Анализ графиков позволяет сделать вывод, что альфа-частица испытывает многократные столкновения, в результате которых наблюдается разброс в среднем в 2º–3º, о чем свидетельствуют большие численные значения $D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ (рисунки 1–6). В области малых углов рассеяние происходит в соответствии с законом нормального распределения случайных величин, а несогласно теории Резерфорда. Однако, начиная с углов рассеяния в 4º–5º резерфордовское рассеяние становится преобладающим. Из-за малого размера ядра-мишени, с ростом θ, альфа-частицы двигаются практически прямолинейно, лишь изредка сталкиваясь с ядрами, что соответствует малым численным значениям $D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx 0$ (рисунки 1–6). Во всех случаях рассеяния и на тяжелых, и на легких ядрах в области $\theta < 10°$ наблюдается хорошее согласие экспериментальных результатов с теоретическими данными.

Литература

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие / И. В. Савельев. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 50 с.

М. В. Ритарева
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. В. Андреев**, д-р физ.-мат. наук, профессор

ОПТИМИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ ЮКАВЫ

Одно из преимуществ изучения гамильтониана бесспинового Солпитера [1]

$$H = T(k) + V(r,\eta). \tag{1}$$

состоит в том, что он позволяет описать некоторые аспекты релятивистской описания двухчастичных связанных квантовых систем.

В уравнении (1): $V(r,\eta)$ – статический потенциал взаимодействия частиц, зависящий от координаты r и некоторого набора параметров $\eta = \{\alpha, \sigma, \ldots\}$, которые характеризуют интенсивность взаимодействия частиц с другом; часто потенциал считается центральным, т.е. зависит только от радиальной координаты $r = |r|$.

Целью данной работы найти метод расчета энергетического спектра для системы с потенциалом Юкавы с высокой точностью. При этом используются варицонный базис Кулона-Штурма (CS-базис) [2]

Наличие центральной симметрии позволяет искать решение (1) в виде

$$\Psi_{n,\ell m}(r) = \left(R_{n\ell}(\mathrm{r})/\mathrm{r}\right)Y_{\ell m}(\Omega_r), \tilde{\Psi}_{n,\ell m}(k) = \left(\tilde{R}_{n\ell}(\mathrm{k})/\mathrm{k}\right)Y_{\ell m}(\Omega_k), \quad (2)$$

где функция $\tilde{\Psi}$ является фурье-образом функции Ψ, а $Y_{\ell m}(\Omega_r)$ сферические гармоники. Для определения волной функции Ψ необходимо найти только радиальную функцию $R_{n\ell}(\mathrm{r})$, которая нормирована условием

$$\int_0^\infty R^*_{n\ell}(\mathrm{r})R_{n'\ell}(\mathrm{r})\mathrm{dr} = \delta_{n,n'}. \quad (3)$$

В этом подходе осуществляется разложение волновой функции (ВФ) R с использованием «пробных» ВФ $\varphi_k(r,\beta)$

$$|R = \sum_{k=0}^\infty a_k |\varphi_k(\beta)\rangle, \quad (4)$$

где β – вариационный параметр (или набор параметров).

Пробные ВФ общем случае удовлетворяют условия нормировки и полноты

$$\int g(x,\beta)\varphi^*_n(x,\beta)\varphi_{n'}(x,\beta)\mathrm{d}x = \delta_{n,n'}, \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^\infty g(x,\beta)\varphi^*_n(x,\beta)\varphi_n(x,\beta)\mathrm{d}x = \mathrm{I}, \quad (6)$$

где $g(x,\beta)$ играет роль «весовой» функции. В случае, если $g(x,\beta)=1$ функции $\varphi_k(\beta)$ образуют ортонормированный базис.

Для расчетов удобно ввести биортонормированный партнер к функции $\varphi_k(\beta)$ соотношением:

$$\bar{\varphi}_k(x,\beta) = g(x,\beta)\varphi_k(x,\beta). \tag{7}$$

Использование (4),(5) и (6) приводит к задаче на обобщенные собственные значения

$$H(\beta).\boldsymbol{a} = E_{n\ell}W(\beta).a \tag{8}$$

с бесконечномерными матрицами

$$H_{ij}(\beta) = \langle\varphi_i(\beta)|H|\varphi_j(\beta)\rangle, \quad W_{ij}(\beta) = \langle\varphi_i(\beta)|\varphi_j(\beta)\rangle. \tag{9}$$

Для приближенного решения уравнения бесконечномерные матрицы (9) заменяют на конечномерные вида $N \times N$. При этом, согласно вариационной технике Рэлея-Ритца для спектра с $E_0 \le E_1 \le \ldots$, выполняется условие $E_k \le \tilde{E}_k(\beta), k = 0,\ldots N-1$, где $\tilde{E}_k(\beta)$ собственные значения уравнения (8) с конечномерными матрицами.

В данном подходе для поиска спектра $\tilde{E}_k(\beta)$ максимально приближенным к истинному E_k проводят процедуру вычисления вариационного параметра β при котором значения $\tilde{E}_k(\beta)$ минимальны.

Базисные функции Кулона-Штурма (CS) в координатном пространстве определяются соотношением [2]

$$\Phi_{n\ell}^{\mathrm{CS}}(\mathrm{r},\xi) = N_{n\ell}(2\xi r)^{\ell+1} e^{-\xi \mathrm{r}} L_n^{2\ell+1}(2\xi\mathrm{r}), \tag{10}$$

где

$$N_{n\ell} = \sqrt{\frac{n!}{(2\ell+n+1)!}}. \tag{11}$$

Для решения используем обобщенную задачу на собственные значения вида (8). В данном случае необходимо вычислить следующие матричные элементы

$$W_{nn',\ell}(\xi) = \varphi_n(\xi)|\varphi_{n'}(\xi) = \int_0^\infty \Phi_{n\ell}^{*\mathrm{CS}}(\mathrm{r},\xi)\Phi_{n'\ell}^{\mathrm{CS}}(\mathrm{r},\xi)\mathrm{dr}, \tag{12}$$

$$V_{nn',\ell}(\xi)=\varphi_n(\xi)\big|\varphi_{n'}(\xi)=\int_0^\infty \Phi_{n\ell}^{*CS}(\mathrm{r},\xi)\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)\Phi_{n'\ell}^{CS}(\mathrm{r},\xi)\mathrm{dr}, \tag{13}$$

$$T_{nn',\ell}(\xi)=\int_0^\infty \tilde{\Phi}_{n\ell}^{CS}(\mathrm{k},\xi)(\mathrm{k})\tilde{\Phi}_{n\ell}^{CS}(\mathrm{k},\xi)\mathrm{dk}. \tag{14}$$

Использование свойств полиномов Лагерра, входящих в функции Кулона-Штурма позволяет найти, что (12) определяется соотношением

$$W_{nn',\ell}=\frac{1}{\xi}\tilde{W}_{n'n,\ell}(\xi)=\frac{1}{\xi}\Bigg((\ell+n+1)\delta_{n,n'}-\sqrt{\frac{1}{4}n'(2\ell+n'+1)}\delta_{n,n'-1}-$$
$$-\sqrt{\frac{1}{4}n(2\ell+n+1)}\delta_{n,n'+1}\Bigg). \tag{15}$$

Интеграл (14) после замены переменных трансформируется к виду

$$T_{nm,\ell}(\xi)=\frac{\beta^2}{2\mu}(\frac{1}{2}\left(\sqrt{m}\sqrt{2L+m+1}\right)\delta_{n,m-1}+(L+n+1)\delta_{n,m}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sqrt{n}\sqrt{2L+n+1}\right)\delta_{n,m+1}) \tag{16}$$

Нами предложена интерполяционная формула для оптимизации вариационного параметра $\beta_n(E_n)$ на основе аналитических выражений для энергетических спектров с потенциалом Юкавы при $n=1,2,3,4$.

$$\beta_n(E_1)=\frac{1}{2}n\left(\beta_3(E_1)-\beta_1(E_1)\right)+\beta_1(E_1)$$

Аналогичные формулы можно получить для $\beta(E_2)$, $\beta(E_3)$.

Численные расчеты показали совпадения энергетических уровней для $n=1,2,3,4$ с точностью до $10^{-12}-10^{-30}$ с работой [3]. Это подтверждает эффективность оптимизации вариационного параметра с помощью оригинальной методики.

Литература

1. Salpeter, E. E. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms / E. E. Salpeter // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 87, №2. – P. 328–343.

2. Rotenberg, M. Theory and application of Sturmian functions / M. Rotenberg // Advances in Atomic and Molecular Physics. ed. by D. Bates, I. Esterrnan. – Academic Press, 1970. – Vol.6. – P. 233–268.

3. Stubbins, C. Bound states of the Hulthen and Yukawa potentials / C. Stubbins // Phys. Rev. A. – 1993. – Vol. 48. – P. 220–227.

Д. А. Сагайдак

(ОмГТУ, Омск)

Науч. рук. **В. Н. Задорожный**, д-р техн. наук, доцент

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ С ДЕМУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЕМ ПО ДВУМ КАНАЛАМ СВЯЗИ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

Пусть отправителю требуется передать информацию – поток видеоданных, представляющий из себя последовательность изображений. У отправителя для этой цели имеется два канала связи и, используя схемы разделения секрета (далее – СРС) на две неравные доли, описанные в [1, 2], он осуществляет демультиплексирование передаваемых данных, как это описано, например, в [3, 4]. Но, отправитель не желает переплачивать за избыточность пропускных способностей каналов связи, и поэтому требуется выбрать такие оптимальные пропускные способности каналов связи, которые были бы достаточны для передачи отправляемых им данных. Предполагается, что СРС на две неравные доли могут использоваться не только для передачи видеоданных, но и для любых данных, где вместо битовых значений пикселей изображений, как это описано в [1, 2], берется битовое представление самих сообщений. В результате разделения сообщений меньшая доля отправляется по каналу с меньшей пропускной способностью, а большая – по каналу с большей пропускной способностью.

В качестве математической модели для оптимизации передачи сообщений с демультиплексированием по двум каналом связи предлагается сеть с расщеплением заявок по двум одноканальным системам