из сферических частиц с функцией распределения по размерам $p(a)$ и концентрацией n_0 в слое длины L , автокорреляционная функция флуктуации логарифма интенсивности имеет вид [1]

$$B_{\ln I}(\rho) = 2\pi n_0 \left(\frac{\text{Im} V_0}{k} \right)^2 L \int_0^\infty S\left(\frac{\rho}{2a}\right) H\left(a - \frac{\rho}{2}\right) a^4 p(a) da, \quad (1)$$

где

$$S(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \sqrt{1-t^2} - t^2 \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \ln \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 - \sqrt{1-t^2}}, \quad t \leq 1 \quad (2)$$

$$H(t) = 1, \quad t \geq 0, \quad H(t) = 0, \quad t < 0. \quad (3)$$

Переход к модели «экранов» [1], когда $\text{Im} V_0/k = \beta = \text{const}$ в области на плоскости, где проекция $V_0 \neq 0$, приводит к выражению $B_{\ln I}^{\circ}(\rho)$ для системы проекций сфер, т. е. кругов с распределением радиусов по закону $p(a)$

$$B(\rho) \equiv B_{\ln I}^{\circ}(\rho) = \pi n_0 L \beta^2 \int_0^\infty F\left(\frac{\rho}{2a}\right) H\left(a - \frac{\rho}{2}\right) a^2 p(a) da \quad (4)$$

с более простым ядром

$$F(t) = \frac{2}{\pi} [\arccos t - t\sqrt{1-t^2}] \approx 1 - 1.25t + 0.25t^4, \quad t \leq 1. \quad (5)$$

Следует отметить, что графики функций $F(t)$ и $S(t)$ очень близки, поэтому принципиального различия в обращении (1), (2) и (4), (5) нет и в дальнейшем будем использовать выражения, полученные в модели «экранов». Тем более что в этом приближении для автокорреляционной функции флуктуаций интенсивности выполняется соотношение

$$\ln [b_I(\rho) + 1] = \pi \left(\frac{1 - \exp(-\beta)}{\beta} \right)^2 B_{\ln I}^2(\rho), \quad (6)$$

где

$$b_I(\rho) = \frac{\langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle - \langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2}; \quad \rho = \rho_1 - \rho_2. \quad (7)$$

Экспериментально удобно измерять функцию спектральной плотности флуктуаций логарифма интенсивности, выражение для которой можно записать из (4) с учетом круговой симметрии автокорреляционной функции $B(\rho)$

$$\Phi(x) \equiv 2\pi \int_0^{\infty} B(\rho) \rho J_0(x\rho) d\rho = \pi^2 n_0 L \beta^2 \int_0^{\infty} \Lambda_1^2(xa) a^4 p(a) da, \quad (8)$$

где $\Lambda_1(t) = 2J_1(t)/t$, $J_0(t)$, $J_1(t)$ — функции Бесселя.

Использование модели «экранов» для решения обратной задачи в общем случае сводится к обращению уравнений типа выражений (4) и (8), т. е. к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с помощью некоторого метода регуляризации. При этом возможности получения сведений об искомой функции распределения частиц по размерам $p(a)$ определяются информацией, которая содержится в измеряемой статистической характеристике флуктуаций логарифма интенсивности, а это связано в свою очередь с гладкостью ядра исходного интегрального уравнения. В нашем случае при измерении автокорреляционной функции $B(\rho)$ ядром в соответствующем уравнении Фредгольма будет $F(\rho/2a)$, а для функции спектральной плотности $\Phi(x) = \Lambda_1^2(xa)$. Из сравнения аналитического вида функций $F(\rho/2a)$ и $\Lambda_1^2(xa)$ следует, что из-за наличия у $F(\rho/2a)$ при $\rho \neq 0$ участка $F(\rho/2a) = 0$ при $0 \leq a \leq \rho/2$ уравнение (4) является малоинформативным по сравнению с (8). Поэтому для обращения целесообразно использовать выражение для функции спектральной плотности $\Phi(x)$.

Выражение для автокорреляционной функции $B(\rho)$ именно из-за вида ядра $F(\rho/2a)$ и соотношений (6), (7) полезно для качественного экспресс-анализа рассеивающей среды. Из уравнения (4) следует

$$B(0) = B_0 \langle a^2 \rangle, \quad \left. \frac{d}{d\rho} B(\rho) \right|_{\rho=0} = -\frac{5}{8} B_0 \langle a \rangle. \quad (9)$$

Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по плотности распределения $p(a)$. Этих соотношений достаточно для определения параметров двухпараметрического распределения $p(a)$. Так, например, для гамма-распределения

$$p(a) = \frac{\mu^\alpha}{\Gamma(\alpha)} a^{\alpha-1} e^{-\mu a} \quad (10)$$

получится следующая система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \langle a \rangle &= \frac{\alpha}{\mu}, \\ \langle a^2 \rangle &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\mu^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

решение которой дает полное описание функции распределения частиц по размерам. Для упрощения записи введем обозначения $\langle a \rangle = A_1$, $\langle a^2 \rangle = A_2$; $\sigma_{A_1}^2$, $\sigma_{A_2}^2$ — дисперсии случайной погрешности при экспериментальном определении величин

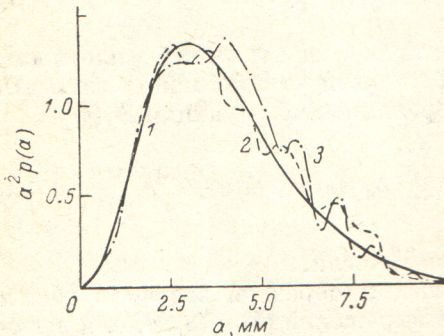
A_1 и A_2 . Тогда дисперсия случайной погрешности расчета параметров α и μ для гамма-распределения будет равна

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial A_1}\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial A_2}\right)^2 \sigma_{A_2}^2 = (\alpha + 1)^2 (4\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2), \\ \sigma_\mu^2 &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial A_1}\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial A_2}\right)^2 \sigma_{A_2}^2 = (2\alpha + 1)^2 \sigma_{A_1}^2 + (\alpha + 1)^2 \sigma_{A_2}^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для дождей обычно получается распределение Маршалла-Пальмера [7], т. е. гамма-распределение с параметрами $\alpha = 2$ и $\mu = 1$. В этом случае

$$\sigma_\alpha^2 = 36\sigma_{A_1}^2 + 9\sigma_{A_2}^2; \quad \sigma_\mu^2 = 25\sigma_{A_1}^2 + 9\sigma_{A_2}^2. \quad (13)$$

Для получения приближенного решения уравнения (8) относительно функции распределения рассеивателей по размерам $p(a)$ использовался метод регуляризации Тихонова [8]. Численное моделирование осуществлялось для одно- и двухвершинных законов распределения размеров рассеивателей, а восстановление проводилось с введенными в расчетную функцию спектральной плот-



Восстановленная функция распределения частиц по размерам.

1 — точное значение, 2 — с введённой погрешностью в 5 и 3 — 8%.

ности случайными погрешностями. На рисунке приведены результаты восстановления функции распределения рассеивателей по размерам $a^2 p(a)$ с относительными ошибками в узловых точках функции спектральной плотности в 0.5 и 8% и параметром регуляризации $\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$. При этом размер рассеивателей менялся в пределах $0 < a < 10$ мм, частота $\kappa : 0 < \kappa < 2$ мм⁻¹, а восстановление проводилось по 10 и 20 равномерно распределённым точкам. Из приведённых результатов следует, что выражение для функции спектральной плотности флуктуаций логарифма интенсивности, полученное в приближении «экранов», является достаточно информативным для восстановления функции распределения крупномасштабных рассеивателей по размерам.

Полученные выше результаты могут найти широкое использование при исследовании характеристик зернистости слоев фотоэмульсии люминофорных покрытий экранов кинескопов, импакторных фильтров и различного рода других статистических пятнистых структур [9-11].

Литература

- [1] А. Г. Боровой, В. А. Крутиков. *Опт. и спектр.*, 40, 728, 1976.
- [2] А. Г. Боровой, Б. В. Горячев, В. А. Крутиков, Б. А. Савельев. В сб.: *Вопросы лазерного зондирования атмосферы.* «Наука», Новосибирск, 1976.
- [3] К. С. Шифрин, Б. З. Мороз, А. Н. Сахаров. *ДАН СССР*, 199, 589, 1971.
- [4] А. Н. Сахаров, К. С. Шифрин. *Опт. и спектр.*, 39, 367, 1975.
- [5] М. В. Кабанов, В. А. Крутиков. *Изв. вузов, физика*, № 37, 1974.
- [6] А. Г. Воговоу, М. В. Кабанов, В. А. Saveliev. *Appl. Optics*, 14, 2731, 1975.
- [7] И. В. Литвинов. *Структура атмосферных осадков.* Гидрометеоиздат, Л., 1974.
- [8] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. *Методы решения некорректных задач.* «Наука», М., 1974.
- [9] Э. О. Нейл. *Введение в статистическую оптику.* «Мир», М., 1966.
- [10] S. A. Venton, R. E. Kroppner. *J. Opt. Soc. Am.*, 61, 524, 1971.
- [11] Е. А. Трабка. *J. Opt. Soc. Am.*, 61, 800, 1971.

Поступило в Редакцию 3 января 1979 г.
В окончательной редакции 29 апреля 1982 г.