Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

ОБЩАЯ ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Практическое пособие
для студентов физических специальностей университета

Составители

Т. П. ЖЕЛОНКИНА, С. А. ЛУКАШЕВИЧ

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 531(076)
ББК 22.2я73
О-27

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук В. Е. Гайшун,
кандидат технических наук Н. А. Ахраменко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

О-27 **Общая физика. Механика** : практическое пособие / сост.: Т. П. Желонкина, С. А. Лукашевич ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 27 с.
ISBN 978-985-577-305-5

Целью практического пособия является оказание помощи студентам при самостоятельном решении задач по физике. Практическое пособие содержит примеры решения задач с применением различных систем координат, которые часто встречаются как в механике, так и в электричестве.

Издание адресовано студентам физических специальностей.

УДК 531(076)
ББК 22.2я73

ISBN 978-985-577-305-5

Оглавление

Предисловие

Физика является одной из наук, знание которой необходимо для успешного усвоения общенаучных и специальных дисциплин. Изучение дисциплины предусматривает прочные усвоения студентами основных законов и теории, овладение необходимыми приемами умственной деятельности, важным компонентом которой является умение решать задачи.

Хорошо известно, что единственный способ научиться решать задачи – пытаться решать их самостоятельно. Отсюда вытекает диалектичность процесса обучения: знание теории приобретается одновременно с её использованием для решения задач. Абстрактные поначалу законы, уравнения, определения понятий и физических величин в процессе их практического применения для описания конкретных физических явлений (то есть при решении физических задач) начинают постепенно наполняться конкретным содержанием, и только тогда приходит понимание теории.

Главная задача коренного улучшения профессиональной подготовки специалистов выдвигает требования развития у студентов творческой активности. Для успешного её решения необходимо совершенствовать организацию самостоятельной работы студентов, обеспечивая при этом методическую помощь и контроль со стороны преподавателей.

Настоящее практическое пособие предназначено для оказания помощи студентам первого курса физического факультета в их самостоятельной работе при изучении раздела курса общей физики «Механика».

Зачастую при определении таких характеристик движущегося тела, как скорость, ускорение, координаты, форма траектории, различные параметры орбиты студенты используют декартову систему координат. В то же время для расчета указанных величин в ряде случаев значительно удобнее использовать другие системы координат – полярную, цилиндрическую, сферическую, поскольку в них решение задачи часто оказывается более простым. Кроме того, эти системы координат используются при решении различных физических задач в теоретической механике, электродинамике, квантовой физике. В связи с этим представляется весьма полезным познакомить студентов с указанными системами координат и с особенностями описания движения материальных тел в этих системах.

Методическое пособие написано в соответствии с программой курса общей физики для физических специальностей и может быть использовано как на практических занятиях, так и при самостоятельной работы.

1 Уравнение движения частицы массы *m* в полярной системе координат

Задача 1

Получить в полярной системе координат уравнение движения частицы, масса которой равна *m*.

Решение

В полярной системе координат положение некоторой точки *A* описывается двумя величинами r и φ (рисунок 1.1), где r – расстояние от начала координат (точки 0) до точки *A*; φ – полярный угол, отсчитываемый от оси *X* против часовой стрелки. В декартовой системе координат в двухмерном случае любой вектор может быть выражен через два единичных орт-вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Например, радиус-вектор $\vec{r}$ может быть записан в виде

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}. \tag{1.1}$$

В полярной системе координат для аналогичных целей используются два единичных орт-вектора $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$: вектор $\vec{e}_r$ коллинеарен $\vec{r}$, а вектор $\vec{e}_\varphi$ направлен перпендикулярно $\vec{r}$ так, как это показано на рисунке 1.1.

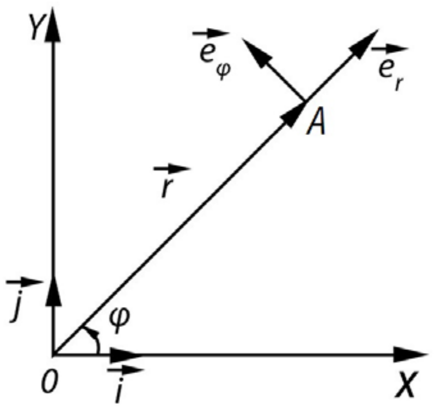

Рисунок 1.1

Запомните: в декартовой системе координат векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ постоянны, их величина и направление не зависят от положения точки *A* на плоскости *XOY,* в полярной же системе координат векторы $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$ зависят от угла $\varphi(\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$ и $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi))$.

Вектор $\vec{r}$ в полярной системе координат может быть записан в виде

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r(\varphi). \tag{1.2}$$

Согласно второму закону Ньютона, движение частицы описывается уравнением

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{1.3}$$

где m – масса частицы;

$\vec{F}$ – сила действующая на неё.

Воспользовавшись соотношением (1.2), продифференцируйте по времени и получите:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}. \tag{1.4}$$

Выполните дифференцирование уравнения (1.4) ещё один раз. Получите:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} + r\ddot{\varphi}\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} + r\dot{\varphi}^2\frac{d^2\vec{e}_r}{d\varphi^2}.\frac{\pi}{2}. \tag{1.5}$$

Далее вектор $d\vec{e}_r / d\varphi$ и $d^2\vec{e}_r / d\varphi^2$ выразите через $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$. Для этого получите сначала выражения *j*:

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cdot \cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \tag{1.6}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i} \cdot \sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi. \tag{1.7}$$

Затем, продифференцировав (1.6) и (1.7) по φ, получается:

$$d\vec{e}_r / d\varphi = -\vec{i} \cdot \sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi, \tag{1.8}$$

$$d\vec{e}_\varphi / d\varphi = -\vec{i} \cdot \cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi. \tag{1.9}$$

Сравнив (1.8), (1.9) с соотношениями (1.6), (1.7), получите:

$$d\vec{e}_r / d\varphi = \vec{e}_\varphi, \tag{1.10}$$

$$d\vec{e}_\varphi / d\varphi = -\vec{e}_r, \tag{1.11}$$

$$d^2\vec{e}_r / d\varphi^2 = -\vec{e}_r. \tag{1.12}$$

Подставив (1.10) и (1.12) в уравнении (1.5), запишите величину $\ddot{\vec r}$ в виде

$$\ddot{\vec r} = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\vec e_r + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\vec e_\varphi. \tag{1.13}$$

Так как вектор $\vec F$ в полярной системе координат может быть представлен как

$$\vec F = F_r \cdot \vec e_r + F_\varphi \cdot \vec e_\varphi, \tag{1.14}$$

то уровень движения частицы (соотношения (1.5)) в этой системе координат примет вид

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2)\vec e_\tau + m(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\vec e_\varphi = F_r \cdot \vec e_r + F_\varphi \cdot \vec e_\varphi. \tag{1.15}$$

Приравнивая значения коэффициентов при $\vec e_r$ и $\vec e_\varphi$ в левой и правой частях уравнения (1.15), получите:

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F_r, \tag{1.16}$$

$$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi) = F_\varphi. \tag{1.17}$$

Обратите внимание, что с помощью формул (1.4), (1.10) можно записать вектор скорости частицы $\vec\upsilon$ в полярной системе координат:

$$\vec\upsilon = \dot{\vec r} = \dot r\vec e_r + r\dot\varphi\vec e_\varphi. \tag{1.18}$$

2 Уравнение движения частицы массы *m* в цилиндрической системе координат

Задача 2

Получить в цилиндрической системе координат уравнение движения частицы, масса которой равна *m*.

Решение

Пусть в декартовой системе *X, Y, Z* положение некоторой точки характеризуется радиус-вектором

$$\vec{R} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \tag{2.1}$$

где *x, y, z* – проекция вектора *R* на оси *X, Y, Z* (рисунок 2.1).

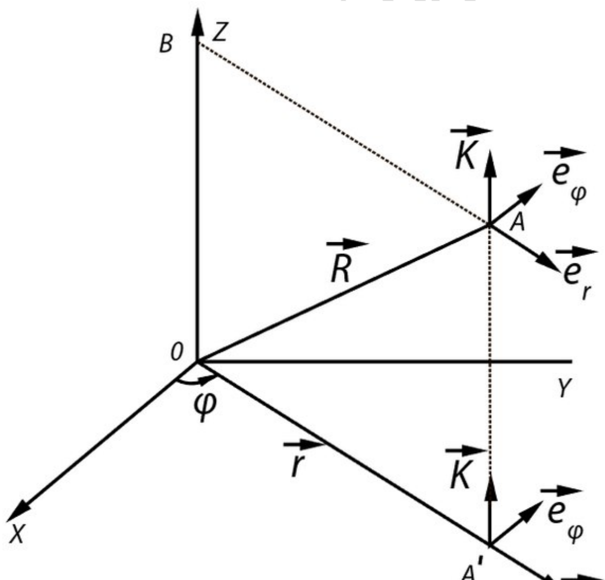

Рисунок 2.1

Опустите из точки *A* перпендикуляры на плоскость *XOY* и ось *OZ*, которые пересекут их соответственно в точках A^1 и *B*.

Тогда в цилиндрической системе координат положение точки *A* характеризуется тремя величинами r, φ и *z*, где r – расстояние точки A^1 до точки *O*; φ – угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси *X*; *z* – расстояние между точками *O* и *B*.

Обратите внимание: цилиндрическая система координат получается путем добавления оси Z к полярной системе координат.

В цилиндрической системе координат для записи векторных величин используются три единичных взаимно ортогональных вектора $\vec e_r$, $\vec e_\varphi$, $\vec k$, причём $\vec e_r \uparrow\uparrow \vec r$; $\vec k \parallel$ оси OZ, а $\vec e_\varphi$ направлен так, как это указано на рисунке 2.1.

Обратите внимание: вектор $\vec e_r$, $\vec e_\varphi$ зависит от угла φ, а вектор $\vec k$ не изменяется при переходе от одной точки к другой.

Уравнение движения частицы в цилиндрической системе координат получите, используя соотношения (1.15) предыдущей задачи. Оно имеет вид

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2)\vec e_r + m(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\vec e_\varphi + \ddot z\vec k = F_r\vec e_r + F_\varphi\vec e_\varphi + F_z\vec k. \qquad (2.2)$$

Это векторное уравнение может быть представлено в скалярной форме в виде системы трёх уравнений:

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F_r; \qquad (2.3)$$

$$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi) = F_\varphi; \qquad (2.4)$$

$$m\ddot z = F_z. \qquad (2.5)$$

Обратите внимание: вектор скорости частицы $\vec\upsilon$ в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\vec\upsilon = \dot{\vec R} = \dot r\vec e_r + r\dot\varphi\vec e_\varphi + \dot z\vec k. \qquad (2.6)$$

3 Задача на движение космического корабля под действием реактивного двигателя

Задача 3

Космический корабль массой m_0 движется в отсутствие внешних сил с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Для изменения направления движения включили реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью $\vec{U}$, все время перпендикулярной к направлению движения корабля. В конце работы двигателя масса корабля стала равна m_1. На какой угол φ_0 изменилось направление движение корабля за время работы двигателя?

Решение

Эту задачу удобно решать в пространстве скоростей, введя в ней полярную систему координат. Пусть в некоторый момент времени t скорость корабля характеризуется вектором $\vec{\upsilon}$ (рисунок 3.1).

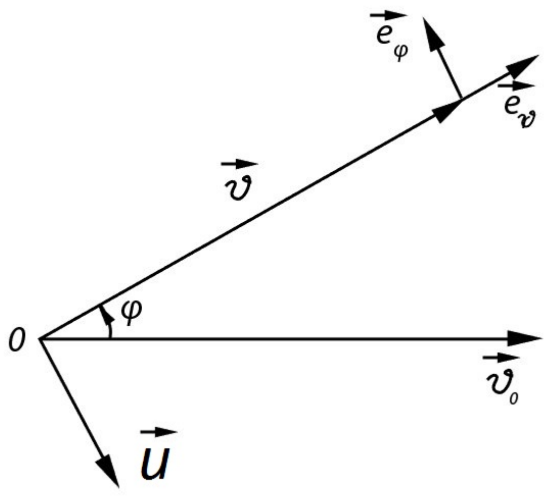

Рисунок 3.1

Тогда в полярной системе координат вектор можно представить в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{e}_\upsilon = \upsilon_0 \cdot \vec{e}_\upsilon, \tag{3.1}$$

где $\vec{e}_\upsilon$ – единичный вектор, коллинеарный вектору $\vec{\upsilon}$ (в задаче 1 аналогичный вектор обозначает $\vec{e}_r$). При записи (3.1) учтено, что $\vec{U} \perp \vec{\upsilon}$ в любой момент времени, а значит, и $|\vec{\upsilon}| = \upsilon_0$.

Запишите уравнение движение космического корабля в виде

$$m\dot{\vec{\upsilon}} = -\mu\vec{U}, \tag{3.2}$$

где m – мгновенная масса корабля;

μ – расход газа в единицу времени;

$\vec{U}$ – скорость газа относительно корабля.

Если вектор $\vec{U}$ направлен относительно $\vec{\upsilon}$ так, как это показано на рисунке 3.1, то вектор $\vec{\upsilon}$ будет с течением времени поворачиваться против часовой стрелки. Из рисунка видно, что

$$\vec{U} = -U \cdot \vec{e}_{\varphi}. \tag{3.3}$$

Поставив (3.1) и (3.3) в уравнение (3.2), получите:

$$m\upsilon_0\dot{\vec{e}}_{\upsilon} = m\upsilon_0\dot{\varphi}\vec{e}_{\varphi} = \mu U\vec{e}_{\varphi}, \tag{3.4}$$

откуда следует, что

$$m\upsilon_0\dot{\varphi} = \mu U. \tag{3.5}$$

Но $m = m_0 - \mu t$, значит,

$$\upsilon_0(m_0 - \mu t)\dot{\varphi} = \mu U. \tag{3.6}$$

Проинтегрируйте (3.6) и получите:

$$\varphi = \frac{U}{\upsilon_0}\ln(m_0 - \mu t) + C, \tag{3.7}$$

где C – постоянная интегрирования.

Величину C найдите из условия: при $t = 0$ $\varphi(0) = 0$.

Получите:

$$C = \frac{U}{\upsilon_0}\ln m_0. \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{U}{\upsilon_0}\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}. \tag{3.9}$$

Так как согласно условию задачи двигатель работал такое время t_0, что

$$m_0 - \mu t_0 = m_1,$$

то искомый угол

$$\varphi = \frac{U}{\upsilon_0}\ln\frac{m_0}{m_1}. \tag{3.10}$$

4 Уравнение движения частицы массы m в сферической системе координат

Задача 4

Получить в сферической системе координат уравнение движения частицы, масса которой равна m.

Решение

Пусть в декартовой системе координат X, $У$, Z положение некоторой точки A определяется радиус-вектором $\vec{r}$ (рисунок 4.1). Из точки A опустите перпендикуляр на плоскость $XOУ$. Он пересечет ее в точке A^1. Тогда в сферической системе координат положение точки A определяется тремя величинами r, φ и θ, где r – расстояние от начала координат до точки A; φ – угол между осью X и вектором $\vec{R}$, отсчитываемый от оси OX (вектор $\vec{R}$ – радиус-вектор точки A^1); θ – угол между осью OZ и вектором $\vec{r}$, отсчитываемый от оси OZ. Положительные направления отсчётов углов θ и φ указаны на рисунке 4.1 стрелками.

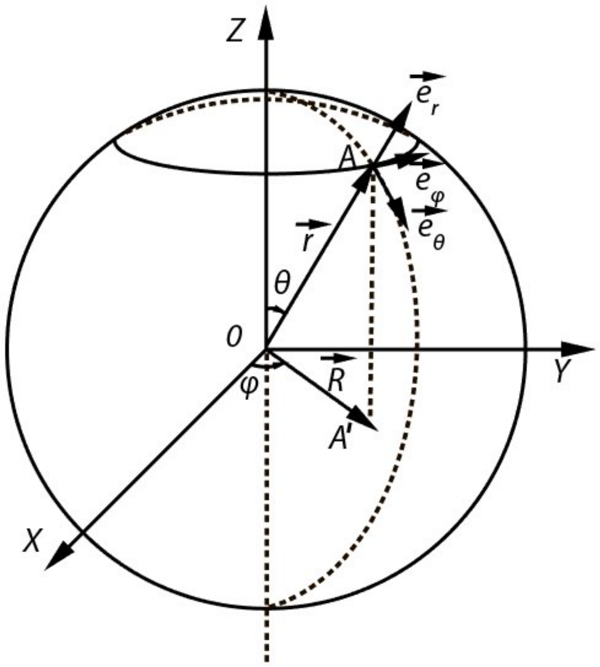

Рисунок 4.1

В сферической системе координат для записи различных векторных величин используются три единичных взаимно перпендикулярных вектора $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_\theta$. Вектор $\vec{e}_r$ коллинеарен вектору $\vec{r}$, а векторы $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_\theta$ в каждой точке направлены в сторону положительного отсчёта углов φ и θ (рисунок 4.1). Обратите внимание, что

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi, \theta); \tag{4.1}$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi); \tag{4.2}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\varphi, \theta), \tag{4.3}$$

то есть векторы $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ одновременно зависят от φ и θ, а вектор $\vec{e}_\varphi$ зависит только от φ.

Как и в задаче 1, для записи искомого уравнения движения нужно знать следующие производные:

$$(\partial\vec{e}_r / \partial\varphi)_\theta; \quad (\partial\vec{e}_r / \partial\theta)_\varphi; \quad \partial\vec{e}_\varphi / \partial\varphi; \quad (\partial\vec{e}_\theta / \partial\varphi)_\theta; \quad (\partial\vec{e}_\theta / \partial\theta)_\varphi.$$

Получите самостоятельно следующие векторные равенства:

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cdot \sin\theta\cos\varphi + \vec{j} \cdot \sin\theta\sin\varphi + \vec{k} \cdot \cos\theta; \tag{4.4}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{i} \cdot \cos\varphi\cos\theta + \vec{j} \cdot \sin\varphi\sin\theta - \vec{k} \cdot \sin\theta; \tag{4.5}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i} \cdot \sin\varphi + \vec{j} \cdot \cos\varphi. \tag{4.6}$$

Получите производные: $(\partial\vec{e}_r / \partial\varphi)_\theta; (\partial\vec{e}_r / \partial\theta)_\varphi$:

$$(\partial\vec{e}_r / \partial\varphi)_\theta = -\vec{i} \cdot \sin\theta\sin\varphi + \vec{j} \cdot \sin\theta\cos\varphi, \tag{4.7}$$

$$(\partial\vec{e}_r / \partial\theta)_\varphi = \vec{i} \cdot \cos\theta\cos\varphi + \vec{j} \cdot \cos\theta\sin\varphi - \vec{k} \cdot \sin\theta. \tag{4.8}$$

Сравните (4.6) и (4.7), (4.8) и (4.5), получите:

$$(\partial\vec{e}_r / \partial\varphi)_\theta = \vec{e}_\varphi \cdot \sin\theta, \tag{4.9}$$

$$(\partial\vec{e}_r / \partial\theta)_\varphi = \vec{e}_\theta. \tag{4.10}$$

Теперь получите производные: $(\partial\vec{e}_\theta / \partial\varphi)_\theta$ и $(\partial\vec{e}_\theta / \partial\theta)_\varphi$:

$$(\partial\vec{e}_\theta / \partial\varphi)_\theta = -\vec{i} \cdot \sin\varphi\cos\theta + \vec{j} \cdot \cos\varphi\sin\theta, \tag{4.11}$$

$$(\partial\vec{e}_\theta / \partial\theta)_\varphi = -\vec{i} \cdot \cos\varphi\sin\theta - \vec{j} \cdot \sin\varphi\sin\theta - \vec{k} \cdot \cos\theta. \tag{4.12}$$

Сравнив (4.11) с (4.6) и (4.12) с (4.4), получите:

$$(\partial \vec{e}_\theta / \partial\varphi)_\theta = \vec{e}_\varphi \cdot \cos\theta, \tag{4.13}$$

$$(\partial \vec{e}_\theta / \partial\theta)_\varphi = -\vec{e}_r. \tag{4.14}$$

Запишите производную $\partial \vec{e}_\varphi / \partial\varphi$ в виде:

$$\partial \vec{e}_\varphi / \partial\varphi = -\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi. \tag{4.15}$$

Теперь равенство (4.4) умножьте на $\sin\theta$, а (4.5) на $\cos\theta$. Далее результаты умножения сложите, а последнее сравните с (4.15) и убедитесь, что

$$\partial \vec{e}_\varphi / \partial\varphi = -\vec{e}_r \sin\theta - \vec{e}_\theta \cos\theta. \tag{4.16}$$

В сферической системе координат радиус-вектор $\vec{\tau}$ некоторой точки A имеет вид

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r. \tag{4.17}$$

Продифференцировав (4.17) по времени, с учётом выражений (4.9), (4.10), получите:

$$\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi r\dot{\varphi}\sin\theta + \vec{e}_\theta r\dot{\theta}. \tag{4.18}$$

Поставьте (4.18) в уравнение движения частицы

$$m\vec{\vartheta} = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi + F_\theta\vec{e}_\theta. \tag{4.19}$$

и получите систему уравнений, которая будет описывать движение частицы в сферической системе координат:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2) = F_r; \tag{4.20}$$

$$m(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta) = F_\varphi; \tag{4.21}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) = F_\theta. \tag{4.22}$$

5 Уравнение траектории движения космического корабля массы *m* в поле тяжести земли

Задача 5

Получить уравнение траектории движения космического корабля массы m в поле тяжести Земли.

Решение

В данном случае движение космического корабля является плоским, так как сохраняется момент импульса корабля относительно центра Земли. Кроме того, сила гравитационного взаимодействия корабля с Землёй зависит только от его расстояния до центра планеты. Поэтому задачу удобно решать в полярной системе координат, что можно сделать двумя способами. Первый заключается в интегрировании уравнений (1.16) и (1.17) задачи 1. Однако более удобно воспользоваться законами сохранения энергии и момента импульса. Это второй способ.

Запишите полную энергию космического корабля в виде:

$$E = m\vec{\upsilon}^2/2 + U(r), \tag{5.1}$$

Но $U(r) = \dfrac{-\gamma m_з m}{r}$, а $\vec{\upsilon}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$ (см. формулу (1.18) задачи 1), поэтому

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\gamma m_з m}{r}, \tag{5.2}$$

где $m_з$ – масса Земли;

r – расстояние корабля до центра Земли;

φ – полярный угол.

Из механики известно, что момент импульса материальной точки относительно точки описывается формулой

$$\vec{L} = m[\vec{r}\,\vec{\upsilon}]. \tag{5.3}$$

С учётом уравнений (1.2) и (1.18) задачи 1 выражение (5.3) перепишите в виде:

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}[\vec{e}_r\vec{e}_\varphi] = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}, \tag{5.4}$$

где $\vec{k}$ единичный вектор, равный $[\vec{e}_r \vec{e}_\varphi]$.

Поскольку момент силы притяжения космического корабля к Земле относительно центра Земли равен 0, то величина

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \tag{5.5}$$

откуда

$$r\dot{\varphi} = L / mr. \tag{5.6}$$

Подставив (5.6) в (5.2), получите:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L}{2mr^2} - \frac{\gamma m_3 m}{r} \ . \tag{5.7}$$

Из формулы (5.7) следует

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\gamma m_3 m}{r}\right)} \ . \tag{5.8}$$

Обратите внимание: формулу (5.8) можно интерпретировать таким образом, чтобы космический корабль при движении имел следующую эффективную потенциальную энергию:

$$U_{эф} = \frac{\gamma m_3 m}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \ .$$

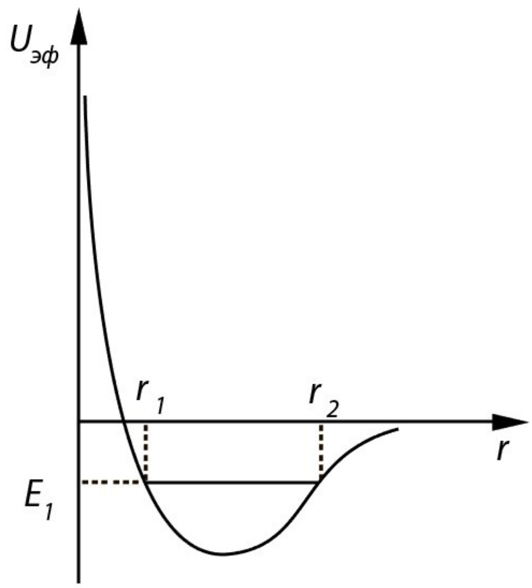

Рисунок 5.1

Графически зависимость $U_{эф}$ от r представлена на рисунке 5.1. Заметьте, что корабль будет совершать финитное движение при $E < 0$ (область r_1 / r_2 при $E = E_1$), и инфинитное при $E > 0$. Далее используя соотношения (5.5) и (5.8), получите:

$$dt = dr\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\gamma m_3 m}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \tag{5.9}$$

и

$$d\varphi = \frac{Ldt}{mr^2}. \tag{5.10}$$

Подставив (5.9) в (5.10), запишите $d\varphi$ в виде

$$d\varphi = \frac{Ldr}{mr^2}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\gamma m_3 m}{r}\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}. \tag{5.11}$$

Проинтегрируйте уравнение (11). Получите

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{L}{r} - \frac{\gamma m^2 m_3}{L}}{mr^2\sqrt{2mE + \frac{\gamma m^4 m_3^2}{L^2}}} + C, \tag{5.12}$$

где C – постоянная интегрирования.

Введите обозначения

$$p = \frac{L^2}{\gamma m^2 m_3}, \tag{5.13}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL}{\gamma^2 m^3 m_3^2}} \tag{5.14}$$

и из формулы (5.12), предполагая, что $C = 0$, получите:

$$\frac{P}{r} = 1 + e\cos\varphi. \tag{5.15}$$

Из аналитической геометрии известно, что выражение (5.15) является уравнением конического сечения с началом координат в фокусе. Величина p называется параметром орбиты. Обратите внимание на то, что согласно (5.14) при $E < 0$ величина $e < 1$. В это случае формула (5.15) является уравнением эллипса (рисунок 5.2).

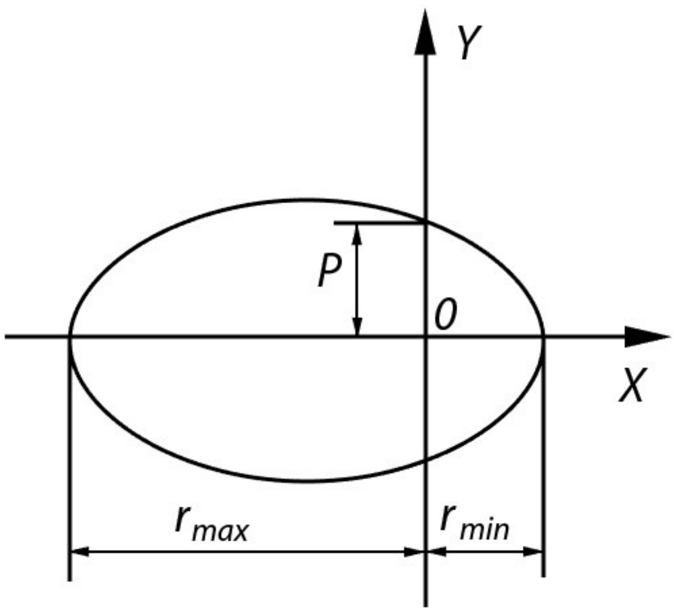

Рисунок 5.2

Минимальное и максимальное расстояние корабля до Земли будут соответственно:

$$r_{\min} = p/(1+e), \qquad (5.16)$$

$$r_{\max} = p/(1-e). \qquad (5.17)$$

Если $E = 0$, то $e = 1$. В этом случае формула (5.15) описывает параболу и $r_{\min} = p/2$.

Если $E > 0$, то $e > 1$. В этом случае формула (5.15) описывает гиперболу. Рассчитайте величину $r_{\min}$. Получите $r_{\min} = p/(1+e)$.

6 Уравнение движения частицы массы *m* в магнитном поле

Задача 6

Частица, имеющая заряд q, массу m и скорость $\vec{V}_0$, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ под углом α к направлению поля. Описать движение частицы в магнитном поле.

Указание. На частицу в магнитном поле действует сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{V}\vec{B}\right]$.

Решение

1-й способ: Эту задачу удобно решать в пространстве скоростей, введя в нём цилиндрическую систему координат и направив вектор $\vec{B}$ вдоль оси υ_Z.

Запишите уравнение движения частицы в магнитном поле в виде

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = q\left[\vec{V}\vec{B}\right]. \tag{6.1}$$

Обратите внимание: в выбранной системе координат

$$\vec{V} = \upsilon_Z\vec{K} + \upsilon\vec{e}_\upsilon, \tag{6.2}$$

а

$$\vec{B} = B\vec{K}. \tag{6.3}$$

С учётом (6.2) и (6.3) из (6.1) получите:

$$m\dot{\upsilon}_Z\vec{K} + m\dot{\upsilon}\vec{e}_\upsilon + m\upsilon\dot{\theta}\vec{e}_\theta = q\upsilon B\left[\vec{e}_\upsilon\vec{K}\right]. \tag{6.4}$$

Так как $\left[\vec{e}_\upsilon\vec{K}\right] = -\vec{e}_\theta$ (рисунок 6.1), то

$$m\dot{\upsilon}_Z\vec{K} + m\dot{\upsilon}\vec{e}_\upsilon + \left(m\upsilon\dot{\theta} + q\upsilon B\right)\vec{e}_\theta = 0. \tag{6.5}$$

Векторное уравнение (6.5) эквивалентно трём скалярным уравнениям:

$$\dot{\upsilon}_Z = 0, \tag{6.6}$$

$$\dot{\upsilon} = 0, \tag{6.7}$$

$$\dot{\theta} = -\omega = -\frac{qB}{m}. \tag{6.8}$$

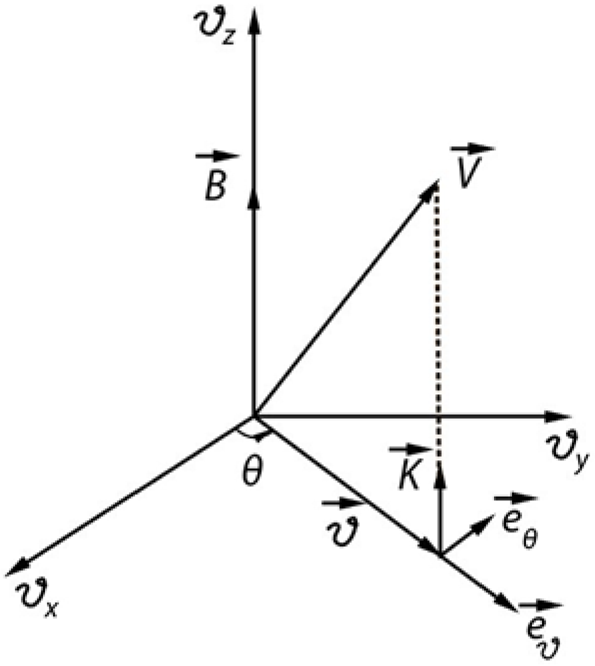

Рисунок 6.1

Из формул (6.6) и (6.7) следует, что υ_z и υ не зависят от времени. Проинтегрировав (6.6) и (6.7), с учётом начальных условий получите:

$$\upsilon_Z = V_0 \cos\alpha, \tag{6.9}$$

$$\upsilon = V_0 \sin\alpha. \tag{6.10}$$

Уравнение (6.8) говорит о том, что вектор $\vec{\upsilon}$ в плоскости $\upsilon_x O \upsilon_y$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = qB/m$ и $\theta = -\omega t + \theta_0$, где θ_0 постоянная интегрирования, которую можно считать равной 0.

Проинтегрируйте уравнение (6.2), помня, что при движении частицы вектор $\vec{e}_\upsilon$ зависит от времени. Получите:

$$\vec{R} = \upsilon_Z t\vec{K} + \upsilon\int \vec{e}_\upsilon dt. \tag{6.11}$$

Поскольку, согласно (6.8), $\dot{\theta} = -\omega = \mathrm{const}$, равенство (6.11) может быть переписано в виде

$$\vec{R} = \upsilon_Z t\vec{K} + \frac{\upsilon}{\dot{\theta}}\int \dot{\theta}\vec{e}_\upsilon dt = \upsilon_Z t\vec{K} + \frac{\upsilon}{\omega}\vec{e}_\theta + \vec{C}, \tag{6.12}$$

где $\vec{C}$ – некоторый постоянный вектор, определённый начальными условиями. Пусть они таковы, что $\vec{C} = 0$. Тогда

$$\vec{R} = \upsilon_Z t\vec{K} + \frac{\upsilon}{\omega}\vec{e}_\theta \qquad (6.13)$$

или с учётом равенств (6.8)–(6.10)

$$\vec{R} = \vec{K}tV_0\cos\alpha + \frac{mV_0\sin\alpha}{qB}\vec{e}_\theta. \qquad (6.14)$$

Заметьте, при вычислении интеграла в уравнении (6.12) использовалось соотношение (1.11) задачи 1.

Уравнение (6.14) содержит в себе полную информацию о траектории частицы в магнитном поле. Его несколько необычный вид (запись вектора $\vec{R}$ с помощью $\vec{e}_\theta$) связан с тем, что интегрирование проводилось в пространстве скоростей. Если вы хотите представить радиус-вектор $\vec{R}$ в привычной для вас форме, то запишите его с помощью вектора $\vec{e}_r$ и $\vec{K}$ (см. задачи 1, 2) в виде

$$\vec{R} = z\vec{K} + r\vec{e}_r, \qquad (6.15)$$

сравните между собой равенства (6.14) и (6.15) и получите

$$\vec{e}_r = \vec{e}_\theta \qquad (6.16)$$

и

$$\vec{R} = V_0 t\cos\alpha\vec{K} + \frac{mV_0\sin\alpha}{qB}\vec{e}_r\ . \qquad (6.17)$$

Заметьте: в общем случае равенство (6.16) может не выполняться. Его выполнение в нашей задаче обусловлено равенством постоянной $\vec{C}$.

Выражение (6.17) представляет собой уравнение траектории частицы в однородном магнитном поле в цилиндрической системе координат. Из (6.17) следует, что частица движется по винтовой линии, причём проекцией траектории на плоскость XOY является окружность, радиус которой

$$R_0 = \frac{mV_0\sin\alpha}{qB}. \qquad (6.18)$$

Шаг винтовой линии определите из соотношения

$$h = \upsilon_Z T = \frac{2\pi}{\omega}V_0\cos\alpha = \frac{2\pi mV_0\cos\alpha}{qB}. \qquad (6.19)$$

Используя формулу (1.6) задачи 1 и помня, что $\theta = -\omega t = -\frac{qBt}{m} = \varphi$, получите:

$$\vec{e}_r = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi = \vec{i}\cos\frac{qBt}{m} - \vec{j}\sin\frac{qBt}{m}, \qquad (6.20)$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орт-векторы декартовой системы координат.

Подставьте (6.20) в равенство (6.18) и получите самостоятельное уравнение для радиус-вектора частицы $\vec{R}$ в декартовой системе координат:

$$\vec{R} = \frac{mV_0\sin\alpha}{qB}\left(\vec{i}\cos\frac{qBt}{m} - \vec{j}\sin\frac{qBt}{m}\right) + \vec{K}tV_0\cos\alpha.$$

2-й способ: Эта задача может быть решена другим способом. Он заключается в следующем: выберите систему координат *XYZ* так, чтобы вектор $\vec{V}_0$ лежал в плоскости *XOZ*, ось *Z* была направлена в сторону, противоположную вектору, а полярный угол φ отсчитывайте от оси *X* против часовой стрелки (рисунок 6.2). Пусть в начальный момент времени $t = 0$ радиус-вектор частицы $\vec{R}$ равен нулю.

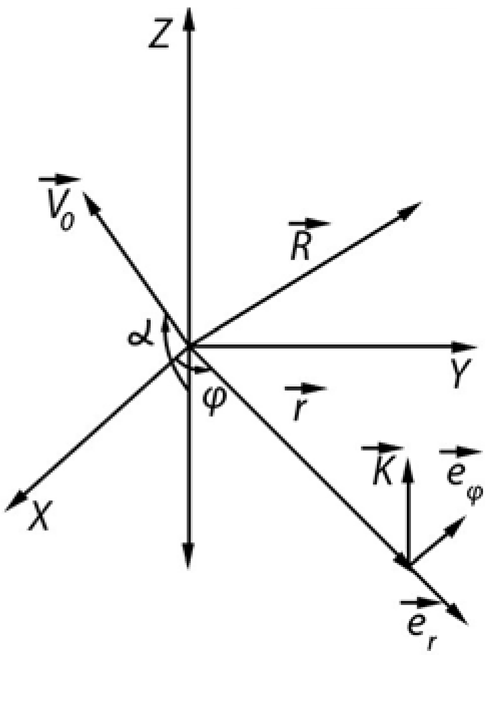

Рисунок 6.2

Запишите уравнение движения частицы в виде:

$$m\ddot{\vec{R}} = q\left[\vec{V}\vec{B}\right]. \qquad (6.21)$$

Используя результаты, полученные в задаче 2, запишите в следующем виде значения $\vec{R}$, $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$ в цилиндрической системе координат:

$$\vec{R} = r\vec{e}_r + Z\vec{K}; \qquad (6.22)$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{Z}\vec{K}; \qquad (6.23)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{Z}\vec{K}; \qquad (6.24)$$

Запишите значение силы Лоренца в выбранной цилиндрической системе координат. Получите:

$$\vec{F} = q\left[\vec{V}\vec{B}\right] = q\left[\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{Z}\vec{K}\right), -B\vec{K}\right] =$$

$$= -qB\left\{\dot{r}\left[\vec{e}_r\vec{K}\right] + r\dot{\varphi}\left[\vec{e}_\varphi\vec{K}\right] + \dot{Z}\left[\vec{K}\vec{K}\right]\right\}. \qquad (6.25)$$

Так как $\left[\vec{e}_r\vec{K}\right] = -\vec{e}_\varphi$, $\left[\vec{e}_\varphi\vec{K}\right] = \vec{e}_r$, $\left[\vec{K}\vec{K}\right] = 0$ (см. рисунок 6.2), то

$$\vec{F} = qB\dot{r}\vec{e}_\varphi - qrB\dot{\varphi}\vec{e}_r. \qquad (6.26)$$

С учётом соотношений (6.24) и (6.26) запишите уравнение движения частицы в данной системе координат:

$$m\left\{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{Z}\vec{K}\right\} = qB\left(-r\dot{\varphi}\vec{e}_r + \dot{r}\vec{e}_\varphi\right). \qquad (6.27)$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при векторах $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{K}$ в левой и правой частях уравнения (6.27), получите:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -qr\dot{\varphi}B; \qquad (6.28)$$

$$m\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = q\dot{r}B; \qquad (6.29)$$

$$m\ddot{Z} = 0. \qquad (6.30)$$

Проинтегрируйте соотношение (6.30). Получите:

$$\dot Z = C_1 \quad \text{и} \quad Z = C_1 t + C_2 . \tag{6.31}$$

Используя начальные условия $\left(t = 0, \dot Z = -V_0 \cos\alpha, Z = 0\right)$, определите постоянные интегрирования C_1 и C_2 и, подставив их в уравнение (6.31), получите:

$$\dot Z = -V_0 \cos\alpha \quad \text{и} \quad Z = -V_0 t \cos\alpha \ . \tag{6.32}$$

Обратите внимание: из соотношений (6.32) следует, что частица равномерно движется вдоль OZ.

Умножьте левую и правую части уравнения (6.29) на r и разделите на m. Получите:

$$2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi = \frac{qB}{m} r\dot r \ . \tag{6.33}$$

Обратите внимание: левая часть уравнения (6.33) равна $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\varphi\right)$, а правая $\frac{qB}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)$. Значит, уравнение (6.33) может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\varphi\right) = \frac{qB}{2m}\frac{d\left(r^2\right)}{dt}. \tag{6.34}$$

Проинтегрировав (6.34), получите:

$$r^2\dot\varphi = \frac{qB}{2m} r^2 + C_3 \ . \tag{6.35}$$

Воспользовавшись начальными условиями $\left(t = 0, r = 0\right)$, убедитесь в том, что $C_3 = 0$, и, следовательно,

$$\dot\varphi = \frac{qB}{2m}. \tag{6.36}$$

Проинтегрируйте уравнение (6.36). Получите:

$$\varphi = \frac{qBt}{2m} + C_4. \tag{6.37}$$

Так как при $t = 0, \varphi = 0$, то $C_4 = 0$ и

$$\varphi = \frac{qB}{2m} t. \tag{6.38}$$

Подставив (6.36) в уравнение (6.28) и проведя математические преобразования, получите:

$$\ddot{r} + \frac{q^2 B^2}{4m^2} r = 0. \tag{6.39}$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция вида

$$r = A\sin\frac{qB}{2m}t + D\cos\frac{qB}{2m}t. \tag{6.40}$$

Так как при $t = 0,\ r = 0$, то $D = 0$ и

$$r = A\sin\frac{qB}{2m}t. \tag{6.41}$$

Продифференцировав соотношение (6.41) по времени, получите:

$$\dot{r} = A\sin\frac{qB}{2m}\cos\frac{qB}{2m}t. \tag{6.42}$$

Постоянную A определите из таких соображений: из (6.42) следует, что при $t = 0$:

$$\dot{r}(0) = A\frac{qB}{2m}\ . \tag{6.43}$$

В то же самое время

$$\vec{V}_0 = -\vec{K}V_0\cos\alpha + \dot{r}(0)\vec{e}_r + r\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi = -\vec{K}V_0\cos\alpha + \dot{r}(0)\vec{e}_r. \tag{6.44}$$

Так как в этот момент времени $\vec{e}_r$ направлено вдоль OX, то

$$\vec{V}_0\sin\alpha = \dot{r}(0) = A\frac{qB}{2m};\ A = \frac{2mV_0\sin\alpha}{qB}. \tag{6.45}$$

Подставив (6.45) в (6.41), получите:

$$r = \frac{2mV_0\sin\alpha}{qB}\sin\frac{qB}{2m}t. \tag{6.46}$$

Поскольку $\frac{qBt}{2m} = \varphi$ (см. соотношение (6.38)), то

$$r = \frac{2mV_0\sin\alpha}{qB}\sin\varphi. \tag{6.47}$$

Это соотношение представляет собой уравнение окружности, записанное в полярной системе координат, с началом координат, расположенным в некоторой точке, лежащей на окружности.

Обратите внимание, что за время t, равное периоду обращения частицы T, угол φ изменяется на величину π, поэтому

$$\frac{qBt}{2m} = \pi \qquad \text{и} \qquad T = \frac{2\pi m}{qB}. \tag{6.48}$$

Частота обращения частицы

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} = 2\dot{\varphi}. \tag{6.49}$$

Обратите внимание на то, что, используя соотношение (6.46), можно найти декартовы координаты частицы в любой момент времени. Проделайте это самостоятельно, используя формулы:

$$x = r\cos\varphi, \tag{6.50}$$

$$y = r\sin\varphi. \tag{6.51}$$

Литература

1 Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1979. – 352 с.

2 Гинзбург, В. Л. Сборник задач по общему курсу физики : в 5 кн. / В. Л. Гинзбург; под ред. И. А. Яковлева, Д. В. Сивухина. – Кн. 1. – М. : Наука, 1982. – 351 с.

3 Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 4 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Высшая школа, 1977. – 688 с.

4 Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1976. – 416 с.

5 Иродов, И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1983. – 223 с.

6 Фирганг, Е. В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е. В. Фирганг. – М. : Высшая школа, 1978. – 352 с.

7 Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высшая школа, 1981. – 496 с.

8 Сборник задач по общему курсу физики. Механика / под ред. И. А. Яковлева. – М. : Наука, 1977. – 288 с.

Производственно-практическое издание

ОБЩАЯ ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Практическое пособие

Составители:

Желонкина Тамара Петровна,
Лукашевич Светлана Анатольевна

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 01.06.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,63.
Уч.-изд. л. 1,78. Тираж 25 экз. Заказ 515.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

ОБЩАЯ ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Гомель
2017