

УДК 535.2.01

## ФИЗИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫЙ ПРИЕМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ РАДИАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Л. А. Луизова

С целью повышения устойчивости решения интегрального уравнения Абеля к шумам исходного профиля яркости  $b(x)$  рекомендуется заменить искомую функцию радиального распределения коэффициентов излучения  $\varepsilon(r)$  функцией  $E(r)$ , которая есть результат усреднения  $\varepsilon(r)$  по некоторому интервалу значений  $r$ , выбираемому в зависимости от информативности исходного профиля или от условий решаемой задачи. Приведена схема вычислительного алгоритма и пример его применения.

Переход от измеренного поперечного профиля яркости спектральной линии ( $b(x)$ ) к радиальному распределению коэффициентов излучения ( $\varepsilon(r)$ ), как известно, представляет собой типичный пример «некорректной» обратной задачи, для которой существует формальное математическое решение [1] (решение интегрального уравнения Абеля)

$$\varepsilon(r) = -\frac{1}{\pi} \int_x^r \frac{db}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad (1)$$

но практически воспользоваться формулой (1) нельзя, т. к. функция  $b(x)$  известна с точностью до погрешностей эксперимента.

Обширная литература [2-7] посвящена приемам статистической регуляризации решения этой задачи. Регуляризация заключается в том, что мы отказываемся от нахождения точного вида  $\varepsilon(r)$  и ищем приближенное решение в некотором ограниченном классе функций.

Различные известные сейчас приемы радиальных преобразований по существу отличаются друг от друга способом задания класса допустимых решений и вытекающими отсюда более или менее сложными вычислительными приемами. При этом ограничения, накладываемые на допустимые решения, во всех ранее описанных алгоритмах имеют такую математическую форму, что связать их с условиями конкретного физического эксперимента сложно или вообще невозможно. Если еще можно хотя бы качественно интерпретировать требование «наибольшей допустимой гладкости» решения [2], то для аппроксимации  $\varepsilon(r)$  полиномом, экспонентной или другой функцией специального вида [4, 5, 7] нет никаких физических оснований.

Единственно физически «естественное» требование неотрицательности решения [2] используется лишь как дополнительное условие в совокупности с другими «регуляризирующими» ограничениями, имеющими сугубо математический характер.

В другой некорректной спектроскопической задаче-редукции спектра к идеальному прибору предложен физически наглядный прием регуляризации, суть которого заключается в том, что вместо «истинного» вида спектра находится спектр, как бы зарегистрированный прибором, обладающим конечным разрешением и заданной аппаратной функцией [9].

Цель данной статьи показать, что и в случае радиального преобразования возможна регуляризация решения, т. е. повышение его устойчивости к шумам исходной функции  $b(x)$ , путем некоторого изменения постановки задачи, есте-

ственно вытекающего из ее физического смысла и условий реального эксперимента.

Суть предлагаемого изменения состоит в том, что ввиду практической невозможности отыскания функции  $\varepsilon(r)$  следует искать другую функцию  $E(r)$ , которая представляет собой усреднение неизвестной функции  $\varepsilon(r)$  по некоторому конечному пространственному интервалу  $2\Delta$ , т. е.

$$E(r) = \frac{1}{2\Delta} \int_{r-\Delta}^{r+\Delta} \varepsilon(\rho) d\rho. \quad (2)$$

Очевидно, чем больше информации собрано в эксперименте, т. е. чем меньше уровень шумов исходных данных, тем уже может быть сделан интервал усреднения  $2\Delta$ . Ниже излагается и иллюстрируется примером конкретный вычислительный алгоритм нахождения функции  $E(r)$ .

Преобразуем (2) с использованием (1)

$$E(r) = -\frac{1}{2\pi\Delta} \int_{r-\Delta}^{r+\Delta} d\rho \int_{\rho}^R \frac{b'(x) dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}. \quad (3)$$

Область интегрирования в (3) имеет вид трапеции, ограниченной прямыми  $x=\rho$ ,  $x=R$ ,  $\rho=r\pm\Delta$ . Разбивая эту область на треугольник ( $x=\rho$ ,  $\rho=r\pm\Delta$ ) и прямоугольник ( $x=R$ ,  $x=r\pm\Delta$ ,  $\rho=r\pm\Delta$ ) и изменяя в двойных интегралах порядок интегрирования, получим

$$E(r) = -\frac{1}{2\pi\Delta} \left\{ \int_{r-\Delta}^{r+\Delta} b'(x) dx \int_{r-\Delta}^x \frac{d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} + \int_{r+\Delta}^R b'(x) dx \int_{r-\Delta}^{r+\Delta} \frac{d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \right\}. \quad (4)$$

Выполняя интегрирование по  $\rho$ , а затем по  $x$  (по частям), имеем

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\Delta} \left\{ \int_{r-\Delta}^R \frac{b(x)(r-\Delta) dx}{x\sqrt{x^2 - (r-\Delta)^2}} - \int_{r+\Delta}^R \frac{b(x)(r+\Delta) dx}{x\sqrt{x^2 - (r+\Delta)^2}} \right\}. \quad (5)$$

В этих интегралах перейдем к новым переменным: в первом положим  $t = (r-\Delta)/x$  (считая пока, что  $r-\Delta > 0$ ) во втором —  $t = (r+\Delta)/x$ . Тогда

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\Delta} \left\{ \int_{\frac{r-\Delta}{R}}^1 \frac{b_1(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_{\frac{r+\Delta}{R}}^1 \frac{b_2(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} \right\}, \quad (6)$$

где

$$b_1 = b\left(\frac{r-\Delta}{t}\right), \quad b_2 = b\left(\frac{r+\Delta}{t}\right).$$

Обратим внимание на то, что в первом интеграле при  $t \leq (r-\Delta)/R$  и во втором при  $t \leq (r+\Delta)/R$  подинтегральная функция обращается в 0, так как  $R$  — радиус границы источника и поэтому  $b(x) = 0$  при  $x \geq R$ . Это позволяет распространить нижний предел интегрирования в (6) до  $t=0$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^1 \frac{b_1(t) - b_2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (7)$$

Применяя для вычисления интеграла (7) квадратурную формулу Гаусса—Чебышева [8]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i), \quad (8)$$

где

$$t_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

и учитывая четность функции  $b(t)$  имеем при четном  $n$

$$E(r) = \frac{1}{2\Delta n} \sum_{i=1}^n \left[ b\left(\frac{r-\Delta}{t_i}\right) - b\left(\frac{r+\Delta}{t_i}\right) \right] \quad (10)$$

для  $r-\Delta > 0$ .

Таким образом, вычисление  $E(r)$  сводится к суммированию отсчетов  $b(x)$ , взятых в точках  $x$ , отстоящих друг от друга на расстояниях, определяемых интервалом усреднения  $2\Delta$ .

Случай  $r-\Delta < 0$  требует отдельного рассмотрения, так как при этом точка  $x=0$ , входящая в область интегрирования в (5) при замене переменных отображается в  $t=\infty$ .

Воспользуемся четностью  $b(x)$  и  $\varepsilon(\rho)$  и разобьем интеграл в (2) на две части

$$\int_{r-\Delta}^{r+\Delta} \varepsilon(\rho) d\rho = \int_0^{r+\Delta} \varepsilon(\rho) d\rho + \int_0^{\Delta-r} \varepsilon(\rho) d\rho. \quad (11)$$

Вычисление интегралов типа  $\int_0^a \varepsilon(\rho) d\rho$  проведем аналогично формулам (4)–(10).

Тогда получим

$$E(r) = \frac{b(0)}{2\Delta} - \frac{1}{2\Delta n} \sum_{i=1}^{n/2} \left[ b\left(\frac{\Delta-r}{t_i}\right) + b\left(\frac{\Delta+r}{t_i}\right) \right] \quad (12)$$

при  $r-\Delta \leq 0$ .

В частности

$$E(0) = \frac{0.5b(0)}{\Delta} - \frac{1}{n\Delta} \sum_{i=1}^{n/2} b\left(\frac{\Delta}{t_i}\right). \quad (13)$$

Итак, вычисление  $E(r)$  сводится к следующим этапам:

1. По заданному  $n$  находится массив  $t_i$  согласно формуле (9).
2. Для интересующих нас точек  $r$  находим массивы  $x_{1,i} = (r-\Delta)/t_i$ ,  $x_{2,i} = (r+\Delta)/t_i$ .
3. Находим значения экспериментальной функции  $b(x)$  в точках  $x_{1,i}$ ,  $x_{2,i}$  и суммируем их разности, вычисляя  $E(r)$  согласно (10) или (12), (13).

Как правило, экспериментальная функция  $b(x)$  известна в ряде дискретных точек. Было бы естественно «сгладить» методом наименьших квадратов функцию  $b(x)$  по числу точек, соответствующих интервалу пространственного разрешения экспериментальной установки. Это внесло бы дополнительную регуляризацию в решение. Однако, для того чтобы выделить эффект регуляризации только за счет усреднения по  $r$ , мы применили обычную параболическую интерполяцию функции  $b(x)$  по трем ближайшим к  $x$  точкам, в которых имеются экспериментальные отсчеты [8, 10].

Алгоритм реализован на языке Фортран IV на машине ЕС-10-22. Для проверки алгоритма и оценки устойчивости решения к шумам исходной функции  $b(x)$  проделан машинный эксперимент по следующей схеме:

1. По заданному распределению  $\varepsilon(r)$  профиль  $\bar{b}(x)$  определен непосредственным вычислением интеграла

$$\bar{b}(x) = 2 \int_x^R \frac{\varepsilon(r) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \quad (14)$$

2. На значения  $\bar{b}(x)$  в дискретных точках  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) наброшена нормально распределенная случайная ошибка с дисперсией  $S_j^2$ .

3. Полученный массив  $b(x_j)$  преобразован согласно описанному алгоритму при определенных значениях  $n$  и  $\Delta$  в массив  $E(r_j)$ .

4. Усреднены по  $k$  реализациям  $b(x_j)$  элементы соответствующих массивов  $E(r_j)$ , найдены усредненные значения

$$\bar{E}(r_j) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i(r_j) \quad (15)$$

и оценки дисперсии  $E(r_j)$

$$S_E^2 = \sum_{i=1}^k \frac{[E_i(r_j) - \bar{E}(r_j)]^2}{k-1}. \quad (16)$$

5. Значения  $\bar{E}(r_j)$  сравнены с заданным «истинным» распределением  $\varepsilon(r)$ , а оценка дисперсии  $S_E^2$  сравнивалась с заданной дисперсией  $S_b^2$  исходных

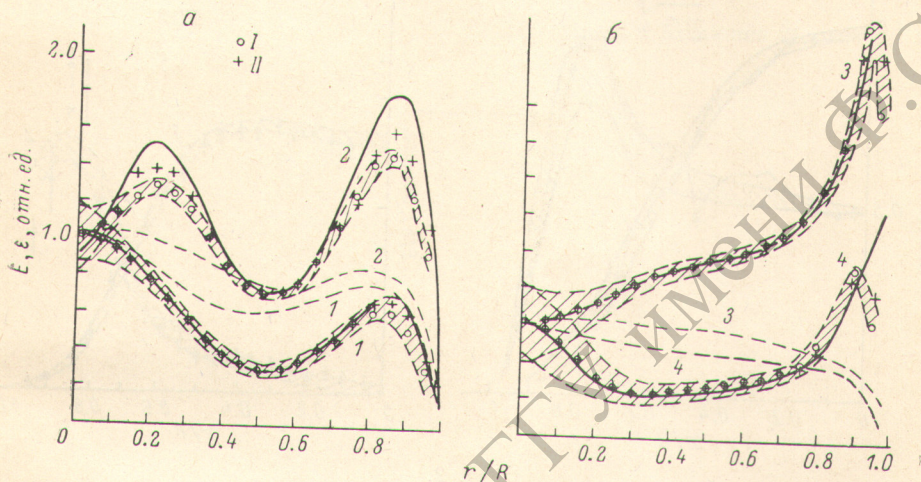


Рис. 1. Результат машинного эксперимента.

Сплошные кривые —  $\varepsilon(r)$ , штриховые —  $b(x)$ , I —  $E(r)$  при  $\Delta/h = 0.1$ , II —  $E(r)$  при  $\Delta/R = 0.05$  ( $\sqrt{S_b^2} = 0.02$ ,  $k = 10$ ), заштрихованная область  $E \pm \sqrt{S_E^2}$  при  $\Delta/R = 0.1$  ( $\sqrt{S_b^2} = 0.1$ ,  $k = 10$ ). а —  $\varepsilon(r) = 1 - 10r^6 + 15r^4 - 6r^2 + Ae^{-30}$ ,  $A = 0$  кривые 1,  $A = -0.6$  кривые 2. б —  $\varepsilon(r) = 1 + 8r^6 - 8r^4 + 3r^2 + Be^{-30}$ .  $B = 0$  кривые 3,  $B = 1$  кривые 4.

значений  $b(x)$ . Машинный эксперимент проделан при  $N=50$ ,  $k=10$ ,  $x_j = R(j-1)/N$  для четырех видов распределений  $\varepsilon(r)$  (см. рис. 1), различных значений  $S_b^2$  ( $\sqrt{S_b^2} = 0.02, 0.1, 0.2$ ,  $b(0)=1$ ) и различных  $\Delta$  (см. таблицу и рис. 1).

Отношения среднеквадратичного отклонения значений  $E(r_j)$  к заданному отклонению исходных значений  $b(x)$  ( $\sqrt{S_E^2}/\sqrt{S_b^2}$ )

$\frac{\Delta}{R}$	$r_j/R$					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
0.2	$1.3 \pm 0.2$	$0.5 \pm 0.1$	$0.28 \pm 0.03$	$0.26 \pm 0.02$	$0.45 \pm 0.04$	$0.5 \pm 0.1$
0.1	$4 \pm 1$	$0.9 \pm 0.1$	$0.33 \pm 0.05$	$0.4 \pm 0.1$	$0.5 \pm 0.1$	$0.8 \pm 0.1$
0.05	$8 \pm 1$	$1.6 \pm 0.3$	$1.2 \pm 0.2$	$0.9 \pm 0.2$	$0.9 \pm 0.1$	$0.9 \pm 0.1$

Как и следует ожидать, при низком уровне шумов  $b(x)$  совпадение  $\bar{E}(r)$  и  $\varepsilon(r)$  улучшается с уменьшением  $\Delta$ . Что касается выбора  $n$ , то при данном  $n$

точность решения сначала растет с ростом  $n$ , а затем практически перестает зависеть от  $n$ , так что более детально вопрос выбора  $n$  следует изучать, если возникает проблема минимизации времени расчета. (В существующем варианте программы радиальное преобразование 10 профилей  $b(x)$  с вычислением  $b$  и  $\bar{E}(r)$ ,  $S_b^2$ ,  $S_E^2$  при  $N=50$ ,  $n=100$  занимает около 40 с). Все приводимые результаты получены при  $n=100$ .

Устойчивость решения к шумам  $b(x)$  характеризуется таблицей, в которой приведены отношения  $\sqrt{S_E^2}/\sqrt{S_b^2}$ , усредненные по трем значениям  $S_b^2$  и четырем вариантам вида  $\varepsilon(r)$ . Как видно из таблицы, эффект умножения ошибок носит довольно стабильный характер и определяется величиной интервала усреднения  $\Delta$  и координатой  $r$ . Значительное увеличение ошибок для малых  $r$  наблюдается и при других способах радиальных преобразований [12]. Предлагаемый алгоритм позволяет использовать на разных участках кривой  $\varepsilon(r)$  различ-

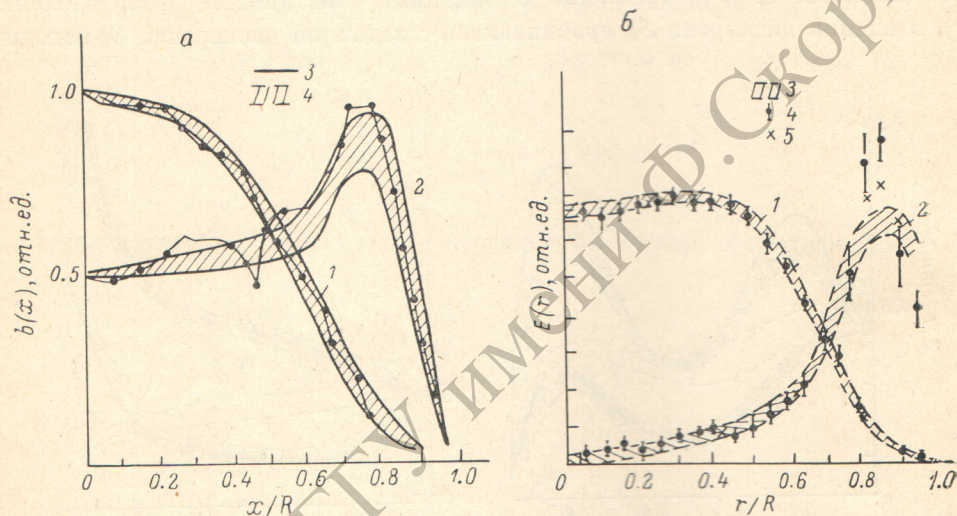


Рис. 2.

а — поперечные профили яркости спектральных линий  $b(x)$ . 1 — криптон,  $\lambda=785.4$  нм, 2 — рубидий,  $\lambda=740.8$  нм, 3 — одна реализация, 4 —  $b \pm \sqrt{S_b^2}$ . б — радиальное распределение коэффициентов излучения для тех же линий соответственно. 3 —  $E(r)$  при  $\Delta=0.1R$  ( $E \pm \sqrt{S_E^2}$ ), 4 —  $E(r) \pm \sqrt{S_E^2}$  для  $\Delta=0.05R$ , 5 —  $\varepsilon(r)$ , найденное методом [7].

ные интервалы  $\Delta$  и получить высокую устойчивость решения к шумам  $b(x)$  для всех  $r$ , если удовлетвориться для участков кривой  $\varepsilon(r)$  вблизи  $r=0$  большим интервалом усреднения, чем для остальной части кривой.

Рис. 2 иллюстрирует применение алгоритма к обработке экспериментальных профилей яркости спектральных линий криптона и рубидия в высокочастотных безэлектродных спектральных лампах. На рисунке представлено по одной реализации  $b(x)$  и «коридоры» ошибок для  $E(r)$  и  $b(x)$  [ $\bar{E} \pm \sqrt{S_E^2}$ ,  $b \pm \sqrt{S_b^2}$ ] (все  $b(x)$  нормированы на значение  $b(0)$ , усреднение велось по  $k=10$  реализациям,  $N=25$ ,  $n=100$ ).

Использование предлагаемого алгоритма позволяет экспериментатору, задавшись определенным уровнем «умножения ошибок», выбрать интервал  $2\Delta$  усреднения функции  $\varepsilon(r)$ . Полученный при этом результат согласно (2) имеет четкий и наглядный физический смысл. Наоборот, если требуемое значение  $2\Delta$  задается физическими условиями решаемой задачи, следует добиваться соответствующей точности в измерении  $b(x)$ . Очевидно, что и в других физических задачах, сводящихся к интегральному уравнению Абеля [11], также легко интерпретируется физический смысл решения, полученного согласно формуле (2).

Автор благодарит Н. Д. Гогина за полезные обсуждения.

## Л и т е р а т у р а

- [1] Г. Грим. Спектроскопия плазмы. Атомиздат, М., 1969.
- [2] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. «Наука», М., 1979.
- [3] Иверсия Абеля и ее обобщение. Сборн. под ред. Н. Г. Преображенского. Новосибирск, 1978.
- [4] K. K h o s c h e, K. D e i t r i c h. Beitr. Plasmaphys., 7, 229, 1967.
- [5] Л. Т. Ларькина. В сб.: Применение плазмотронов в спектроскопии. «Илим», Фрунзе, 1970.
- [6] Е. Л. Косарев. Ж. вычислительной математики и математической физики, 13, 1591, 1973.
- [7] Н. Г. Колесников, Л. Т. Ларькина, Д. С. Энгельшт. Изв. АН Киргизской ССР, Деп. № 313—75, Фрунзе, 1975.
- [8] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. «Наука», М., 1977.
- [9] А. П. Кучеров. Ж. прикл. спектр., 32, 137, 1980.
- [10] Математическое обеспечение ЕС-ЭВМ, вып. 11, Минск, 1976.
- [11] Э. С. Парилис, В. Х. Ферлегер. ЖТФ, 44, 2221, 1974.
- [12] Л. Т. Ларькина, В. С. Энгельшт. В сб. Свойства низкотемпературной плазмы и методы ее диагностики. Под ред. Ф. М. Жукова. «Наука», Новосибирск, 1977.

Поступило в Редакцию 21 октября 1980 г.