

ТРЕХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА В АСИМПТОТИЧЕСКИ СИЛЬНОМ ПОЛЕ

И. В. Лебедев

В последние годы появился ряд работ, трактующих действие на двухуровневые системы интенсивного излучения без использования обычной теории возмущений [1]. Ниже исследуется в общем виде поведение трехуровневой системы в линейно-поляризованном поле такой интенсивности, что энергия взаимодействия с ним существенно превосходит все остальные параметры той же размерности. (Частный случай разобран в работе [2]). Используется методика, примененная автором для двухуровневой системы [3]. Система уравнений записывается так

$$\left. \begin{aligned} i\dot{a} &= a\omega_a + bW_1 \cos \omega t, \\ i\dot{b} &= b\omega_b + aW_1 \cos \omega t + cW_2 \cos \omega t, \\ i\dot{c} &= c\omega_c + bW_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ω — частота падающего когерентного излучения, W_1 и W_2 — матричные элементы взаимодействия для переходов ab и bc ; матричный элемент перехода между состояниями a и c равен нулю по соображениям четности. Удобно привести систему (1) к такому виду, когда члены $c \cos \omega t$ стоят на диагонали. Приведение осуществляется заменой переменных

$$\begin{aligned} A' &= \frac{W_2}{W} a - \frac{W_1}{W} c, \quad B' = \frac{W_1}{W\sqrt{2}} a + \frac{1}{\sqrt{2}} b + \frac{W_2}{W\sqrt{2}} c, \\ D' &= \frac{W_1}{W\sqrt{2}} a - \frac{1}{\sqrt{2}} b + \frac{W_2}{W\sqrt{2}} c, \quad W \equiv \sqrt{W_1^2 + W_2^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Сместим начало координат ω_k в точку $\omega_0 = \frac{1}{2W^2} (W_1^2\omega_a + W_2^2\omega_c + W^2\omega_b)$. Приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} i\dot{A}' &= dA' + d_1B' + d_1D', \\ i\dot{B}' &= d_1A' + B'W \cos \omega t + d_2D', \\ i\dot{D}' &= d_1A' + d_2B' - D'W \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d &\equiv \frac{1}{2W^2} [W_1^2(2\omega_c - \omega_a - \omega_b) + W_2^2(2\omega_a - \omega_b - \omega_c)], \\ d_1 &\equiv \frac{W_1W_2}{\sqrt{2}W^2} (\omega_a - \omega_c); \quad d_2 \equiv \frac{1}{2W^2} (W_1^2\omega_a + W_2^2\omega_c - W^2\omega_b). \end{aligned}$$

При полном или частичном вырождении система упрощается. Если $\omega_a = \omega_b = \omega_c$ ($d_1 = d_2 = 0$), решение находится элементарно

$$A' = e^{-idt}, \quad B' = e^{-\frac{iW}{\omega} \sin \omega t}, \quad D' = e^{\frac{iW}{\omega} \sin \omega t}. \quad (4)$$

При $\omega_a = \omega_c$ ($d_1 = 0$) уравнение для A' отделяется; B' и D' подчиняются уравнениям, описывающим двухуровневую систему в сильном поле. То же происходит, если $W_1 = 0$ или $W_2 = 0$ ($d_1 = 0$). В целях простоты записи в дальнейшем все энергетические параметры будем измерять в единицах ω . Используем решения (4) в качестве нулевого приближения, перейдя к новым переменным

$$A' = Ae^{-idt}, \quad B' = Be^{-iW \sin t}, \quad D' = De^{iW \sin t}. \quad (5)$$

Сделаем преобразование Фурье ($A(t) \rightarrow A(j)$ и т. п.), полагая $A(t) = 1|_{t=0}$. Разлагая экспоненту от синуса по функциям Бесселя J_n , найдем

$$-i + jA(j) = d_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(W) B(j-d+n) + d_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(W) D(j-d-m),$$

$$jB(j) = d_1 \sum_p J_p(W) A(j+d-p) + d_2 \sum_q J_q(2W) D(j-q),$$

$$jD(j) = d_1 \sum_r J_r(W) A(j+d+r) + d_2 \sum_s J_s(2W) B(j+s). \quad (6)$$

Полученные уравнения напоминают обычную трехуровневую систему в двух резонансных полях, но в качестве взаимодействия выступают величины $d_1 \sum_n J_n(W)$ и $d_2 \sum_s J_s(2W)$, поэтому возможно излучение или поглощение произвольного числа квантов в низшем порядке по возмущению. Выражая B через D и оставляя только диагональные члены в B , имеем

$$B(j) = \frac{d_1 \sum_p J_p(W) A(j+d-p) + d_1 d_2 \sum_{q,r} J_q(2W) J_r(W) \frac{A(j-d+r-q)}{j-q}}{j - d_2^2 \sum_q \frac{J_q^2(2W)}{j-q}}. \quad (7)$$

Законность сохранения только диагональных членов основана на предположении о малости возмущений $d_1 \sum_n J_n(W)$ и $d_2 \sum_s J_s(2W)$, причем эти последние могут быть малы как при $d_1 \sim d_2 \sim 1$ вследствие малости ряда по J_n при больших аргументах ($W \gg 1$) [3], так и для системы, близкой к вырожденной ($d_1 \ll 1, d_2 \ll 1$) при произвольных не обязательно больших W . Поэтому в целях наибольшей общности не будем подставлять асимптотические значения J_n . Используемое приближение состоит в учете низшего порядка по каждому из возмущений в массовом операторе соответствующего уравнения Дайсона. Достаточно рассмотреть поведение корней только в одной зоне Бриллюэна, поэтому можно полагать $j < 1/2$. При этом в знаменателе из всей суммы сохранится только нулевой член. В приложении показано, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(W)}{j-n} = \frac{\pi}{\sin \pi j} J_{-j}(W) J_j(W) \approx j \frac{\pi^2}{6} J_0^2(W) + \frac{J_0^2(W)}{j}. \quad (8)$$

Поэтому при $j < 1/2$ первый член в правой части мал по сравнению с j , и им можно пренебречь. Делая подстановку $D \rightarrow B \rightarrow A$ и $B \rightarrow D \rightarrow A$, смещая начало координат по j в точку $j_0 = -d$, имеем

$$A(j) = i \left[j + d - 2d_1^2 \sum_n \frac{(j+n) J_n(W)}{(j+n)^2 - d_2^2 J_0^2(2W)} \left(J_n(W) + d_2 \sum_r \frac{J_r(2W) J_{n+2}(2W)}{j-r} \right) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Нетрудно понять смысл каждого слагаемого. Член с $J_n^2(W)$ соответствует n -фотонным переходам $A \rightarrow B \rightarrow A$, причем в состоянии B уже учтены переходы $B \rightarrow D \rightarrow B$ (член $d_2^2 J_0^2(2W)$ в знаменателе). Более необычно последнее слагаемое, описывающее переходы $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$. В обычной трехуровневой системе таких переходов нет из соображений четности. В квантовой электродинамике такие переходы описываются треугольными диаграммами, вклад которых зануляется вследствие теоремы Фарри. В нашем варианте четности вершинных частей таковы, что при замене направления обхода ($A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$) на обратное ($A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$) амплитуды не сокращаются, а удваиваются. Упростим A тем же способом, что ранее B . Рассмотрим сумму

$$\sum_n \frac{(j+n) J_n^2(W)}{(j+n)^2 - d_2^2 J_0^2(2W)} = \frac{\pi [J_{j+d_2 J_0(2W)}(W) J_{-j+d_2 J_0(2W)}(W)]}{\sin(\pi j \pm \pi d_2 J_0(2W))} \approx \frac{j J_0^2(W)}{j^2 - d_2^2 J_0^2(2W)}. \quad (10)$$

Снова использовались условия $d_2 J_0(2W) \ll 1$ и $j < 1/2$. В последнем члене в знаменателе выражения (9) также ограничимся $n=r=0$. Исследуем уравнение, корни которого дают квазиэнергии

$$j + d - \frac{2d_1^2 J_0^2(W) (j + d_2 J_0(2W))}{j^2 - d_2^2 J_0^2(2W)} = 0. \quad (11)$$

В случае эквидистантной системы ($\omega_{cb} = \omega_{ab}$) с одинаковым взаимодействием ($W_1 = W_2$) имеем $d = d_2 = 0$; при этом $j_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \omega_{ca} J_0(W)$, $j_3 = 0$. Вычет в полюсе j_3 пренебрежимо мал, и его можно не учитывать. Тем самым расщепление в трехуровневой системе abc с нулевым матричным элементом W_{ac} оказывается таким же [3], как в двухуровневой системе ac с эффективным матричным элементом взаимодействия $W_{ac} = W_{ab}/\sqrt{2}$. Общее решение также находится достаточно просто

$$j_{1,2} = \frac{d - d_2 J_0(2W)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d - d_2 J_0(2W)}{2}\right)^2 + d_1^2 J_0^2(W)}; \quad j_3 = -d_2 J_0(2W).$$

Как и раньше вычет в полюсе j_3 мал. Тем не менее, отбрасывать его сразу, сокращая числитель и знаменатель в уравнении (11) не следует, поскольку система трех линейных уравнений первого порядка должна иметь три независимых решения. Корень j_3 может оказаться существенным при других условиях включения или учета большего числа членов в суммах по J_n . При $W \rightarrow \infty$, $j_1 \rightarrow d$; $j_2 \rightarrow 0$. В отличие от двухуровневой системы, где происходит сближение уровней в сильном поле, трехуровневая система обладает таким свойством только при $d=0$, т. е.

$$\frac{\omega_{ba} + \omega_{ca}}{W_1^2} = \frac{\omega_{ca} + \omega_{cb}}{W_2^2}.$$

В силу сделанного предположения что $j < 1/2$ видно также, что найденные решения справедливы при $d < 1/2$, т. е. для $\frac{W_1^2}{W^2}(\omega_{ca} + \omega_{cb}) + \frac{W_2^2}{W^2}(\omega_{ab} + \omega_{ac}) < 1$. При $W_1 = W_2$ условие сводится к $\omega_{cb} + \omega_{ab} < 2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценим встречающийся в тексте ряд $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(W)/(j-n)$. Используя представление J_n^2 через J_{2n} , имеем

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_n \frac{J_{2n}(2W \cos z) dz}{2(j-n)} = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\pi} dz \int_0^{\infty} dx e^{-2ijx} (e^{2iW \cos z \sin x} + e^{-2iW \cos z \sin x}).$$

Интегрируя по z , используя четность J_0 и периодичность \sin , получим

$$S = 2i \int_0^{\infty} dx e^{-2ijx} J_0(2W \sin x) = \frac{2}{1 - e^{-2\pi ij}} \int_0^{\pi} J_0(2W \sin x) e^{-2ijx} dx = \frac{\pi}{\sin j\pi} J_j(W) J_{-j}(W).$$

Использовались формулы 6.519 и 3.753 из [4]. Оценим S при $W \gg 1$.

$$J_j(W) J_{-j}(W) = \frac{1}{j} \sum_k \frac{(-1)^k (W/2)^{2k} (2k)!}{k! [k^2 - j^2] [(k-1)^2 - j^2] [(k-2)^2 - j^2] \dots \Gamma(j) \Gamma(1-j)},$$

$$\Gamma(j) \Gamma(1-j) = \frac{\pi}{\sin j\pi}, \text{ поэтому } S = \frac{J_0^2(W)}{j} \approx j \sum_k \frac{(-1)^k (W/2)^{2k} (2k)!}{(k!)^3} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2} + \dots + \frac{1}{1} \right].$$

При $W \gg 1$, $k \gg 1$ сумма в квадратной скобке стремится к $\pi^2/6$.

$$S \approx \frac{J_0^2(W)}{j} + j \frac{\pi^2}{6} J_0^2(W).$$

Литература

- [4] A. G. Fainshtein, N. L. Manakov, L. P. Rapoport. J. Phys. B, 11, 2564, 1978; Б. А. Маломед. ДАН СССР, 247, 1128, 1979; В. П. Крайнов, В. П. Яковлев. ЖЭТФ, 78, 2204, 1980; П. А. Браун, Г. П. Мирошниченко. Опт. и спектр., 49, 1024, 1980.

[2] К. Х. Симонян. Изв. АН Арм. ССР, физика, 14, 10, 1980.

[3] И. В. Лебедев. Опт. и спектр., 49, 239, 1980.

[4] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.

Поступило в Редакцию 3 апреля 1981 г.

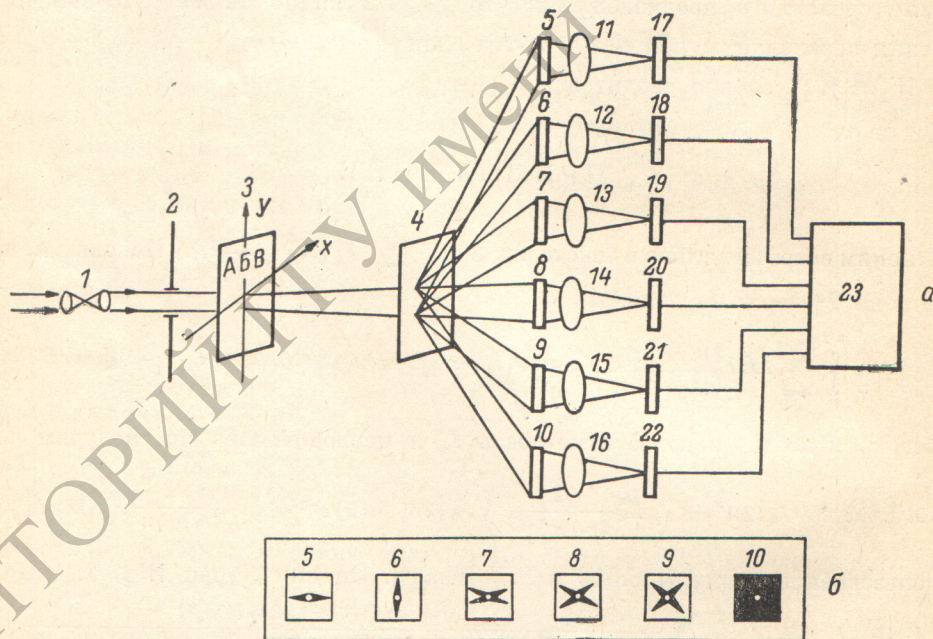
УДК 535.317.1

ОБОБЩЕННАЯ ОПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ПЕЧАТНЫХ БУКВ

М. Г. Илиева, Г. Г. Минчев и Х. Н. Пехливанов

Для целей распознавания двумерных изображений используется усреднение объектов по их пространственным спектрам [1].

В настоящей работе предлагается использование обобщенной пространственной фильтрации, при которой выделяются не определенные частоты, а информативные области из частотного спектра исследуемого объекта, соответствующих спецификам в их контурах [2]. Для определения размеров областей оцени-



а — блок-схема экспериментальной установки, б — вид амплитудных фильтров.

вается распределение пространственных компонентов по значениям спектра мощности и для каждого объекта получается описание самой информативной области пространственного спектра объекта. По этим областям графоаналитическим методом моделируются обобщенные оптические амплитудные фильтры. Размеры областей выбраны так, чтобы обеспечить инвариантность фильтрующей системы относительно поворота входного объекта в пределах $\pm 10^\circ$, изменения в масштабе 30% и перерывания в его контуре. Параллельная работа этих оптических фильтров в частотной плоскости объекта обеспечивается использованием голографической дифракционной мультиплицирующей решетки. Отфильтрованные сигналы в реальном времени обрабатываются логическим блоком с целью принятия оптимального решения и идентификации.

Эксперименты проведены на опытной установке, блок-схема которой показана на рисунке, а. Объекты (негативные изображения печатных букв) освещены