С. В. Киргинцева
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. В. Можаровский**, д-р техн. наук, профессор

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОКРЫТИЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Введение и постановка задачи

Для успешного развития многих отраслей машиностроения необходимо проводить фундаментальные исследования в области создания новых конструкционных материалов на основе современных технологий. Одним из наиболее перспективных путей решения указанной проблемы является создание материалов с модифицированными поверхностными слоями, обладающими повышенными физико-механическими свойствами и стойкостью к разрушению в процессе фрикционного взаимодействия, работающих в сложных эксплуатационных условиях. При этом требуется создавать современные математические модели и методики расчета тел качения и скольжения применительно к процессам фрикционного взаимодействия материалов. Так, при исследовании контактного взаимодействия упругих тел возникает необходимость создавать новые методики расчета прочности элементов деталей машин, например, износа зубьев зубчатых колес. В связи с этим разрабатываются новые математические модели и компьютерные программы расчета напряжений при контакте индентора с упругим телом (или покрытием) при их взаимодействии.

Для расчета перемещений на поверхности упругих покрытий на упругом основании требуется создание сложных решений с помощью интегральных преобразований, например, Ханкеля и расчет с помощью функций Бесселя (см., например, [1, 2] и др.). Естественно, требуется создавать более простые решения и достаточно эффективные. Так, например, в работе [3] представлено решение определения перемещений поверхности покрытия (слоя) при вдавливании жесткой сферы в упругое покрытие на упругом основании. Суть метода заключается в том, что для приближенного решения данной задачи использовалась фундаментальная задача о действии нормальной сосредоточенной силы P на упругое полупространство, т.е. применяется так называемая задача Буссинеска. Интеграл, с помощью которого определяется перемещение в полупространстве, разбивается на два интеграла, изменяющиеся в диапазоне от поверхности до толщины покрытия [0, h] с упругими свойствами E_n, ν_n и от толщины покрытия до бесконечности в полупространстве [h, ∞] с упругими свойствами E_o, ν_o, где E, ν – модули упругости и коэффициенты Пуассона покрытия и основания соответственно. Такой подход приближенный, но значительно облегчает расчет перемещений с учетом упругости материалов с изменяющимися модулями упругости основания и покрытия и в тоже время, дает достаточно точные результаты, что подтверждается исследованиями работы [3] и графическими иллюстрациями в этой же работе, а также численными решениями по методу конечных элементов.

Таким образом, возникает следующая **постановка задачи**: для комплексного расчета перемещений упругих покрытий на упругом основании требуется расширить применяемую математическую модель расчета, используя классические задачи о действии нормальных и касательных сосредоточенных сил (*P* и *Q*), т.е. задачи Буссинеска и задачи Черутти. Вследствие этого подхода можно учесть силу трения при контакте жесткого индентора с упругим покрытием, считая, что касательная сила $Q = \mu P$, μ – коэффициент трения. На рисунке 1 показано схема о действиях нормальной и касательной сил на покрытие.

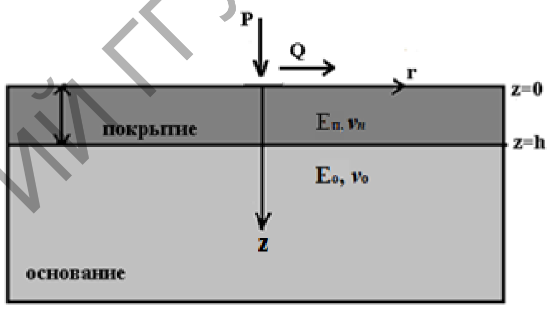

Рисунок 1 – Действие нормальной и касательной сил на покрытие

Методика расчета перемещений в упругом покрытии при действии нормальных и касательных сил

Действие нормальных усилий

Используя решение задачи Буссинеска [2], можно записать выражение для производной осевого перемещения w_1 по отношению к z (осевая деформация в декартовой системе координат *xyz,* $\rho^2 = r^2 + z^2$.)

$$\frac{\partial w_1}{\partial z}=\frac{P(1+\nu)}{2\pi E}\left[3r^2z\left(r^2+z^2\right)^{-5/2}-(3-2\nu)z\left(r^2+z^2\right)^{-3/2}\right] \qquad (1)$$

Перемещение поверхности при действии нормальной нагрузки можно получить путем интегрирования (1) формулы, такие, что

$$w_1=\frac{P}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\int\limits_{\infty}^{d}\frac{(1+\nu_o)}{E_o}\left[3r^2z\left(r^2+z^2\right)^{-5/2}-(3-2\nu_o)z\left(r^2+z^2\right)^{-3/2}\right]dz+\\+\int\limits_{d}^{0}\frac{(1+\nu_n)}{E_n}\left[3r^2z\left(r^2+z^2\right)^{-5/2}-(3-2\nu_n)z\left(r^2+z^2\right)^{-3/2}\right]dz\end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Преобразование формулы (2) дает

$$w_1=\frac{P(1-\nu_n^2)}{\pi E_n r}+\frac{P}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+\nu_o)}{E_o}\left[(3-2\nu_o)\left(r^2+d^2\right)^{-1/2}-r^2\left(r^2+d^2\right)^{-3/2}\right]-\\-\frac{(1+\nu_n)}{E_n}\left[(3-2\nu_n)\left(r^2+d^2\right)^{-1/2}-r^2\left(r^2+d^2\right)^{-3/2}\right]\end{array}\right\}.$$

Действие касательных усилий

Аналогично методики определения перемещений поверхности в упругом покрытии при действии нормальных сил строим решение при действии касательных сил. Нормальное перемещение w_2 поверхности при действии касательной силы определяется по формуле:

$$w_2=\frac{\mu P(\nu_o+1)(1-2\nu_o)}{2\pi E_o r}+\frac{\mu P}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\frac{(1+\nu_o)}{E_o}\left[2\nu_o dr^{-1}\left(r^2+d^2\right)^{-1/2}-d^3r^{-1}\left(r^2+d^2\right)^{-3/2}\right]-\\-\frac{(1+\nu_n)}{E_n}\left[2\nu_n dr^{-1}\left(r^2+d^2\right)^{-1/2}-d^3r^{-1}\left(r^2+d^2\right)^{-3/2}\right]\end{array}\right\}.$$

Таким образом, при действии касательной нагрузки нормальное перемещение поверхности покрытия определяется как суперпозиция перемещений при действии нормальных и касательных сил:

$$w=w_1+w_2.$$

Используя вышеприведенную методику, строится алгоритм расчета перемещений поверхности упругого покрытия при контактном взаимодействии жестких инденторов с учетом трения, считая, что распределения давлений на поверхности задано действием сосредоточенных сил.

Литература

1. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд // Л. : Наука, 1968. – 403 с.

2. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

3. Hsueh, C.-H. Master curves for Hertzian indentation on coating/substrate systems / Chun-Hway Hsueh, Pedro Miranda // J. Mater. Res. – Vol. 19, Iss. 1, Jan 2004. – P. 94–100.

В. А. Климович
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **И. А. Концевой**, ст. преподаватель

ТОЧЕЧНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ НА ЛИНИИ РОСТА ДЕНДРИТА В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ

Разработка новых технологий получения материалов с улучшенными эксплуатационными свойствами требует решения теоретических и экспериментальных задач высокоскоростной кристаллизации чистых веществ [1]. Цель работы: изучить дендритный режим роста кристалла под воздействием волновых возмущений на линии роста.

Фазовую границу кристаллизации (ФГК) моделируем плоской линией сильного разрыва $x - F(y,t) = 0$. Здесь t – время; x – координата вдоль оси симметрии в сторону твердой фазы; y – поперечная декартова координата. Нормаль $\boldsymbol{n}$ границы образует с осью x угол θ: $\cos\theta = 1/G$, $G = (1 + (\partial F/\partial y)^2)^{1/2}$. ФГК перемещается со скоростью $\boldsymbol{N}$ справа налево ($\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{n}$, $N < 0$), и на ее вершине $\partial F/\partial y = 0$, $\cos\theta = 1$. По мере удаления от вершины $\theta \to \pi/2$. Угол заострения линии роста равен $\theta_1 = (\pi/2) - \theta$.

На ФГК имеем замкнутую систему трех граничных условий.

I. Баланс энергии