

УДК 535.2

## ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ КОГЕРЕНТНЫХ ОБЪЕМНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ И ДИФРАКЦИЯ НА ОБЪЕМНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Ю. В. Аристов и В. М. Рысаков

Показано, что разложение в трехмерный пространственный спектр медленно меняющейся в пространстве огибающей амплитудного распределения источников является эффективным методом анализа диаграмм направленности. С его помощью устанавливаются некоторые общие свойства излучателей. Рассмотрение иллюстрируется примером излучателя в виде Гауссова эллипсоида вращения.

В настоящее время диаграммы направленности когерентных излучателей анализируются, как правило, методом суперпозиции в реальном пространстве сферических волн элементарных источников [1]. В данной работе используется трехмерный спектральный подход (т. е. разложение по плоским волнам [2, 3]), причем в спектр раскладывается только медленно меняющаяся в пространстве амплитуда (огибающая) источников. В тех случаях, когда мелкие детали структуры огибающей оказываются несущественными, такое рассмотрение позволяет прояснить физическую сущность процесса формирования диаграммы направленности и установить некоторые общие закономерности. В ряде случаев метод эффективен и для расчета диаграмм конкретных излучателей.

1. Пусть в окрестности начала координат расположен объемный излучатель типа бегущей волны, в котором задано распределение вектора поляризации  $\mathbf{P}$  (т. е. рассматривается так называемая «внешняя» антенная задача). Для такого излучателя

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp i(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}_i$  — пространственная частота заполнения, вообще говоря, не обязательно удовлетворяющая дисперсионному уравнению;  $\omega$  — временная частота. Поляризационный вектор  $\mathbf{e}$  считаем постоянным во всем объеме. Он включен в распределение амплитуды  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и его влияние специально не рассматривается.

Для анализа поля излучения используем однокомпонентный вектор Герца  $\Pi$ , направленный по вектору  $\mathbf{e}$ . Компоненты электромагнитного поля выражаются через вектор Герца стандартным образом [4]. Тогда

$$\Pi = \int_{V'} \frac{P\left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right)}{R} dV', \quad (2)$$

где штрихованные координаты соответствуют излучателю, нештрихованные — точке наблюдения,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  — расстояние от точки наблюдения до точки излучения. Рассматривая излучение в дальней зоне и разлагая  $P$  в ряд по малому параметру  $r'/r$ , после несложных преобразований получаем  $\Pi = (\Pi_0/R) \times \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ , где

$$\Pi_0 = \int_{V'} \mathbf{A}(\mathbf{r}') e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i)\mathbf{r}'} dV' \equiv J. \quad (3)$$

Здесь  $|\mathbf{k}| = k_0 = \omega/c$ . Если временно считать  $\mathbf{k}$  произвольным, то интеграл можно преобразовать следующим образом (знак  $\otimes$  обозначает свертку)

$$J(\mathbf{k}) = \int_{V'} A(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dV' = \left[ \int_{V'} A(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dV' \right] \otimes \left[ \int_{V'} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}'} dV' \right] = \\ = \Phi(\mathbf{k}) \otimes \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) = \Phi(\Delta\mathbf{k}), \quad (4)$$

где, по определению,  $\Phi(\mathbf{k}) = \int_{V'} A(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dV'$  — трехмерный пространственный спектр огибающей амплитудного распределения излучателя, а  $\Phi(\Delta\mathbf{k})$ , если  $\Delta\mathbf{k}$  произвольно, есть тот же спектр, нуль пространственной частоты которого

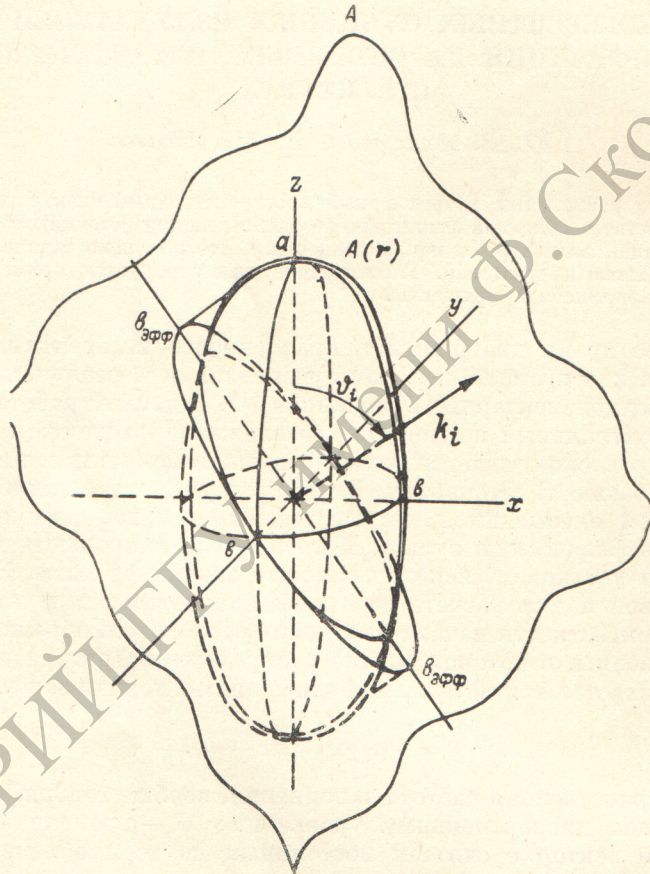


Рис. 1.

А — геометрия излучения в реальном пространстве:  $A(\mathbf{r})$  — огибающая излучателя с продольным размером  $a$  и поперечным  $b$ ,  $\theta_i$  — угол между осью излучателя и направлением волнового вектора заполнения  $\mathbf{k}_i$ ,  $b_{\text{эфф}}$  — размер проекции излучателя на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{k}_i$ . Б — геометрия в пространстве спектров:  $\Phi(\Delta\mathbf{k})$  — пространственный спектр огибающей  $A(\mathbf{r})$ , центр которого смещен на сферу Эвальда в направлении  $\mathbf{k}_i$ ,  $\Delta k_{0x}$  и  $\Delta k_{0y}$  — размеры спектра, сопряженные размерам излучателя  $a$  и  $b$ ; сечение спектра сферой Эвальда определяет форму и ширину диаграммы направленности  $\Delta\theta_0$ .

смещен в точку  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i$  (рис. 1, Б). Поскольку в распространяющихся волнах  $\mathbf{k}$  при заданном  $\omega$  должно удовлетворять дисперсионному соотношению  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ , то из всего спектра (4) реально излучаются лишь те пространственные частоты, у которых  $|\mathbf{k}| = k_0$ ,  $\Pi_0 = J(\mathbf{k})|_{|\mathbf{k}|=k_0}$ , т. е. спектральные компоненты, находящиеся на пересечении спектра со сферой радиуса  $k_0$  (сферой Эвальда, рис. 1, Б и рис. 3, А). Если считать, что  $|\mathbf{k}_i| = k_0$ , а  $A(\mathbf{r})$  — вещественная функция, то задача становится особенно простой, и для нахождения диаграммы направленности необходимо лишь вычислить пространственный спектр огибающей (именно этот случай изображен на рис. 1, Б), что является стандартной процедурой. Для остронаправленных антенн в хорошем приближении ширина диаграммы

будет  $\Delta\vartheta_0 = \Delta k_0/k_0$ , где  $\Delta k_0$  соответствует размеру сечения спектра сферой Эвальда по заданному уровню.

2. Проиллюстрируем метод на примере излучателя в виде Гауссова эллипсоида вращения (рис. 1, А)

$$A(\mathbf{r}) = A_0 \exp\left[-\left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2}\right)\right], \quad (5)$$

где  $\rho$  и  $z$  — цилиндрические координаты. Пусть волновой вектор «заполнения»  $\mathbf{k}_i$ , модуль которого равен  $k_0$ , составляет угол  $\vartheta_i$  с осью эллипсоида ( $\varphi_i=0$ ). Такая модель излучателя позволяет построить точное решение в замкнутом

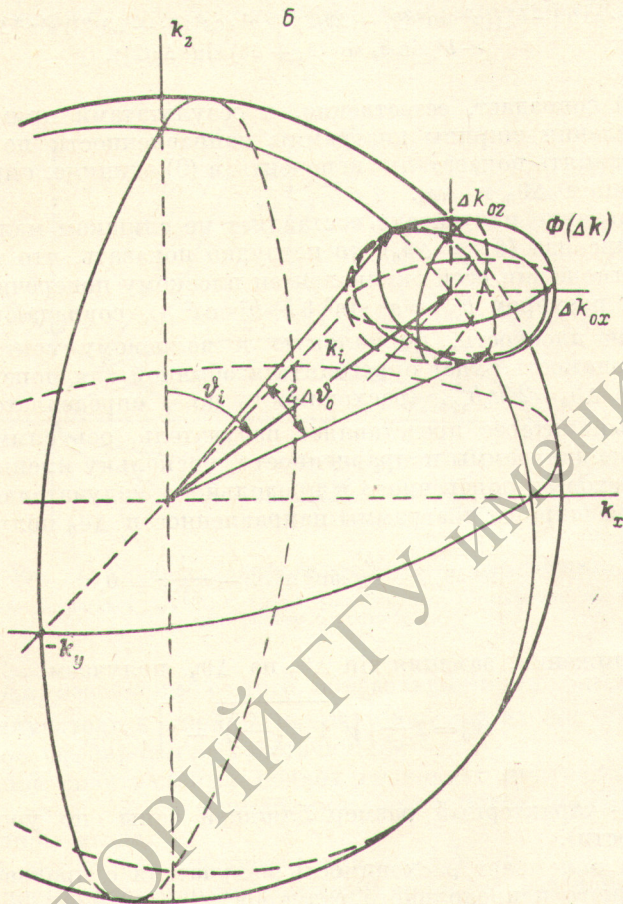


Рис. 1 (продолжение).

виде и в то же время допускает простое изменение физической формы изменением соотношения  $a$  и  $b$  от плоской, дискообразной до вытянутой, сигарообразной. Поскольку спад амплитуды за пределами характерных размеров происходит достаточно быстро, то такому излучателю можно с хорошим приближением сопоставить реальный излучатель.

Пространственный спектр такого излучателя есть сопряженный Гауссов эллипсоид

$$\Phi(\mathbf{k}) = \frac{3}{4} A_0 \sqrt{\pi} V_0 \exp\left\{-\left[\frac{k_z^2}{(2/a)^2} + \frac{k_\rho^2}{(2/b)^2}\right]\right\}, \quad (6)$$

где  $V_0 = \frac{4}{3} \pi a b^2$  — «объем» излучателя по уровню  $1/e$  [5]. В соответствии с вышеизложенным (рис. 1, Б)

$$\Pi_0 = \frac{3}{4} A_0 \sqrt{\pi} V_0 \exp\left\{-\left[\frac{\Delta k_z^2}{(2/a)^2} + \frac{\Delta k_\rho^2}{(2/b)^2}\right]\right\}. \quad (7)$$

В цилиндрической системе координат значения  $\Delta k_z$  и  $\Delta k_\rho$ , при которых  $|k|$  не изменяется, следующим образом выражаются через угловые отклонения от главного максимума

$$\Delta k_z = 2k_0 \sin(\vartheta_i + \Delta\vartheta/2) \sin \Delta\vartheta/2, \quad \Delta k_\rho^2 = 4k_0^2 [\cos^2(\vartheta_i + \Delta\vartheta/2) \sin^2 \Delta\vartheta/2 + \sin \vartheta_i \sin(\vartheta_i + \Delta\vartheta) \sin^2 \Delta\varphi/2]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем распределение пространственного спектра излучателя на сфере Эвальда, которое соответствует распределению поля излучения в дальней зоне (т. е. диаграмме направленности)

$$P_0 \sim \exp \{ -k_0^2 [(a^2 \sin^2(\vartheta_i + \Delta\vartheta/2) + b^2 \cos^2(\vartheta_i + \Delta\vartheta/2)) \sin^2 \Delta\vartheta/2 + b^2 \sin \vartheta_i \sin(\vartheta_i + \Delta\vartheta) \sin^2 \Delta\varphi/2] \}. \quad (9)$$

Выражение (9) совпадает, естественно, с результатами прямого расчета [6].

Для определения ширины диаграммы направленности по уровню  $1/e$  необходимо приравнять показатель экспоненты в (9) единице, определив из полученного уравнения  $\Delta\vartheta_0$  и  $\Delta\varphi_0$ .

Если направление излучателя составляет не слишком малый угол с осью вращения эллипсоида ( $\vartheta_i \gg \Delta\vartheta_0$ ), то нетрудно показать, что такой эллипсоид при любом соотношении осей эквивалентен плоскому поперечному излучателю с эффективным размером  $b_{\text{эфф}}^2 = a^2 \sin^2 \vartheta_i + b^2 \cos^2 \vartheta_i$ , совпадающим с размером его проекции на плоскость, нормальную к волновому вектору (рис. 1, А). При этом расходимость будет определяться обычной для поперечного излучателя формулой  $\Delta\vartheta_0 = 2/k_0 b_{\text{эфф}}$  (расходимость по  $\varphi$  определяется аналогично). Принципиальный интерес представляет излучатель, ось симметрии которого совпадает с осью диаграммы направленности, поскольку именно на нем можно проследить переход от поперечного к продольному излучателю. В этом случае для определения ширины диаграммы направленности  $\Delta\vartheta_0$  получаем уравнение

$$\sin^4 \Delta\vartheta_0/2 + \frac{b^2}{c^2} \sin^2 \Delta\vartheta_0/2 - \frac{1}{k_0^2 c^2} = 0, \quad (10)$$

где  $c^2 = a^2 - b^2$ .

В первом приближении, заменяя  $\sin \Delta\vartheta_0$  на  $\Delta\vartheta_0$ , получаем

$$\Delta\vartheta_0^2 = 2 \frac{b^2}{c^2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{c}{z_\phi}\right)^2} - 1 \right], \quad (11)$$

где  $z_\phi = k_0 b^2/2$  — характерный размер ближней зоны по уровню  $1/\sqrt{2} \approx 0.7$  (по напряженности).

Эта формула описывает расходимость излучателя с произвольным соотношением поперечного и продольного размеров.

3. Для сопоставления с известными результатами проанализируем предельные случаи короткого и длинного излучателя. Для короткого излучателя при  $c/z_\phi \ll 1$  получаем  $\Delta\vartheta_0 = \sqrt{2/k_0 z_\phi}$ , что эквивалентно обычному выражению для поперечного излучателя  $\Delta\vartheta_0 = 2/k_0 b$ . Для длинного излучателя ( $c/z_\phi \gg 1$ ,  $a \approx c$ ) получаем  $\Delta\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2}{k_0 (a/2)}}$ , что совпадает с известным выражением для продольного излучателя. Отметим, что при этом поперечный размер уже не влияет на ширину диаграммы. Формально такой излучатель можно заменить эквивалентным плоским с поперечным размером  $b_{\text{эвб}} = \sqrt{a/2k_0}$ , причем для такого излучателя  $z_{\text{эфф}} = a/2$ , что по существу есть продольный эффективный размер излучателя по уровню  $\sim 0.7$ . При этом формулы для расходимости поперечного и продольного излучателей имеют один и тот же вид  $\Delta\vartheta_0 = \sqrt{2/k_0 z_\phi}$ . Из выражения (11) легко видеть, что диаграмма объемного излучателя сужается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с плоским, такого же поперечного размера в том случае, если его эффективная длина в  $\sqrt{2}$  раз больше ближней зоны плоского излучателя. Из спектрального подхода ясно, что физическая причина влияния

длины излучателя на его диаграмму направленности состоит в кривизне поверхности волновых векторов (рис. 2). Известные формулы для расходимости продольного и поперечного синфазных излучателей с произвольным распределением интенсивности отличаются от гауссова случая лишь множителем  $\sim 1$  (поскольку произведение ширины спектра на размер источника в реальном пространстве есть величина порядка 1 [3]). Поэтому приведенные закономерности имеют общий характер и могут быть распространены на синфазные излучатели с произвольным распределением интенсивности.

Следовательно, можно высказать утверждение, носящее характер теоремы. Характерная ширина диаграммы направленности любого излучателя в дальней зоне определяется длиной его ближней зоны  $z_\phi$  и по порядку величины она

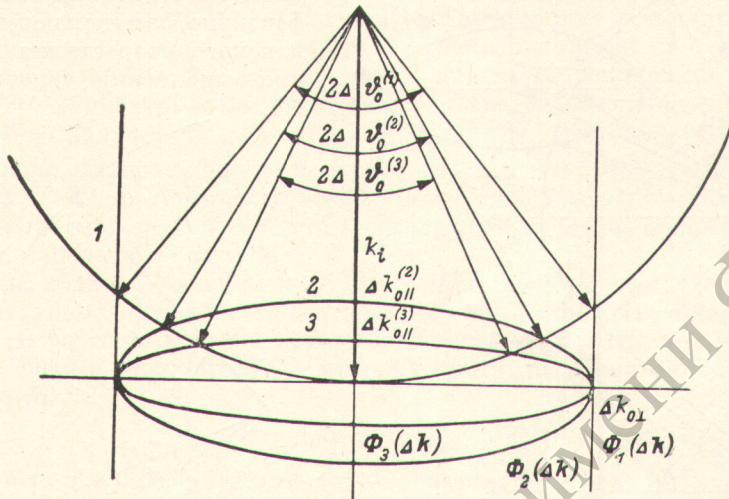


Рис. 2. Влияние длины излучателя на расходимость.

Длина последовательно возрастает ( $a_1 < a_2 < a_3$ ) от нулевого значения (плоский излучатель, 1). Поперечный размер  $b$  постоянен.

равна  $\Delta\vartheta_0 \approx \sqrt{2/k_0 z_\phi}$  независимо от того, образована ли эта зона за счет поперечного размера излучателя и в ней нет источников, или же она образована протяженной системой сфазированных источников.

4. В принципе спектральный подход позволяет проанализировать любой излучатель. Покажем это на примере некоторых более сложных излучателей, чем рассмотренные выше.

До сих пор излучатель предполагался синфазным в том смысле, что его «заполнение» описывалось плоской бегущей волной с фазовой скоростью, равной скорости волн в окружающей среде, т. е.  $\exp i(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega t)$ ,  $|\mathbf{k}_i| = k_0$ . Если «заполнение» само имеет некоторую расходимость, т. е. описывается набором плоских волн с  $|\mathbf{k}_i| = k_0$ , то в (3) вместо  $\delta$ -функции надо подставить спектр «заполнения»  $\Phi(\mathbf{k}_i)$  и произвести свертку. При небольшом угле расходимости заполнения в хорошем приближении можно считать, что поперечный размер спектра огибающей просто увеличивается на ширину спектра заполнения.

Если «накачка» осуществляется волной с фазовой скоростью, не равной  $c$  (т. е.  $|\mathbf{k}_i| \neq k_0$ ), то центр спектра огибающей смещается со сферы Эвальда (рис. 3, А). В этом случае диаграмма определяется уже нецентральным сечением спектра, что требует проектирования излучателя на сферу Эвальда с весовым множителем  $\cos(\Delta \mathbf{k} z)$ , где  $z$  — координата в реальном пространстве вдоль  $\mathbf{k}$ , а  $\Delta \mathbf{k} = |\mathbf{k}_i| - k_0$ . При этом, вообще говоря, всегда требуется учет кривизны поверхности волновых векторов. Исключение представляет случай сильно вытянутого излучателя с  $|\mathbf{k}_i| < k_0$ . Дiskoобразный спектр такого излучателя пересекает сферу Эвальда по кольцу (рис. 3, Б), формируя коническую диаграмму направленности. Очевидно, что это есть Черенковское излучение. Угол раскрытия конуса определяется соотношением фазовых скоростей, а «толщина» стенок в основном длиной излучателя.

5. Рассмотренный аппарат можно практически без изменений перенести на процессы рассеяния периодическими структурами, ограниченными в пространстве [3, 6]. Если изменение диэлектрической проницаемости в пространстве задано в виде

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_0 A(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{qr}), \quad (12)$$

то без учета вторичного излучения (т. е. в первом борновском приближении, справедливом при малой глубине модуляции  $\Delta\varepsilon_0 \ll \varepsilon_0$ ) процесс рассеяния протекает следующим образом. При облучении такого объема плоской волной  $\exp i(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega t)$  рассеяние происходит, вообще говоря, не эффективно, за исключением резонансного возрастания амплитуды при выполнении условий Брегга,

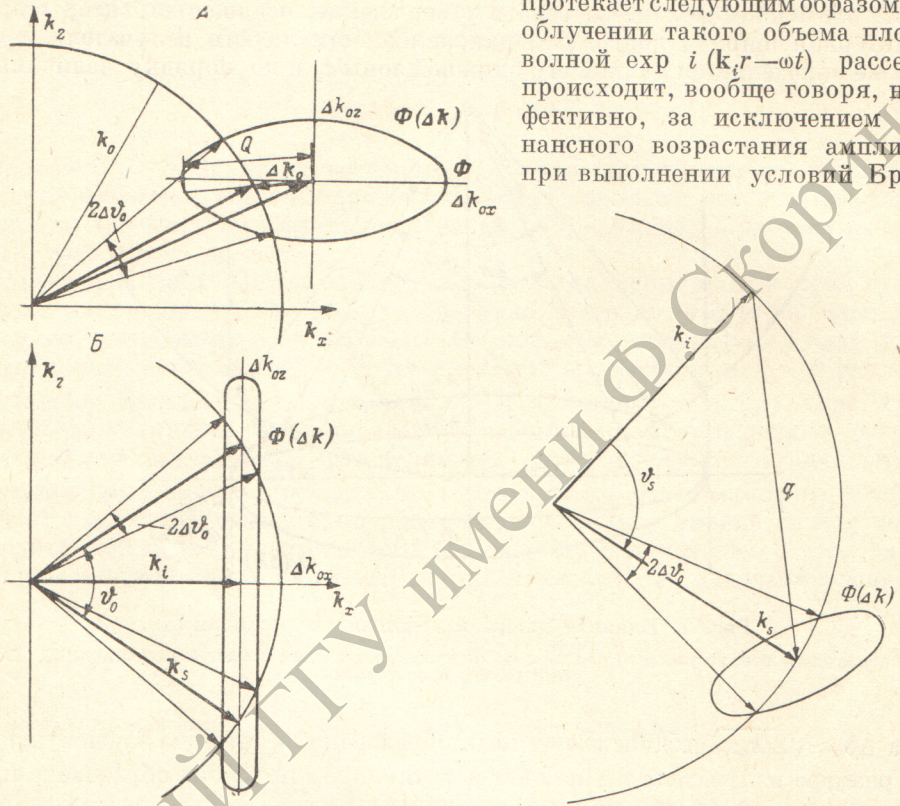


Рис. 3. Влияние несинфазности на диаграмму направленности для  $|k_i| > k_0$  (А) и  $|k_i| < k_0$  (Б).

$Q$  — размер пространственного спектра огибающей в направлении  $\Delta k_0$ ,  $k_s$  — ось диаграммы излучения.

Рис. 4. Рассеяние плоской волны с волновым вектором  $k_i$  периодической структурой с волновым вектором  $q$  и спектром огибающей  $\Phi(\Delta k)$ , определяемым пространственными размерами огибающей.

т. е. при  $q = 2k_i \sin \vartheta_s/2$  и угле между  $k_i$  и  $q$  ( $\pi/2$ ) —  $(\vartheta_s/2)$ . Для бесконечно большого рассеивающего объема резонанс будет предельно острым, т. е. рассеяние возникает только при точном выполнении условий Брегга, а рассеянная волна также плоская. Для конечного рассеивающего объема резонанс не столь острый, и характеристики рассеяния удобно выяснить по спектрам. На рис. 4 вокруг конца вектора  $q$  построен пространственный спектр огибающей, а начало вектора  $q$  пристроено к концу вектора  $k_i$ . Рассеянное излучение будет иметь расходимость за счет конечного размера рассеивателя совершенно аналогично рассмотренному выше процессу излучения. Рассеиватель в этом случае просто изменяет направление переизлученной волны. При отходе от резонанса спектр огибающей будет смещаться со сферы Эвальда, что при малых смещениях будет приводить к уменьшению эффективности рассеяния, некоторому повороту максимума рассеянного излучения и в меньшей степени к изменению расходимости. Отметим, что если ось симметрии не совпадает с направлением главного максимума, то из-за кривизны поверхности волновых векторов диаграмма становится асимметричной (рис. 4). По-видимому такой подход необходим, напри-

мер, при детальном рассмотрении рассеяния света флуктуационными процессами типа рассеяния Мандельштама—Бриллюэна. Действительно, вследствие сильного пространственного затухания и случайного распределения этих затухающих в пространстве и во времени колебаний, весь рассеивающий объем распадается на ряд объемов когерентности, т. е. на ряд флуктуирующих волновых пакетов. Из-за общего пространственного возбуждения временные частоты в пакете будут в той или иной мере скоррелированы по фазе. Это обычно не учитывается, и спектр считается не коррелированным (т. е.,  $\delta$ -коррелированным). Однако фазовая корреляция может, по-видимому, в некоторых случаях повлиять на характеристики временного спектра рассеянного света [6, 7]. Для окончательного решения вопроса требуется более детальное рассмотрение.

В работе показано, что применение трехмерного преобразования Фурье к огибающей амплитудного распределения объемного источника позволяет эффективно анализировать его диаграмму направленности и с единой точки зрения объяснить процесс формирования диаграмм различных излучателей. Показано, что в общем случае расходимость определяется эффективной длиной ближней зоны излучателя  $z_f$  и равна  $\Delta\vartheta_0 \approx \sqrt{2/k_0 z_f}$ . Эта эффективная длина, вообще говоря, зависит как от поперечного, так и от продольного размеров излучателя. Для короткого излучателя длин ближней зоны определяется только поперечным размером, а для длинного совпадает с эффективной длиной и не зависит от поперечного размера.

Развитый подход применим к рассмотрению процессов излучения и рассеяния как электромагнитных волн (оптического или радиодиапазонов), так и акустических. В частности, такой подход позволяет объяснить эффект обращения волнового фронта при процессе вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна [8].

#### Литература

- [1] К. Уолтер. Антенны бегущей волны. «Энергия», М., 1970.
- [2] J. A. Ratcliffe. Reports on Progress in Physics, 19, 188, 1956.
- [3] Дж. Каули. Физика дифракции. «Мир», М., 1979.
- [4] А. А. Власов. Макроскопическая электродинамика. М., 1955.
- [5] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, 1951.
- [6] В. М. Рысаков, Ю. В. Аристов. Опт. и спектр., 47, 361, 1979.
- [7] R. De Michely, L. Giulotto. J. Opt. Soc. Am., 61, 1007, 1971.
- [8] В. М. Рысаков, Ю. В. Аристов, В. И. Коротков. Опт. и спектр., 47, 745, 1979.

Поступило в Редакцию 3 декабря 1980 г.