

УДК 535.813.01

К ТЕОРИИ ХРОМАТИЗМА

В. И. Креопалов и Н. Л. Соколов

В статье с единых позиций рассмотрены основные вопросы теории хроматизма действительных и парааксиальных лучей. Получены выражения первой и второй хроматических сумм и хроматических aberrаций действительных лучей в зависимости от конструктивных элементов оптической системы, положения предмета и положения зрачка. Определены формы линз, для которых существуют ахроматические положения предмета. Показано, что частным случаем таких линз являются линзы Максутава. Выведено соотношение между значениями второй хроматической суммы в ахроматических положениях предмета.

Анализ хроматических aberrаций является сложной, актуальной задачей и существенно определяет конструкцию современных оптических систем. Однако использование теории хроматизма далеко не всегда позволяет провести такой анализ. В выражениях теории хроматизма отсутствует явная зависимость от конструктивных элементов оптической системы и положения предмета [1]. Хроматические aberrации действительных лучей мало изучены. Аналитические выражения хроматических aberrаций действительных лучей содержат частные производные, физический смысл которых не всегда просто интерпретируется [2, 3]. И только недавно опубликованы точные аналитические выражения сферохроматической aberrации в общем виде, содержащие «высотную» и угловую составляющие, геометрический смысл которых совершенно очевиден [4].

Цель настоящей статьи — получить и исследовать с единых позиций выражения хроматических aberrаций действительных и парааксиальных лучей в зависимости от положения предмета и конструктивных элементов оптической системы.

Рассмотрим продольную хроматическую aberrацию в области Гаусса. Положение изображения s' в оптической системе из p поверхностей определяются углом и высотой первого парааксиального луча

$$s' = \frac{h_p}{\alpha_{p+1}}, \quad (1)$$

тогда

$$ds'_{xp} = \left(\frac{h'_p}{\alpha_{p+1}} - \frac{h_p \alpha'_{p+1}}{\alpha_{p+1}^2} \right) d\lambda, \quad (2)$$

где дифференцирование ведется по длине волны λ . Углы и высоты парааксиального луча на первой и последней поверхностях системы связаны матричным преобразованием

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{p+1} \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ h_1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для производных справедливо

$$\begin{pmatrix} -\alpha'_{p+1} \\ h'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ h_1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Подставим значения h_p , α_{p+1} , h'_p , α'_{p+1} , определенные из (3), (4), в (2) и учтем, что

$$s = \frac{h_1}{\alpha_1}. \quad (5)$$

Тогда

$$ds'_{xp} = \frac{(B'D - BD')s^2 + (AD' - A'D + BC' - B'C)s + A'C - AC'}{(A - Bs)^2} d\lambda. \quad (6)$$

Для определенности в дальнейшем используется нормировка

$$S_{Ixp} = ds'_{xp}.$$

Для удобства введем обозначения

$$a = B'D - BD', \quad b = AD' - A'D + BC' - B'C, \quad c = A'C - AC'. \quad (7)$$

Учитывая нормировку и обозначения (7), можно записать

$$S_{Ixp} = \frac{as^2 + bs + c}{(A - Bs)^2} d\lambda. \quad (8)$$

Положения предмета, для которых $ds'_{xp} = 0$, назовем ахроматическими положениями предмета. Эти положения определяются уравнением

$$as^2 + bs + c = 0. \quad (9)$$

В качестве примера использования полученных выражений исследуем одиночную линзу. В этом случае

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + d\rho_2 - \frac{d\rho_2}{n} & -(n-1)\left(\rho_1 - \rho_2 + \frac{n-1}{n}d\rho_1\rho_2\right) \\ \frac{d}{n} & 1 - \frac{d}{n}(n-1)\rho_1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В случае системы, содержащей одну марку оптического стекла, дифференцирование по λ можно заменить непосредственно дифференцированием по показателю преломления

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\rho_2}{n^2} & -\rho_1 + \rho_2 - d\rho_1\rho_2 + \frac{d}{n^2}\rho_1\rho_2 \\ -\frac{d}{n^2} & -\frac{d}{n^2}\rho_1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Подставив значения элементов матриц (10) и (11) в (7), получим

$$\begin{aligned} a &= n^2(1 - \rho_1 d)(\rho_1 - \rho_2 + d\rho_1\rho_2) + 2dn\rho_1(\rho_1 - \rho_2 + d\rho_1\rho_2) - (1 + d\rho_2)d\rho_1^2, \\ b &= 2d\rho_1(1 + d\rho_2) - 2dn(\rho_1 - \rho_2 + d\rho_1\rho_2), \quad c = -d(1 + d\rho_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае

$$b^2 - 4ac = 4n^2d(\rho_1 - \rho_2 + d\rho_1\rho_2). \quad (14)$$

Из (14) следует, что при $d=0$ и $d=r_1-r_2$ у линзы имеются совпадающие ахроматические положения предмета соответственно $s=0$ и $s=r_1$. Несовпадающие ахроматические положения предмета возможны при условиях $\rho_1\rho_2 > 0$, $d > r_1 - r_2$ или $\rho_1\rho_2 < 0$, $d < r_1 - r_2$. Сравним полученные результаты с известными линзами Максутава. Легко показать, что для системы, содержащей одну марку оптического стекла,

$$S_{Ixp} = \frac{dn}{n-1} \sum_1^p h_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \quad (15)$$

и условие ахроматизации имеет вид

$$h_p \alpha_{p+1} = h_1 \alpha_1 + \sum_1^{p-1} \alpha_{k+1} (h_{k+1} - h_k) \quad (16)$$

или

$$\alpha_{p+1}^2 s' = \alpha_1^2 s - \sum_1^{p-1} \alpha_{k+1}^2 d_k. \quad (17)$$

При нормировке $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $h_1 = f'$ из расчета первого паракиального луча

$$s' = f' - \alpha_2 d, \quad (18)$$

а из (17)

$$s' = -\alpha_2^2 d. \quad (19)$$

Из (18) и (19) получаем уравнение линз Максутава

$$\frac{d}{f'} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_2^2}. \quad (20)$$

Решая уравнение (20), можно, в частности, получить положительную линзу ($r_1 = 6.667$, $r_2 = 20$, $d = 40$, $n = 1.5$, $f' = 10$, $s' = -10$) и отрицательный мениск ($r_1 = 12.602$, $r_2 = 7.392$, $d = 10$, $n = 1.5163$, $f' = -100$, $s' = -72.923$).

В случае, когда $s \rightarrow -\infty$, (9) можно преобразовать к виду

$$a + b \frac{1}{s} + \frac{c}{s^2} = 0. \quad (21)$$

Отсюда следует, что $s = -\infty$ является ахроматическим положением предмета только в случае $a = 0$. Кроме того, из (21) следует, что при $a = 0$ имеется второе ахроматическое положение предмета

$$s = -\frac{c}{b}. \quad (22)$$

Подставляя конструктивные элементы, полученные из решения (20), легко убедиться в справедливости вышесказанного. Для положительной линзы Максутава получаем

$$s_1 = -\infty, \quad s_2 = -10; \quad s'_1 = -10, \quad s'_2 = -25$$

и аналогично для мениска $s_1 = -\infty$, $s_2 = 10.819$; $s'_1 = -72.923$, $s'_2 = 0.962$. Линзы Максутава являются частным случаем, удовлетворяющим условию $r_1 r_2 > 0$, $d > r_1 - r_2$, причем легко определяется второе ахроматическое положение предмета, ранее не известное. Для изучения второй хроматической суммы примем нормировку $S_{\text{IIxp}} = dy_{p+1}/y_{p+1}$, где y_{p+1} — высота второго паракиального луча в плоскости изображения. Обратное матричное преобразование второго паракиального луча от плоскости изображения можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -\beta_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Ds' & -B \\ -C - As' & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_{p+1} \\ y_{p+1} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Дифференцируя (23), получим при $s' = \text{const}$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{p+1}}{d\lambda} &= \beta_{p+1} [(C + As')(D' + B's') - (D + Bs')(C' + As')] + \\ &+ y_{p+1} [(C + As')B' + (D + Bs')A'] \end{aligned} \quad (24)$$

и после несложных преобразований, используя свойства матриц, получим выражение второй хроматической суммы в виде

$$S_{\text{IIxp}} = \frac{sB' - A'}{A - Bs} d\lambda + \frac{(A - Bx)(A - Bs)}{x - s} S_{\text{Ixp}}. \quad (25)$$

Предположим, что выполнено условие

$$b^2 - 4ac > 0, \quad (26)$$

т. е. оптическая система имеет два ахроматических положения предмета s_1 и s_2 , при этих положениях предмета (25) легко преобразовать к виду

$$S_{\text{IIxp}} = \left(as + \frac{b}{2} \right) d\lambda. \quad (27)$$

Так как s_1 и s_2 являются корнями уравнения (9), то

$$s_1 + s_2 = -\frac{b}{a} \quad (28)$$

и (27) можно записать

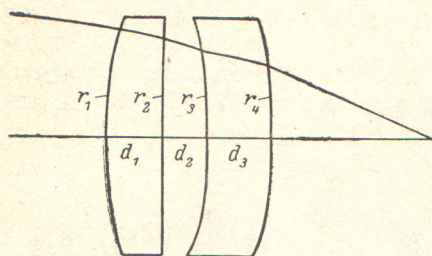
$$S_{IIxp} = a \left(s - \frac{s_1 + s_2}{2} \right) d\lambda. \quad (29)$$

В ахроматических положениях предмета s_1 и s_2 значения второй хроматической суммы отличаются только знаком, причем

$$S_{IIxp}(s_1) = a \frac{s_1 - s_2}{2} d\lambda, \quad S_{IIxp}(s_2) = -a \frac{s_1 - s_2}{2} d\lambda.$$

В качестве примера рассмотрим двухлинзовый компенсатор из одной марки стекла (рисунок). В таблице приведены результаты расчета S_{Ixp} и S_{IIxp} по формулам (8)

Двухлинзовый положительный компенсатор
из стекла марки К-8.



		1^{nd}
$r_1 = 45.39$ мм,	—	—
	$d_1 = 5$ мм,	1.5163
$r_2 = -226.5$ мм,	—	—
	$d_2 = 3.7$ мм,	1
$r_3 = -45.57$ мм,	—	—
	$d_3 = 5.3$ мм.	1.5163
$r_4 = -46.03$ мм;		
		1
$f' = 74.970$ мм	$S' = 67.547$ мм	

и (25), которые хорошо согласуются с результатами расчета действительных лучей. Отметим, что этот компенсатор является ахроматическим при $s = 17.066$ мм.

Рассмотрим хроматическую разность сферических aberrаций действительных лучей. Для действительных лучей можно записать матричное преобразование, аналогичное (3), в виде

$$\begin{pmatrix} -\sin u_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin u_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

При этом необходимо отметить, что элементы A, B, C, D матрицы (30) в отличие от (3) зависят не только от конструктивных элементов оптической системы, но и параметров самого луча. Продольная хроматическая aberrация действительного луча может быть выражена

$$ds'_{xp} = d(y_p \operatorname{ctg} u_{p+1}). \quad (31)$$

Для действительного луча величины $y_1/\sin u_1$ и $y_p/\sin u_{p+1}$ с точки зрения матричных преобразований играют роль, совершенно аналогичную $s = h_1/\alpha_1$ и $s' = h_p/\alpha_{p+1}$, причем

$$ds'_{xp} = \frac{1}{\cos u_{p+1}} \left(\frac{y_p}{\sin u_{p+1}} \right)' d\lambda. \quad (32)$$

Учитывая эту аналогию, для сферохроматической aberrации можно записать

$$ds'_{xp} = \frac{1}{\cos u_{p+1}} \frac{[a + b \left(\frac{\sin u_1}{y_1} \right) + c \left(\frac{\sin u_1}{y_1} \right)^2]}{\left(A \left(\frac{\sin u_1}{y_1} \right) - B \right)^2} d\lambda, \quad (33)$$

причем a, b, c определяются из выражения (7), но через элементы A, B, C, D матрицы (30). Выражение (32) отличается от точного значения aberrаций [4]

$$dn = 0.01$$

$$\begin{aligned} A &= 0.951365, \\ B &= -0.01339 \text{ мм}^{-1}, \\ C &= 10.714778 \text{ мм}, \\ D &= 0.900988. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' &= -0.066600, \\ B' &= -0.025521 \text{ мм}^{-1}, \\ C' &= -4.267000 \text{ мм}, \\ D' &= -0.164510. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -0.025188 \text{ мм}^{-1}, \\ b &= 0.233844, \\ c &= 3.345445 \text{ мм}. \end{aligned}$$

$s, \text{ мм}$	β	$s', \text{ мм}$	$S_{I \text{ xp}}, \text{ мм}$	$S_{II \text{ xp}}$
$-\infty$	0	67.547	-1.416	-0.046
-500	-0.175	80.658	-1.917	-0.071
-100	-2.614	263.494	-18.580	0.062
-7.782	1.180	-20.917	0	0.0031
17.066	0.848	3.954	0	-0.0031
100	0.438	34.739	-0.431	-0.0160
500	0.131	57.709	-1.063	-0.0380

на величину $y'_p \operatorname{tg} \varphi_p d\lambda$, которая во многих практических случаях мала по сравнению с ds'_{xp} . В случае $\sin u_1 \sim 0$ выражение (33) имеет совсем простой вид

$$ds'_{\text{xp}} = \frac{a}{B^2 \cos u_{p+1}}. \quad (34)$$

Условие исправления сферохроматической аберрации аналогично (9) и распадается на два, как и в рассмотренном случае линз Максута

$$a = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\sin u_1}{y_1} = -\frac{b}{c}. \quad (36)$$

Выражение для поперечной хроматической аберрации действительного луча может быть получено аналогично выражению (24) и имеет вид

$$dy_{p+1} = (A'\bar{d} + C') \sin u_1 + (B'\bar{d} + D') y_1, \quad (37)$$

где \bar{d} — «косая» длина хода луча от последней поверхности системы p до поверхности изображения $p+1$.

Выражения продольной хроматической аберрации (33) и поперечной (37) действительных лучей в параксиальном приближении преобразуются к виду (8) продольной хроматической аберрации (24) и поперечной аберрации параксиального луча. Хотя полученные выражения хроматических аберраций для действительных лучей являются нелинейными, однако закономерности, характерные для параксиальных лучей, имеют аналогию в области действительных лучей. Например, аналогию тому, как для параксиальных лучей имеются два ахроматических положения предмета, среди действительных лучей имеются два луча с исправленной сферохроматической аберрацией, проходящих через одну точку зрачка.

Полученные соотношения совместно с результатами, изложенными ранее [4], позволяют провести детальный анализ хроматических аберраций оптических систем. Из уравнения (9) можно определить ахроматические положения предмета. Ахроматические положения предмета имеются в системах, содержащих одну марку оптического стекла, в частности, в одиночных линзах. Эти результаты использовались авторами при разработке зеркально-линзовых объективов. В отличие от требования афокальности ахроматического компенсатора [5] нами был применен «сильный» компенсатор из одной марки стекла в сходящемся пучке, что позволило существенно улучшить конструкцию зеркально-линзовых объективов.

Литература

- [1] А. И. Тудоровский. ЖТФ, 15, 585, 1945.
- [2] Д. Ю. Гальперн, О. В. Пронина. Опт. и спектр., 34, 375, 1973.
- [3] А. Б. Агурок. Опт.-механич. промышл., № 12, 12, 1979.
- [4] Н. Л. Соколов. Опт.-механич. промышл., № 6, 13, 1980.
- [5] В. Н. Чуриловский. Теория хроматизма и аберраций третьего порядка. Машиностроение, Л., 1968.

Поступило в Редакцию 19 января 1981 г.