Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. В. БОРОДИЧ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ

Практическое руководство

для студентов физических специальностей вуза

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2016

УДК 512:514.123.1(076)
ББК 22.1я73
Б937

Рецензенты:
доктор физико-математических наук А. Н. Скиба,
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Бородич, Т. В.
Б937 Аналитическая геометрия и введение в линейную алгебру : практическое руководство / Т. В. Бородич ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 47 с.
ISBN 978-985-577-212-6

В практическом руководстве рассматриваются теоретические проблемы аналитической геометрии и линейной алгебры: классификация кривых второго порядка и их общие свойства, матрицы и действия над ними, способы вычисления определителей квадратных матриц, построение обратных матриц, ранг матрицы, условия линейной зависимости векторов. Даются примеры, задания, вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля.

Адресовано студентам физических специальностей вуза.

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-577-212-6

Оглавление

Введение

Курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» занимает важное место в математическом образовании студентов физического факультета. Математические методы аналитической геометрии и линейной алгебры лежат в основе классической механики, теории тяготения, теории света, физических полей, гидро- и аэродинамики, акустики и всех других направлений исследования в области физики. Математические методы позволяют получить количественные характеристики физических явлений, рассчитать с заданной точностью ход реальных процессов, проникнуть в суть закономерностей физических явлений, предсказать новые эффекты.

Аналитическая геометрия – это способ решения геометрических задач аналитическими, то есть алгебраическими методами. Это означает, что вместо рисования чертежа и изучения составляющих его геометрических объектов пишутся формулы. Аналитическая геометрия легко справляется с задачами в пространствах любой размерности, в то время как геометрические методы решения в этом случае или очень сложны, или просто невозможны.

Методы аналитической геометрии и линейной алгебры применяются в качестве аппарата и инструмента исследования физических явлений. Современный физик должен иметь широкую и глубокую математическую подготовку, хорошо владеть новейшими математическими методами исследования, которые могут применяться в области его деятельности.

В практическом руководстве рассматриваются: кривые второго порядка и их общие свойства, матрицы и действия над ними, способы вычисления определителей квадратных матриц и способы построение обратных матриц, а также условия линейной зависимости векторов.

Кривые второго порядка впервые упоминаются в работе Менехма (380 г. до н. э. – 320 г. до н. э.), в которой он рассматривал их, как конические сечения. Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических и дифференциальных уравнений. Определитель – одно из основных понятий линейной алгебры. Термин «определитель» возник в связи с задачей решения систем линейных уравнений.

1 Кривые второго порядка и их канонические уравнения

1.1 Канонические уравнения линий второго порядка

Линии, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, называются *линиями второго порядка.* К важнейшим линиям второго порядка относятся эллипс, окружность, гипербола и парабола (рисунок 1.1). Их канонические уравнения имеют вид:

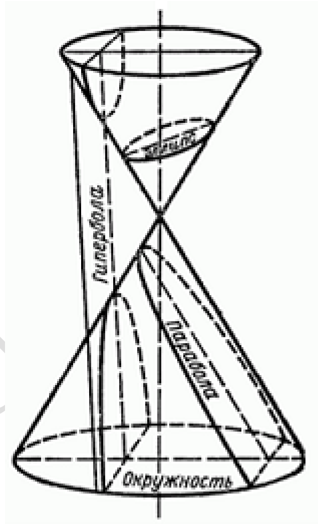

Рисунок 1.1

1) $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность радиуса R, начало координат – центр симметрии;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс, осевая симметрия;

3а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола, пересекает ось Ox, осевая симметрия;

3б) $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола, пересекает ось Oy, осевая симметрия;

4а) $y = 2px^2$ $(p > 0)$ – парабола, p – параметр, вершина в начале координат, ветви направлены вверх, ось Oy – ось симметрии;

4б) $y = 2px^2$ $(p < 0)$ – парабола, p – параметр, вершина в начале координат, ветви направлены вниз, ось Oy – ось симметрии;

4в) $x = 2py^2$ $(p > 0)$ – парабола, p – параметр, вершина в начале координат, ветви направлены вправо, ось Ox – ось симметрии;

4г) $x = 2py^2$ $(p < 0)$ – парабола, p – параметр, вершина в начале координат, ветви направлены влево, ось Ox – ось симметрии.

1.2 Определения эллипса, гиперболы, параболы

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых *фокусами,* есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых *фокусами,* есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой *фокусом,* и данной прямой, называемой *директрисой* и не проходящей через фокус.

1.3 Вывод канонических уравнений эллипса, гиперболы, параболы

1.3.1 Вывод канонического уравнения эллипса

Пусть $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$ – фокусы. Тогда $F_1F_2 = 2c$ – *фокусное расстояние* (рисунок 1.2). Постоянную величину, о которой идёт речь в определении эллипса, обозначим $2a$.

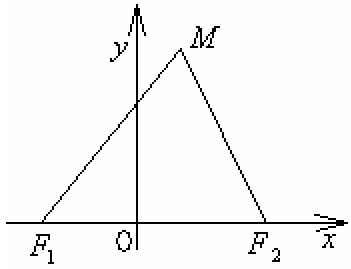

Рисунок 1.2

Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда по определению $F_1M + F_2M = 2a > 2c$, откуда $a > c$.

Так как $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то имеем уравнение

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(x^2 + 2cx + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2cx + c^2) + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Возводя в квадрат последнее уравнение, имеем

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ и можем обозначить $b^2 = a^2 - c^2$. Тогда $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.1)$$

Таким образом, координаты любой точки эллипса удовлетворяют уравнению (1.1).

Покажем обратное: если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1.1), то точка M лежит на эллипсе.

Из (1.1) найдём y^2: $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$.

Тогда $F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\dfrac{b^2x^2}{a^2}} =$

$$= \sqrt{\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2}+2cx+a^2-c^2+c^2} = \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}+2cx+a^2} = \sqrt{\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2} = \left|\frac{cx}{a}+a\right|.$$

Так как $c < a$ и из (1.1) $\dfrac{x^2}{a^2} \le 1$, то есть $x^2 \le a^2$, $|x| \le a$, то $\dfrac{cx}{a} \le a$. Следовательно, $\left|\dfrac{cx}{a}+a\right| = a+\dfrac{cx}{a}$. Аналогично можно вычислить $F_2M = a-\dfrac{c}{a}x$.

Теперь $F_1M + F_2M = a+\dfrac{cx}{a}+a-\dfrac{cx}{a}=2a$.

Из уравнения (1.1): $b^2 > 0 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$, то есть $a > c$, откуда $2a > 2c$. Значит, точка M лежит на эллипсе.

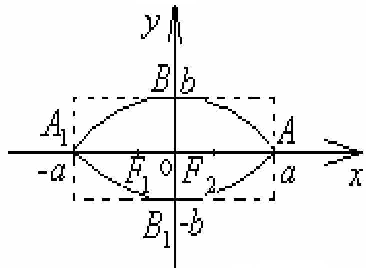

Рисунок 1.3

Уравнение (1.1) называется *каноническим уравнением эллипса* (рисунок 1.3).

Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса.* Оси симметрии эллипса (оси Ox и Oy) называют *осями эллипса.* Точка пересечения осей – *центр эллипса. Осями* называют также отрезки A_1A, B_1B. Отрезки OA, OB и их длины называют *полуосями.* В нашем случае $a > b$, поэтому a называют *большой полуосью,* b *– малой полуосью.*

Уравнение (1.1) можно рассматривать и в случае, когда $b > a$, оно определяет эллипс с большой полуосью $OB = b$, фокусы такого эллипса лежат на оси Oy, причём $a^2 = b^2 - c^2$.

Окружность

В частности, когда $a = b$, уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{или} \quad x^2+y^2=a^2$$

и определяет окружность радиуса a с центром в начале координат (рисунок 1.4). Такое уравнение называют *каноническим уравнением окружности.*

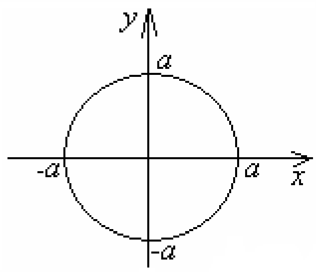

Рисунок 1.4

Из школьного курса известно уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.

1.3.2 Вывод канонического уравнения гиперболы

Пусть $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ – фокусы. Тогда $F_1F_2 = 2c$ – *фокусное расстояние* (рисунок 1.2). Постоянную величину, о которой идёт речь в определении, обозначим $2a$. Тогда по определению $2a < 2c$, то есть $a < c$.

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка гиперболы.

Так как $F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то имеем уравнение $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Преобразуем это уравнение:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left(x^2 + 2cx + c^2\right) + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx\ .$$

Возводя в квадрат последнее уравнение, имеем

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как $a < c$, то $a^2 - c^2 < 0$ и можем обозначить $b^2 = c^2 - a^2$. Тогда

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. (1.2)

Уравнение (1.2) называют *каноническим уравнением гиперболы.*

Гипербола с уравнением (1.2) изображена на рисунке 1.5. Прямоугольник $MNKL$, стороны которого $MN = LK = 2a$, $ML = NK = 2b$, называется *основным прямоугольником*.

Прямые MK и NL называют *асимптотами гиперболы,* их уравнения: у $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$, соответственно. Гипербола имеет две *ветви:* левую и правую. Центр симметрии гиперболы называется её *центром.* Оси симметрии гиперболы называются её *осями.* Одна ось пересекает гиперболу в двух точках (на рисунке 1.5 это точки A_1 и A_2), эта ось называется *действительной осью гиперболы,* другая ось – *мнимой осью*, она не имеет общих точек с гиперболой. Длины отрезков A_1A_2 и B_1B_2 также называют *осями.* Величины a и b называются *полуосями гиперболы.* Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней,* её уравнение $x^2 - y^2 = a^2$.

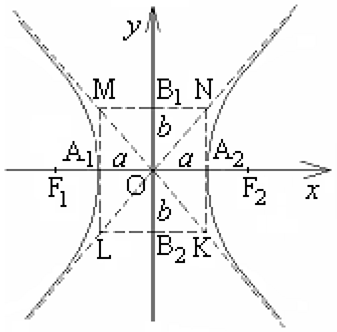

Рисунок 1.5

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.3)$$

определяет гиперболу с действительной осью Oy (рисунок 1.6).

Гиперболы, определяемые уравнениями (1.2) и (1.3) в одной и той же системе координат, называются *сопряжёнными*.

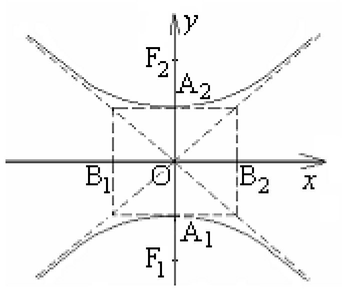

Рисунок 1.6

1.3.3 Вывод канонического уравнения параболы

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы (рисунок 1.7). Если K – основание перпендикуляра из точки M к директрисе, то она имеет координаты $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. По определению параболы $MK = MF$.

Тогда $\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$,

$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{p}{2}$, так как $x \geq 0$.

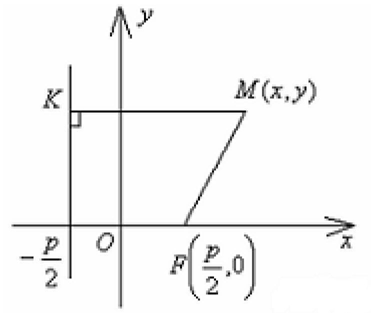

Рисунок 1.7

Возводим уравнение в квадрат и приводим подобные члены:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

$$y^2=2px. \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется *каноническим уравнением параболы.* Величину p называют *параметром параболы*. Парабола с уравнением (1.4) изображена на рисунок 1.8 а). Точка O называется *вершиной параболы,* ось симметрии – *осью параболы.* Если парабола имеет уравнение $y^2=-2px$, то её график расположен слева от оси Oy (рисунок 1.8 б). Уравнения $x^2=2py$ и $x^2=-2py$, $p>0$ определяют параболы, изображённые на рисунках 1.8 в) и 1.8 г), соответственно.

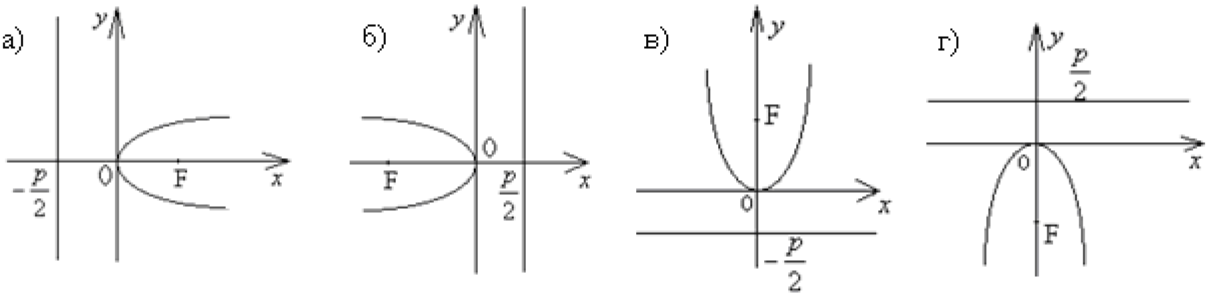

Рисунок 1.8

1.4 Фокальные радиусы эллипса, гиперболы, параболы

В случае рассмотрения эллипса и гиперболы отрезки F_1M и F_2M их длины $2c$ и в случае параболы отрезок FM и его длина называется *фокальными радиусами*.

1.4.1 Фокальные радиусы эллипса

Расстояния от точки $M(x, y)$ эллипса до фокусов называются *фокальными радиусами* и определяются формулами: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$, где ε – эксцентриситет.

1.4.2 Фокальные радиусы гиперболы

Расстояния точки от $M(x, y)$ гиперболы до фокусов, называются *фокальными радиусами* и определяются формулами: $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$, где ε – эксцентриситет.

1.4.3 Фокальные радиусы параболы

Пусть уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$.

Расстояния от точки $M(x, y)$ параболы до фокуса (*фокальный радиус*) определяются формулами: $r = x + \dfrac{p}{2}$.

Пусть уравнение параболы имеет вид: $x^2 = 2py$.

Расстояния от точки $M(x, y)$ параболы до фокусов (*фокальный радиус*) определяются формулами: $r = y + \dfrac{p}{2}$.

1.5 Исследование формы кривых второго порядка

1.5.1 Исследование формы эллипса

Свойство 1.1. Координатные оси являются осями симметрии эллипса. Начало координат является центром симметрии эллипса.

Свойство 1.2. Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называются *вершинами эллипса*.

Свойство 1.3. Для любой точки эллипса $M(x, y)$ выполняются соотношения: $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$.

Свойство 1.4. Для любых точек эллипса, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината убывает.

1.5.2 Исследование формы гиперболы

Свойство 1.5. Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Начало координат является центром симметрии гиперболы.

Свойство 1.6. Гипербола пересекает координатную ось Ox в точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и не пересекает ось Oy.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ называются *вершинами гиперболы*.

Свойство 1.7. Для любой точки гиперболы $M(x,y)$ выполняется условие: $|x| \geq a$.

Свойство 1.8. Для любых точек гиперболы, расположенных в первой координатной четверти, с возрастанием их абсциссы, их ордината возрастает.

1.5.3 Исследование формы параболы

Свойство 1.9. Абсцисса любой точки параболы неотрицательна.

Свойство 1.10. Парабола проходит через начало координат.

Свойство 1.11. Парабола симметрична относительно оси абсцисс.

Свойство 1.12. При неограниченном возрастании абсциссы, ордината – возрастает по абсолютной величине.

Вопросы для самоконтроля

1 Напишите канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

2 Дайте определение эллипса, гиперболы, параболы.

3 Проведите вывод канонических уравнений эллипса, гиперболы и параболы.

4 Как находятся фокальные радиусы кривых второго порядка?

5 Как проводится исследование кривых второго порядка?

2 Общие свойства алгебраических линий второго порядка

2.1 Директрисы и эксцентриситет эллипса, гиперболы, параболы

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси, то есть $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как $0 \leq c < a$, то $0 \leq \varepsilon < 1$.

Директрисами (D_1 и D_2) эллипса называются прямые, уравнения которых $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, где ε – эксцентриситет.

Теорема 2.1. (*Директориальное свойство эллипса*).

Эллипс является множеством точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно и равно ε (рисунок 2.1).

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \text{ и } \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

В этом случае $c = 0$ (уравнение окружности), получаем, что $\varepsilon = 0$.

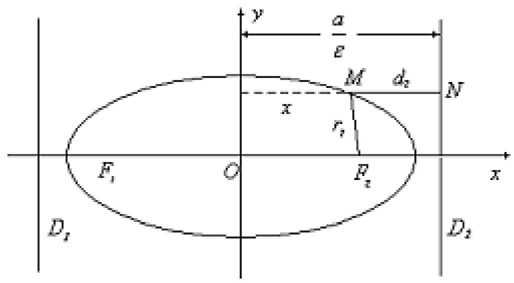

Рисунок 2.1

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к расстоянию между вершинами гиперболы (точками пересечения гиперболы с осями), то есть $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Директрисами (D_1 и D_2) гиперболы называются прямые, уравнения которых $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, где ε – эксцентриситет.

Теорема 2.2. (*Директориальное свойство гиперболы*)

Гипербола является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы постоянно и равно ε (рисунок 2.2).

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon \text{ и } \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

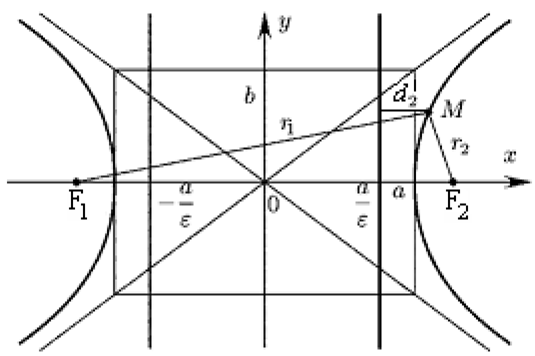

Рисунок 2.2

Эксцентриситет параболы принимают равным единице.

Если уравнение параболы задано $y^2 = 2px$, то уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$.

Если уравнение параболы задано $x^2 = 2py$, то уравнение директрисы $y = -\dfrac{p}{2}$.

Из определения параболы следует, что $r = d$ и *директориальное свойство эллипса* $\varepsilon = \dfrac{r}{d} = 1$.

2.2 Общие свойства алгебраических кривых второго порядка

Все кривые второго порядка имеют директрису: прямую, по отношению к которой эллипс, гипербола и парабола имеют особые свойства. Использование директрисы в случае параболы мы видели в самом определении параболы.

При получении канонических уравнений эллипса, гиперболы и параболы было установлено понятие эксцентриситета – ε, причём: а) $0 \le \varepsilon < 1$ – для эллипса; б) $\varepsilon = 1$ – для параболы; в) $\varepsilon > 1$ – для гиперболы.

Общее определение. *Кривой второго порядка* называют геометрическое место точек $M(x, y)$ плоскости, обладающих свойством: расстояние от точки M до точки F, называемой *фокусом*, равно расстоянию точки M до прямой, называемой *директрисой*, умноженному на некоторое число ε – *эксцентриситет*.

Замечание 2.1. Определение кривых второго порядка с использованием директрисы не позволяет принять $\varepsilon = 0$, хотя раньше такое значение эксцентриситета выделяло частный случай эллипса – окружность.

Следствие. Из общего определения кривых второго порядка с использованием директрисы и эксцентриситета следует: директриса и кривая второго порядка не могут пересекаться.

2.3 Параметрические и полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы

2.3.1 Параметрические уравнения эллипса, гиперболы, параболы

Параметрического представления эллипса с центром в начале координат, большой полуосью a и малой полуосью b:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases}$$

где параметр $0 \le \varphi \le 2\pi$, задает полный эллипс. Требуемое распределение точек порождается равномерными приращениями параметра φ.

Параметрического представления гиперболы с центром в начале координат, действительной полуосью a и мнимой полуосью b:

$$\begin{cases} x = a\left(t + \frac{1}{4}t\right), \\ y = b\left(t - \frac{1}{4}t\right). \end{cases}$$

Также параметрическое представление имеет вид:

$$\begin{cases} x = ach\varphi, \\ y = bsh\varphi. \end{cases}$$

Рассмотрим параболу с вершиной в центре координат и с осью симметрии – положительной полуосью x. Пусть каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$. *Параметрическое представление параболы* имеет вид:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t\sqrt{2p}, \end{cases}.$$

2.3.2 Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы

Если взять в качестве полюса полярной системы координат (ρ, φ) фокус невырожденной кривой второго порядка, а в качестве полярной оси – её ось симметрии, то в полярных координатах ρ, φ уравнение кривой будет иметь вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ для эллипса и гиперболы, а для параболы берется непосредственно из канонического уравнения.

Пример 2.1. Установить, какие фигуры заданы уравнениями в полярных координатах: а) $\rho = \frac{10}{5 - 2\cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{12}{3 - 4\cos\varphi}$; в) $\rho = \frac{14}{7 - 7\cos\varphi}$.

$\triangleleft$ Приведем наши уравнения к полярному уравнению линий второго порядка.

а) $\rho = \frac{10}{5 - 2\cos\varphi} = \frac{2}{1 - \frac{2}{5}\cos\varphi}$. Откуда $\varepsilon = \frac{2}{5}$ и $0 \le \varepsilon < 1$. Следовательно, кривая в полярных координатах задает эллипс.

б) $\rho = \frac{12}{3 - 4\cos\varphi} = \frac{4}{1 - \frac{4}{3}\cos\varphi}$. Откуда $\varepsilon = \frac{4}{3}$ и $\varepsilon > 1$. Следовательно, кривая в полярных координатах задает гиперболу.

в) $\rho = \dfrac{14}{7-7\cos\varphi} = \dfrac{2}{1-\cos\varphi}$. Откуда $\varepsilon = 1$. Следовательно, кривая в полярных координатах задает параболу с параметром $p = 2$. ▷

2.4 Преобразование уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

2.4.1 Классификационная теорема линий второго порядка

Кривая второго порядка – геометрическое место точек плоскости, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (2.1)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Теорема 2.3. (*Классификационная теорема линий второго порядка***)**

Общее уравнение второго порядка (2.1), заданное относительно ПДСК, определяет одну из следующих девяти линий, заданных следующими каноническими уравнениями:

Группа I (имеют единственный центр):

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс (действительных решений нет);

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – вырожденный эллипс, две мнимые пересекающиеся прямые (действительные решения – точка – начало координат);

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ – гипербола («+» обычная гипербола, «–» сопряженная к данной гиперболе гипербола);

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – вырожденная гипербола, две пересекающиеся прямые.

Группа II (не имеют центра):

6) $x^2 = 2py,\ p > 0$ – парабола (существует еще три канонических уравнения параболы $x^2 = -2py,\ y^2 = \pm 2px$).

Группа III (имеют прямую центров ось *Oy*):

7) $x^2 = a^2, a \neq 0$ – две параллельные прямые, вырожденная парабола;

8) $x^2 = -a^2, a \neq 0$ – две мнимые параллельные прямые;

9) $x^2 = 0$ – две совпадающие (слившиеся) прямые.

Система для нахождения центра канонической системы координат в случае, когда линия центральная (имеет единственный центр, он же центр симметрии линии):

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Система, дающая выражение старых координат через новые при повороте на угол φ:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi, \\ y = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.3}$$

Формула для нахождения угла φ:

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{2.4}$$

Выражение для координат базисных векторов канонической системы координат:

$$\vec{e}_1(\cos\varphi, \sin\varphi),\ \vec{e}_2(-\sin\varphi, \cos\varphi). \tag{2.5}$$

2.4.2 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, с помощью преобразования координат

Пусть дано уравнение (2.1) линии второго порядка. Выписываем коэффициенты $a_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$, учитывая, что в уравнении (2.1) некоторые из них стоят с множителем 2. Вычисляем определитель $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ и определяем, какой случай нам выбрать. Если $D \neq 0$, то линия *центральная* (имеет единственный центр, центр симметрии, центр канонической системы координат), если $D = 0$, то линия не обладает единственным центром (либо нет центра вообще, либо прямая линия центров), так называемая линия *параболического типа*.

1-й случай (Группа I) $D \neq 0$.

Находим центр $O'(x_0, y_0)$ из системы (2.2) и переходим к уравнению в системе координат $O'x'y'$

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \tag{2.6}$$

где $a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$.

В уравнении (2.6) коэффициенты при квадратах переменных остались прежние, поменялся только коэффициент a'_{33}.

Если в (2.6) $a_{12} = 0$, то в системе координат $O'x'y'$ уже имеем канонический вид уравнения, который надо слегка преобразовать до узнаваемого. Каноническая система координат будет состоять из найденной точки $O'(x_0, y_0)$ и прежних базисных векторов $\vec{e}_1(1, 0), \vec{e}_2(0, 1)$.

Если в (2.6) $a_{12} \neq 0$, то делаем поворот на угол φ системы координат $O'x'y'$, получая систему координат $O'\tilde{x}\tilde{y}$. Для этого находим $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ из (2.4), используя формулы:

$$\operatorname{ctg} 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{A}{B}, \ \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} = \frac{1}{\sin^2 2\varphi} - 1 = \frac{A^2}{B^2}.$$

Отсюда выражаем

$$\sin^2 2\varphi = \frac{B^2}{A^2 + B^2}, \ \cos^2 2\varphi = 1 - \frac{B^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2}{A^2 + B^2}$$

Извлекая корень квадратный, получаем два значения для $\sin 2\varphi$ и два значения для $\cos 2\varphi$. Принято выражение для $\cos 2\varphi$ брать со знаком «+», выражение для $\sin 2\varphi$ с тем же знаком, что и у $\operatorname{ctg} 2\varphi$.

Далее из формул

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1, \ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi, \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

находим $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Введем соглашение – брать $\cos\varphi$ из формулы для $\cos 2\varphi$ со знаком «+» (острый угол φ).

Замечание 2.1. Данное соглашение о знаках является чисто условным, так как возможны четыре расположения базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ канонической системы координат: когда положительными будут координаты у точек первого, второго, третьего и четвертого квадрантов соответственно.

Далее записываем преобразованное уравнение нашей линии в системе координат $O'\tilde{x}\tilde{y}$, которая получается из системы координат $O'x'y'$ поворотом на вычисленный угол φ, в следующем виде

$$\tilde{a}_{11}\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{22}\tilde{y}^2 + a'_{33} = 0, \tag{2.7}$$

где $\tilde{a}_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$;

$\tilde{a}_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$.

Уравнение (2.7) арифметическими преобразованиями приводим к одному из пяти канонических видов *Группы I*, указанных в классификационной теореме. Выписываем каноническую систему координат, состоящую из найденной точки $O'(x_0, y_0)$ и базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, координаты которых выписываем по формулам (2.5).

<u>2-й случай *(Группы II, III)*</u> $D = 0$.

Если в уравнении (2.1) $a_{12} = 0$, то либо $a_{11} = 0$, либо $a_{22} = 0$, так как $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, и мы можем арифметическими преобразованиями, выделяя полный квадрат, привести уравнение (2.1) к каноническому виду, из которого узнать центр смещенной при параллельном переносе системы координат, а координаты базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ останутся прежними, то есть $\vec{e}_1(1,0), \vec{e}_2(0,1)$.

Наличие ненулевого коэффициента $a_{12} \neq 0$ в уравнении (2.1) говорит нам о том, что надо сделать поворот, а затем параллельный перенос (если коэффициенты a_{13} и a_{23} также ненулевые).

Итак, если в (2.1) $a_{12} \neq 0$, то мы переходим к следующему уравнению нашей линии в системе координат $O'\tilde{x}\tilde{y}$:

$$\tilde{a}_{11}\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{22}\tilde{y}^2 + 2\tilde{a}_{13}\tilde{x} + 2\tilde{a}_{23}\tilde{y} + a_{33} = 0, \qquad (2.8)$$

где $\tilde{a}_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$;

$\tilde{a}_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$;

$\tilde{a}_{13} = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi$;

$\tilde{a}_{23} = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi$,

где $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ найдены из формул (2.4).

В уравнении (2.8) получится либо $\tilde{a}_{11} = 0$, либо $\tilde{a}_{22} = 0$.

Далее арифметическими преобразованиями, выделяя полный квадрат переменных, где это требуется, приводим уравнение (2.8) к виду, из которого находим координаты центра канонической системы координат в $O\tilde{x}\tilde{y}$. Для того чтобы найти координаты того же самого центра в системе Oxy, используем формулы преобразования координат при повороте (2.3).

Пример 2.2. Определить тип линии $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат.

$\lhd$ Выписываем коэффициенты a_{ij} данного уравнения, не забывая поделить на двойку те коэффициенты, которые в (2.1) стоят с множителем 2. $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{21} = -3$, $a_{33} = 25$.

Вычисляем $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$. Следовательно, линия нецентральная, и мы переходим ко второму случаю.

Здесь $a_{12} = -1 \neq 0$, следовательно, необходимо сделать поворот, и мы вычисляем по формуле (2.4) $\operatorname{ctg} 2\phi = \dfrac{1-1}{2(-1)} = 0$.

В данном случае можно взять $\cos 2\varphi = 0$, $\sin 2\varphi = 1$.

Поскольку $\cos\varphi = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1+0}{2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (берем со знаком «+»), таким образом $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Из формулы $\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$, получаем $\sin\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (берем со знаком «+», так как $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi$, у нас $\sin 2\varphi = 1$), таким образом $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Высчитываем коэффициенты $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$, $\tilde{a}_{13}$, $\tilde{a}_{23}$ по формулам (2.8)

$$\tilde{a}_{11} = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0,\ \tilde{a}_{22} = 1\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

$$\tilde{a}_{13} = (-5)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\sqrt{2}},\ \tilde{a}_{23} = -(-5)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Тем самым по формуле (2.8) получаем уравнение нашей линии в следующем виде:

$$0\cdot\tilde{x}^2 + 2\cdot\tilde{y}^2 + 2\left(-\frac{8}{\sqrt{2}}\right)\cdot\tilde{x} + 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot\tilde{y} + 25 = 0.$$

Приводим уравнение к каноническому виду, выделяя полный квадрат по $\tilde{y}$:

$$2\left(\tilde{y}^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{1^2}{\sqrt{2}^2}\right) = \frac{16}{\sqrt{2}}\tilde{x} - 25,$$

$$2\left(\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{16}{\sqrt{2}}\tilde{x} - 25,$$

$$2\cdot\left(\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16}{\sqrt{2}}\cdot\left(\tilde{x} - 24\cdot\frac{\sqrt{2}}{16}\right)$$

Получаем каноническое уравнение

$$\left(\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{2}\cdot\left(\tilde{x} - 24\cdot\frac{\sqrt{2}}{16}\right).$$

Или, делая замену переменных, получаем уравнение $\tilde{y}'^2 = 4\sqrt{2}\cdot\tilde{x}'$ в системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}$, где

$$\tilde{x}' = \tilde{x} - \frac{3}{\sqrt{2}},\ \tilde{y}' = \tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

По теореме 2.3 данное уравнение представляет собой параболу.

Центр канонической системы координат в системе $O\tilde{x}\tilde{y}$ имеет координаты $O'\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Найдем его координаты в системе Oxy по формулам (2.3)

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2, \\ y = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $O'(2,1)$.

Ответ: $\tilde{y}'^2 = 4\sqrt{2}\cdot\tilde{x}'$ – парабола (рисунок 2.3), каноническая система координат $O'(2,1)$, $e_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ▷

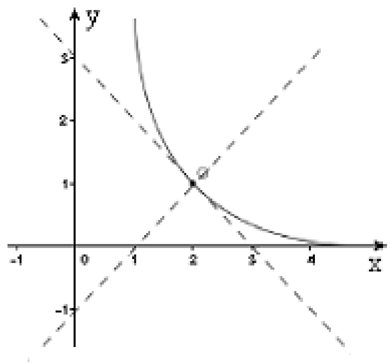

Рисунок 2.3

2.4.3 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью инвариантов

Величина или какой-либо объект, не меняющийся при тех или иных преобразованиях, называется *инвариантом* этих преобразований (например, площадь тележки – инвариант движения, порядок алгебраической линии – инвариант движения).

Введем следующие *инварианты*:

– инварианты относительно *поворота* и *сдвига* системы координат:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};\; D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2;\; I = a_{11} + a_{22}.$$

– инвариант относительно *поворота системы координат* (*полуинвариант*):

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения $I(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$ или $\lambda^2 - I\lambda + D = 0$ являются собственными значениями вещественной симметричной матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ и, как следствие этого, всегда вещественны.

Кривая второго порядка называется *невырожденной*, если $\Delta \neq 0$, в противном случае кривая называется *вырожденной*.

Невырожденная кривая второго порядка называется *центральной*, если $D \neq 0$, в противном случае кривая называется *нецентральной*.

Теорема 2.4. (*Признаки типов линий*). Необходимые и достаточные признаки каждого из девяти классов линий второго порядка следующие:

Группа I (имеют единственный центр).

1) эллипс: $D > 0$ и $I \cdot \Delta < 0$;

2) мнимый эллипс: $D > 0$ и $I \cdot \Delta > 0$;

3) две мнимые пересекающиеся прямые: $D > 0$ и $\Delta = 0$;

4) гипербола: $D < 0$ и $\Delta \neq 0$;

5) две пересекающиеся прямые: $D < 0$ и $\Delta = 0$;

Группа II (не имеют центра).

6) парабола: $D = 0$ и $\Delta \neq 0$;

Группа III (имеют прямую центров ось Oy).

7) две параллельные прямые: $D = 0$, $\Delta = 0$ и $B < 0$;

8) две мнимые параллельные прямые: $D = 0$, $\Delta = 0$ и $B > 0$;

9) две совпадающие (слившиеся) прямые: $D = 0$, $\Delta = 0$ и $B = 0$.

Теорема 2.5. Если линия второго порядка задана общим уравнением относительно ПДСК, то её простейшее (каноническое) уравнение имеет вид:

Группа I (линия центральная) (п. 1 – п. 5 теоремы 2.3) ,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{D} = 0, \text{ признак } D \neq 0. \tag{2.9}$$

Группа II (нет центра) (п. 6 теоремы 2.3) ,

$$I \cdot Y^2 + 2\sqrt{-\frac{\Delta}{I}} X = 0, \text{ признак } D = 0,\ \Delta \neq 0. \tag{2.10}$$

Группа III (прямая центров) (п.7 – п. 9 теоремы 2.3) ,

$$I \cdot Y^2 + \frac{B}{I} = 0, \text{ признак } D = 0,\ \Delta = 0. \tag{2.11}$$

Алгоритм приведения к каноническому виду уравнения линии второго порядка с помощью инвариантов

Рассмотрим уравнение линии (2.1). Выписываем коэффициенты $a_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$, учитывая, что в уравнении (2.1) некоторые из них стоят с множителем 2.

Для того чтобы по теореме 2.5 определить, какую группу выбрать, считаем D: если он не равен нулю, то выбираем группу I, считаем I, Δ, находим λ_1 и λ_2, и все необходимые значения подставляем в (2.9). Причем не важно, какой корень брать за λ_1, а какой за λ_2. Полученное уравнение арифметическими преобразованиями приводим к каноническому виду и по теореме 2.3 определяем его.

Если $D = 0$, то считаем Δ. В зависимости от того, нулевой или ненулевой инвариант Δ, выбираем группу II или группу III, вычисляем все, что требуется, записываем уравнение (2.10), или (2.11) соответственно, которое потом определяем по классификационной теореме 2.3.

Замечание 2.3. Данный алгоритм приводит нас только к каноническому уравнению, по которому мы можем определить линию, и не дает нам определить каноническую систему координат.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется эксцентриситетом линий второго порядка?

2 Сформулируйте директоральные свойства эллипса и гиперболы.

3 Укажите общие свойства алгебраических кривых второго порядка.

4 Напишите параметрические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

5 Укажите уравнение линий второго порядка в полярных координатах.

6 Сформулируйте классификационную теорему для линий второго порядка.

7 Как приводится кривая второго порядка к каноническому виду с помощью преобразования координат?

8 Что называется инвариантами преобразования?

9 Опишите алгоритм приведения к каноническому виду уравнений линий второго порядка с помощью инвариантов.

3 Линейные матричные операции

3.1 Понятие матрицы

Прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ *элементов* a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) некоторого множества, называется *матрицей размерности* $m \times n$ и записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где m число строк и n число столбцов.

Матрицы будем обозначать большими латинскими буквами.

Элемент матрицы нумеруется двумя индексами. Первый индекс *i* элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй *j* – номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

3.2 Классификация матриц

Пусть *m* число строк и *n* число столбцов.

1. Если $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной***,** она имеет вид (3.1).

2. Если же $m = n$, то матрица называется *квадратной.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

3. В частности, если $m = 1$, $n > 1$, то матрица называется *матрицей-строкой:* $(a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$

4. Если же $m > 1$, $n = 1$, то матрица называется *матрицей-столбцом.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

5. Если же $m = 1$, $n = 1$, то матрица называется *матрицей – числом*: (a_{11})

6. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой матрицей*.

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Квадратная матрица называется:

– *единичной*, если все элементы нули, а на главной диагонали стоят единицы

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

– *треугольной*, если все элементы выше (ниже) главной диагонали нули:

а) верхняя $A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; б) нижняя $B_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

– *диагональной*, если все элементы нулевые, кроме элементов главной диагонали

$$C_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Число строк в квадратной матрице называют *порядком* такой матрицы. Например, матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица второго порядка, а матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ есть квадратная матрица третьего порядка.

Две матрицы A и B называются *равными* ($A = B$), если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны, то есть $a_{ij}=b_{ij}$.

Так, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, то $A=B$.

3.3 Операция транспонирования матриц

Если в матрице A вида (3.1) сделать все строки столбцами с тем же номером, то получим матрицу

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую называют *транспонированной* к матрице A.

Свойства транспонирования матриц

1. $(A^t)^t = A$.

2. $(A+B)^t = A^t + B^t$.

3. $(AB)^t = B^t A^t$.

4. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Пример 3.1. Найти $2A^t + (AB)^t$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\triangleleft \quad 2A^t + (AB)^t = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t + \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^t = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}. \triangleright$$

3.4 Операция сложения матриц и её свойства

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Обозначается: $A + B = C$.

Пример 3.2. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Разностью двух матриц A и B размерности $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$ такая, что $A = B + C$. Обозначается: $A - B = C$. Из определения следует, что элементы матрицы C равны разности соответствующих элементов матриц A и B.

Пример 3.3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Свойства сложения матриц

1. Сложение матриц коммутативно, то есть $A + B = B + A$ для любых матриц A и B размера $m \times n$.

2. Сложение матриц ассоциативно, то есть $(A + B) + C = A + (B + C)$ для любых матриц A, B, C одинаковой размерности.

3. $A + O = O + A = A$ для любой матрицы A размерности, совпадающей с размерностью нулевой матрицы O.

3.5 Операция умножения матрицы на число

Произведением матрицы A на число α называется матрица αA, элементы которой равны произведению числа α на соответствующие элементы матрицы A.

Пример 3.4. Вычислите $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.6 Произведение матриц и его свойства

Произведением матрицы A размерности $m \times n$ и матрицы B размерности $n \times k$ называется матрица C размерности $m \times k$, элементы которой c_{ij} вычисляются как сумма произведений соответствующих элементов a_{il} i-й строки матрицы A и элементов b_{lj} j-го столбца матрицы B, то есть $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$; $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Пример 3.5.

$$1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -12 & -10 \end{pmatrix};$$

$$2)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

1. Умножение матриц некоммутативно, то есть $AB \neq BA$.

2. Умножение матриц ассоциативно, то есть $A(BC) = (AB)C$, если такие произведения существуют.

3. Если A – матрица размера $m \times n$, B – матрица размера $n \times k$, то $A \cdot E_n = A$, $E_n \cdot B = B$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется матрицей? Укажите виды матриц.
2 Как производится операция транспонирования и ее свойства?
3 Сформулируйте операцию сложения матриц и ее свойство.
4 Как производится умножение матрицы на скаляр?
5 Как производится операция произведения двух матриц?
6 Укажите свойства произведения двух матриц.

4 Детерминанты квадратных матриц

4.1 Понятие определителя квадратной матрицы

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.1)$$

и вычисляемое согласно указанным ниже правилам, по заданным числам $a_{ij}\,(i,\, j = \overline{1, n})$, которые называются *элементами определителя*.

Определитель также обозначается: $\det A,\ |A|,\ \Delta_A$.

4.2 Методы вычисления определителей

4.2.1 Определители второго порядка

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка, соответствующим матрице A, называется число, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ*, а элементы a_{12}, a_{21} – *побочную, определителя* $|A|$.

Пример 4.1. $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = -28 + 6 = -22.$

4.2.2 Определители третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице A, называется число, вычисляемое по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства следует брать со знаком «плюс», а какие – со знаком «минус», следует применить правило, называемое *правилом треугольника* (рисунок 4.1).

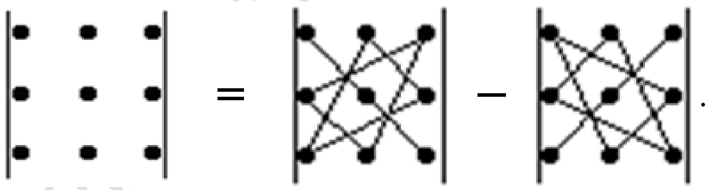

Рисунок 4.1

Правило Саррюса – метод вычисления определителя матрицы третьего порядка. Наряду с правилом треугольника оно призвано внести в процесс вычисления определителя наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки. Названо по имени французского математика Пьера Фредерика Саррюса.

Определитель находится суммированием шести произведений из трёх элементов. Действие выполняется согласно схеме (рисунок 4.2).

Первые два столбца матрицы записываются справа возле матрицы. Произведения элементов, стоящих на линиях со знаком «плюс», складываются, затем складываются произведения элементов, находящихся на линиях со знаком «минус»:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

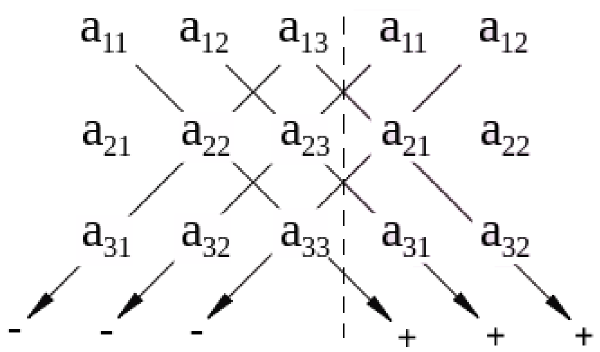

Рисунок 4.2

Данный метод применим лишь для определителей третьего порядка, вычислять методом Саррюса определители более высоких порядков нельзя.

Пример 4.2.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 4 - 0 + 2 + 6 = 8.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$ то есть $|E_3| = 1.$

4.3 Понятие минора

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка Δ_n вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 4.3. Вычислим минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

◃ Вычислим минор M_{23}:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2.$$

Тогда $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 2.$ ▹

4.4 Разложение определителя по строкам и столбцам

1) Если порядок $n=1$, то матрица имеет вид $A=a_{11}$, следовательно, определитель $\det A = a_{11}$.

2) Если порядок $n>1$, то матрица A имеет вид (3.2), определитель (4.1) вычисляется:

а) разложением по i-й строке

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} M_{ik} ;$$

б) разложением по j-му столбцу

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot (-1)^{k+j} M_{kj} .$$

Замечание 4.1. Если в определителе все элементы какой-либо строки (столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя его удобно разложить по элементам этой строки (столбца).

4.5 Свойства определителей

Свойство 4.1. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, то есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} .$$

Свойство 4.2. Определитель матрицы с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю.

Свойство 4.3. При транспонировании матрицы определитель не изменяется, то есть

$$|A| = |A^t| .$$

Свойство 4.4. Если матрица B получается из матрицы A умножением каждого элемента некоторой строки на число k, то

$$|B| = k|A| .$$

Свойство 4.5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{k1}+\bar{a}_{k1} & a_{k2}+\bar{a}_{k2} & \dots & a_{kn}+\bar{a}_{kn} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{k1} & \bar{a}_{k2} & \dots & \bar{a}_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Свойство 4.6. Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух строк, то $|B| = -|A|$.

Свойство 4.7. Определитель матрицы с пропорциональными строками равен нулю, в частности, нулю равен определитель матрицы с двумя одинаковыми строками.

Свойство 4.8. Определитель матрицы не изменяется, если к элементам одной строки прибавить элементы другой строки матрицы, умноженные на некоторое число.

Замечание 4.2. Так, как по свойству 4.3 определитель матрицы не меняется при транспонировании, то все свойства о строках матрицы верны и для столбцов.

Определитель произведения квадратных матриц

Теорема 4.1. Если A и B – квадратные матрицы порядка n, то $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется определителем квадратной матрицы?

2 Как вычисляется определитель матрицы порядка два?

3 Опишите способы вычисления определителя матрицы порядка три.

4 Дайте определение минора элемента.

5 Как находится определитель в общем случае?

6 Сформулируйте способы нахождения определителей разложением по строке либо столбцу.

7 Укажите свойства определителей.

8 Как находится определитель произведения матриц?

5 Обратные матрицы

5.1 Алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Свойства алгебраических дополнений

1. Сумма произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения к элементам этой строки (столбца) равна определителю матрицы:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \det A.$$

2. Сумма произведений элементов строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения к элементам другой строки (столбца) равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{ij} = 0 \text{ для } i \neq k.$$

3. Сумма произведений элементов «произвольной » строки на алгебраические дополнения к элементам i-й строки определителя равна определителю, в котором вместо i-й строки записана «произвольная» строка.

5.2 Понятие обратной матрицы

Обратная матрица служит для решения *матричных уравнений* и заменяет операцию *деления* матриц.

Обратной к квадратной матрице A_n называется матрица A_n^{-1}, которая при умножении на исходную, как справа, так и слева, даёт единичную матрицу, то есть $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Свойства операции обращения:

1) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$;

2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$.

Теорема 5.1. (*о единственности обратной матрицы*)

Если у матрицы A существует обратная матрицы A^{-1}, то она единственна.

Теорема 5.2. (*о существовании обратной матрицы*)

Справедливы следующие утверждения:

1) если матрица A обратима, то существует точно одна ей обратная матрица;

2) обратимая матрица имеет определитель, отличный от нуля;

3) если A и B – обратимые матрицы порядка n, то матрица AB обратима, причём $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*, или *особенной*. Вырожденная матрица не имеет обратной.

Замечание. Только для квадратных невырожденных матриц вводится понятие обратной матрицы.

5.3 Методы вычисления обратной матрицы

5.3.1 Вычисления обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений

Следующая теорема даёт критерий существования обратной матрицы и способ её вычисления.

Теорема 5.3. Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Если $|A| \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементу a_{ij}.

Пример. Найти матрицу, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

◁ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7.$

Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $A_{11} = 3$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$. Тогда $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ▷

5.3.2 Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований

Предположим, что матрица A – невырожденная, и рассмотрим метод нахождения обратной матрицы, основанный на элементарных операциях над строками.

В данном контексте под элементарными преобразованиями понимается:

1) умножение строки на любое ненулевое число;

2) прибавление к одной строке любой другой, предварительно умноженной на любое число.

Лемма. С помощью элементарных преобразований строк матрицы можно поменять местами любые две строки.

$$A=\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\dots\dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{i+j} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}+a_{j1}\dots\dots a_{in}+a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{j-i} . \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}+a_{j1}\dots a_{in}+a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{i1}\dots\dots\dots\dots -a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{i+j}$$

$$\xrightarrow{i+j} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ -a_{i1}\dots -a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \xrightarrow{j(-1)} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}\dots\dots a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\dots\dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

Алгоритм метода

1. Сначала составляется расширенная матрица – присоединением к матрице A единичной матрицы E:

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

2. Затем с помощью элементарных операций над строками расширенная матрица $(A\,|\,E)$ преобразуется к виду $(E\,|\,B)$

$$(E\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right).$$

3. Записываем ответ $A^{-1}=B$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что такое алгебраическое дополнение и его свойство?

2 Что называют обратной матрицей?

3 Сформулируйте теоремы о единственности обратной матрицы и о существовании.

4 Опишите способ нахождения обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

5 Опишите способ нахождения обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.

6 Ранг матрицы

6.1 Понятие минора k-го порядка и базисного минора

Пусть A – матрица размеров $m \times n$, а k – натуральное число, не превосходящее m и n: $k \le \min\{m; n\}$. *Минором k-го порядка* матрицы A называется определитель матрицы k-го порядка, образованной элементами, стоящими на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы A. Миноры k-го порядка будем обозначать следующим образом: $M^{i_1, i_{2 \ldots} i_k}_{j_1, j_{2 \ldots} j_k}$, где номера выбранных строк будем указывать верхними индексами, а номера выбранных столбцов – нижними, располагая их по возрастанию.

В матрице A размеров $m \times n$ минор r-го порядка называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю или их вообще не существует.

6.2 Определение ранга матрицы

Рангом матрицы называется порядок базисного минора. В нулевой матрице базисного минора нет. Поэтому ранг нулевой матрицы, по определению полагают равным нулю. Ранг матрицы A обозначается rgA.

Замечания

6.1. Если в матрице все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и миноры более высокого порядка.

Действительно, раскладывая минор $(k+1)$-го порядка по любой строке, получаем сумму произведений элементов этой строки на миноры k-го порядка, а они равны нулю.

6.2. Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличного от нуля минора этой матрицы.

6.3. Если квадратная матрица невырожденная, то ее ранг равен ее порядку. Если квадратная матрица вырожденная, то ее ранг меньше ее порядка.

6.4. Для ранга применяются также обозначения RgA, $rangA$, $rankA$.

6.5. *Ранг блочной матрицы* определяется как ранг обычной (числовой) матрицы, то есть не обращается внимание на ее блочную структуру. При этом ранг блочной матрицы не меньше рангов ее блоков: $rg(A \mid B) \ge rgA$

и $rg(A|B) \geq rgB$, поскольку все миноры матрицы A (или B) являются также минорами блочной матрицы $(A \mid B)$.

6.3 Линейная зависимость строк и столбцов матрицы

Теорема 6.1 (*необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя*). Для того чтобы определитель был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы один из его столбцов (одна из его строк) был линейной комбинацией остальных столбцов (строк).

Теорема 6.2 (*об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях*). При элементарных преобразованиях столбцов (строк) матрицы ее ранг не меняется.

Следствие 6.1. Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то эту строку (столбец) можно вычеркнуть из матрицы, не изменив при этом ее ранга.

Действительно, такую строку при помощи элементарных преобразований можно сделать нулевой, а нулевая строка не может входить в базисный минор.

Следствие 6.2. Любая невырожденная квадратная матрица является элементарной, другими словами, любая невырожденная квадратная матрица эквивалентна единичной матрице того же порядка.

Замечания 6.6. Следствие 6.2 теоремы можно уточнить следующим образом: любую невырожденную квадратную матрицу, используя элементарные преобразования только ее строк (либо только ее столбцов), можно привести к единичной матрице того же порядка.

Теорема 6.3 (*о ранге матрицы*). Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.

Следствие 6.3. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов:

$$rgA = rgA^T.$$

Следствие 6.4. При элементарных преобразованиях строк матрицы линейная зависимость (или линейная независимость) любой системы столбцов этой матрицы сохраняется.

6.4 Теорема о базисном миноре и критерий вырожденности квадратной матрицы

Теорема 6.4 (*о базисном миноре*). В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.

Теорема 6.5 (*критерий вырожденности квадратной матрицы*). Для квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

1. Хотя бы одна из строк матрицы A является линейной комбинацией остальных строк.

2. Хотя бы один из столбцов матрицы A является линейной комбинацией остальных столбцов.

3. Определитель матрицы A равен нулю, то есть $\det A = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение минора k–го порядка.

2 Какой минор называется базисным?

3 Дайте определение ранга матрицы

4 Сформулируйте необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя матрицы.

5 Сформулируйте теорему о базисном миноре.

6 В чем заключается критерий вырожденности квадратной матрицы?

7 Аксиоматическое определение линейного пространства

7.1 Алгебраические операции

Бинарной алгебраической операцией на множестве X называется отображение декартова квадрата $X \times X$ в X. Если φ: $X \times X \to X$ – бинарная операция на X, то каждой упорядоченной паре (a,b) элементов из $X \times X$ соответствует однозначно определенный элемент $c = \varphi(a,b)$ из X. Бинарную операцию на X обозначают одним из следующих символов: $+, \cdot, \oplus, \circ, \otimes, *$ и т. д. Если вместо φ условимся писать $\circ$, то вместо $c = \varphi(a,b)$ следует писать $c = a \circ b$.

Наиболее часто используются две формы записи операций: аддитивная и мультипликативная. При аддитивной форме записи операцию называют сложением и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a + b$. При мультипликативной форме записи операцию называют умножением и вместо $c = a \circ b$ пишут $c = a \cdot b$ или $c = ab$.

Говорят, что на множестве *определена* бинарная операция (умножения), если $ab \in X$ для всех $a, b \in X$.

7.2 Определение линейного пространства

Поле в общей алгебре – алгебраическая структура, для элементов которой определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль), причём свойства этих операций близки к свойствам обычных числовых операций.

Замечание: хотя названия операций поля взяты из арифметики, следует иметь в виду, что элементы поля не обязательно являются числами, и определения операций могут быть далеки от арифметических.

Если раскрыть указанное выше определение, то множество P с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения + и умножения * ($+ : P \times P \to P$, $* : P \times P \to P$, то есть $\forall\, a,b \in P$ выполняется $(a+b) \in P$ и $(a*b) \in P$) называется *полем* $\langle P,+,* \rangle$, если выполнены следующие аксиомы:

1) коммутативность сложения: $\forall\, a,b \in P \;\; a+b=b+a$;

2) ассоциативность сложения: $\forall\, a,b,c \in P \;\; (a+b)+c=a+(b+c)$;

3) существование нулевого элемента: $\exists 0 \in P$: $\forall\, a \in P \;\; a+0=a$;

4) существование противоположного элемента: $\forall\, a \in P \;\; \exists(-a) \in P$: $a+(-a)=0$;

5) коммутативность умножения: $\forall\, a,b \in P \;\; a*b=b*a$;

6) ассоциативность умножения: $\forall\, a,b,c \in P \;\; (a*b)*c=a*(b*c)$;

7) существование единичного элемента: $\exists e \in P$: $\forall\, a \in P \;\; a*e=a$;

8) существование обратного элемента для любого ненулевого элемента: $\forall\, a \in P : a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in P$: $a*a^{-1}=e$;

9) дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall\, a,b,c \in P$ $(a+b)*c=a*c+b*c$.

Аксиомы 1–4 соответствуют определению коммутативной группы по сложению + над P, аксиомы 5–8 соответствуют определению коммутативной группы по умножению * над $P \setminus \{0\}$, а аксиома 9 связывает операции сложения и умножения и называется дистрибутивным законом.

Примеры полей: 1) Q – рациональные числа; 2) R – вещественные числа; 3) C – комплексные числа; 4) A – алгебраические числа над полем рациональных чисел (подполе в поле C); 5) числа вида $a+b\sqrt{2}$, $a,b \in Q$, относительно обычных операций сложения и умножения; 6) $F(x)$ – поле рациональных функций вида $f(x)/g(x)$, где f и g – многочлены над некоторым полем P (при этом $g \neq 0$, а f и g не имеют общих делителей, кроме констант).

Линейным (векторным) пространством называют непустое множество V с заданными на нём операциями сложения и умножения на число, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $x+y=y+x$, $\forall\ x, y\in V$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x, y, z\in V$;

3) $\exists\ e\in V$, что $\forall\ x\in V\ \ x+e=e+x=x$, ($e$ – нулевой элемент);

4) $\forall x\in V$, $\exists y$ (противоположный к x), что $x+y=e$;

5) $\exists\ 1\in P$, что $1x=x$ (1 – единичный элемент);

6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}$, $\forall x\in V$;

7) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$; $\forall x, y\in V$, $\forall\ \alpha\in\mathbf{C}$;

8) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\forall x\in V$, $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}$.

В дальнейшем под числами будем понимать только действительные числа. Если V – линейное (векторное) пространство, то элементы пространства называют *векторами*.

Нулевой вектор обозначается как $\vec{0}$, а противоположный к x как ($-x$).

7.3 Основные следствия из аксиом линейного пространства

Следствие 7.1. В каждом линейном пространстве нулевой вектор только один.

Следствие 7.2. Для любого вектора x существует только один противоположный вектор.

Следствие 7.3. Произведение любого вектора x на число 0 равно нулевому вектору.

Следствие 7.4. Произведение нулевого вектора на любое число α равно нулевому вектору.

Следствие 7.5. Если произведение любого вектора x на любое число α равно нулевому вектору, то либо $\alpha=0$ либо x – нулевой вектор.

Следствие 7.6. Произведение любого вектора x на –1 равно вектору, противоположному x, то есть $(-1)x=-x$.

Следствие 7.7. В линейном пространстве определено действие вычитание. Вектор x называется разностью векторов b и a, если $x+a=b$, и обозначается $x=b-a$.

7.4 Примеры линейных пространств

1. Множество V^3 (V^2) всех геометрических векторов в пространстве (на плоскости) – векторное пространство над R относительно линейных операций над геометрическими векторами.

2. На множестве $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | \ x_i \in R\}$.

Введём операции $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\forall y = (y_1, y_2, ..., y_n)$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\forall \lambda \in R, \ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Тогда R^n – векторное пространство.

3. Множество М (n, R) всех квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами и операциями сложения матриц и умножения на число является векторным пространством.

4. Множество R[a,b] всех непрерывных на отрезке [a, b] функций с операциями сложения функций и умножения функции на число – векторное пространство.

5. Множество $P_n[x]$ всех многочленов переменной x степени, не превосходящей n, является векторным пространством.

6. Нулевое векторное пространство, то есть пространство, состоящее только из нулевых векторов: $\{\vec{0}\}$.

7. Множество C – векторное пространство, называется множеством комплексных чисел.

7.5 Подпространства линейного пространства

Непустое подмножество L линейного пространства V называется *линейным подпространством* пространства V, если:

1) $x + y \in L, \forall \ x, y \in L$ (подпространство замкнуто по отношению к операции сложения);

2) $\lambda x \in L, \forall \ x \in L$ и любого числа λ (подпространство замкнуто по отношению к операции умножения вектора на число).

Для указания линейного подпространства будем использовать обозначение $L \le V$, а слово «линейное» опускать для краткости.

Замечания

7.1. Условия 1, 2 в определении можно заменить одним условием: $\lambda x + \mu y \in L$, $\forall x, y \in L$ и любых чисел λ и μ.

Разумеется, что здесь и в определении речь идет о произвольных числах из того числового поля, над которым определено пространство V.

7.2. В любом линейном пространстве V имеются два линейных подпространства: а) само пространство V, то есть $V \le V$; б) нулевое подпространство $\{0\}$, состоящее из одного нулевого вектора пространства V, то есть $\{0\} \le$ V.

Эти подпространства называются *несобственными*, а все остальные – *собственными*.

7.3. Любое подпространство L линейного пространства V является его подмножеством: $L \leq V$, следовательно, $L \subset V$, но не всякое подмножество $M \subset \mathrm{V}$ является линейным подпространством, так как оно может оказаться незамкнутым по отношению к линейным операциям.

7.4. Подпространство L линейного пространства V само является линейным пространством с теми же операциями сложения векторов и умножения вектора на число, что и в пространстве V, поскольку для них выполняются аксиомы 1–8.

Примеры линейных подпространств

1. Пространство $\{0\}$, состоящее из одного нулевого вектора пространства V, является подпространством, то есть $\{0\} \leq V$.

2. Пусть V_1, V_2, V_3 – множества векторов (направленных отрезков) на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно. Если прямая принадлежит плоскости, то $V_1 \leq V_2 \leq V_3$.

Однако, множество единичных векторов не является линейным подпространством, так как при умножении вектора на число, не равное единице, получаем вектор, не принадлежащий множеству.

3. В n-мерном арифметическом пространстве R^n рассмотрим множество L «полунулевых» столбцов вида $x = (x_1 \ldots x_m\ 0 \ldots 0)^T$ с последними (n–m) элементами, равными нулю. Сумма «полунулевых» столбцов является столбцом того же вида, то есть операция сложения замкнута в L. Умножение «полунулевого» столбца на число дает «полунулевой» столбец, то есть операция умножения на число замкнута в L. Поэтому $L \leq R^n$, причем $\dim L = m$.

Напротив, подмножество ненулевых столбцов R^n не является линейным подпространством, так как при умножении на нуль получается нулевой столбец, который не принадлежит рассматриваемому множеству.

4. Пространство $\{Ax = 0\}$ решений однородной системы уравнений с n неизвестными является подпространством n-мерного арифметического пространства R^n. Размерность этого подпространства определяется матрицей системы: $\dim\{Ax = 0\} = n - rgA$.

Множество $\{Ax = b\}$ решений неоднородной системы (при $b \neq 0$) не является подпространством R^n, так как сумма двух решений неоднородной системы не будет решением той же системы.

Вопросы для самоконтроля

1 Какие операции называются алгебраическими?

2 Дайте определение поля и приведите его примеры.

3 Сформулируйте определение линейного пространства и приведите примеры.

4 Какие основные следствия вытекают из аксиом линейного пространства?

5 Что такое подпространство линейного пространства и его примеры?

8 Линейная зависимость элементов линейного пространства

8.1 Понятие линейной зависимости и независимости векторов

Пусть V – линейное пространство над полем P. *Системой векторов* называется конечная последовательность векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ пространства V . Часть этой системы называется её подсистемой.

Выражение вида $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, ..., a_n$.

Конечная система векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ пространства V называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ не все равные нулю, что имеет место равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = \vec{0}. \qquad (8.1)$$

Система векторов называется *линейно независимой*, если равенство (8.1) имеет место лишь тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Теорема 8.1. Система $a_1, a_2, ..., a_n \in V$ линейно зависима тогда и только тогда, когда существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ (или C), $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \vec{0}$.

Теорема 8.2. Система $a_1, a_2, ..., a_n \in V$ линейно независима тогда и только тогда, когда из условия $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \vec{0}$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

8.2 Признаки линейной зависимости

Теорема 8.3. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Теорема 8.4. Если в системе векторов имеется два равных вектора, то она линейно зависима.

Теорема 8.5. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора $\vec{a}_i = \lambda\vec{a}_j$, то она линейно зависима.

Теорема 8.6 (*Критерий линейной зависимости*). Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

Теорема 8.7. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему.

Теорема 8.8. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Теорема 8.9. Если система векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ линейно независима, а после присоединения к ней вектора *a* оказывается линейно зависимой, то вектор a можно разложить по векторам $a_1, a_2, ..., a_k$, и притом единственным образом, то есть коэффициенты разложения находятся однозначно.

8.3 Базис и координаты векторов в линейном пространстве

Пусть *V* – линейное пространство над полем P. Если для любого натурального числа *n* в пространстве *V* имеется *n* линейно независимых векторов, то пространство *V* называется *бесконечномерным.*

Пусть пространство *V* не бесконечномерное. Система векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ называется *базисом* пространства *V*, если:

1) эта система линейно независима;

2) любой вектор пространства является линейной комбинацией этих векторов, то есть $\forall\ x \in \mathrm{V},\ x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$.

Теорема 8.10. В любом не бесконечномерном линейном пространстве все базисы состоят из одного и того же числа векторов.

Если $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис пространства *V*, то любой вектор $x \in V$ имеет вид: $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ – *разложение вектора x* по векторам базиса.

В этом случае коэффициенты $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами вектора x* в базисе $a_i, i = \overline{1, n}$ и пишут $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Теорема 8.11. Координаты вектора в заданном базисе определяются однозначно.

Разложение вектора по векторам базиса удобно записывать в матричной форме. Если обозначим

$$(x) = (x_1\ x_2 \ldots x_n),\ [e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix},$$

то разложение $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ является элементом матрицы $(x)[e]$. В этом случае будем писать $x = (x)[e]$.

Матрица (x) называется *координатной строкой* вектора x, а матрица $[e]$ – *базисным столбцом* базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Теорема 8.12. 1. При сложении двух векторов, заданных в одном базисе, соответствующие координаты складываются.

2. При умножении вектора на скаляр его координаты умножаются на этот скаляр.

3. Для любых векторов $x, y \in V_n$ и любого $\alpha \in P$ выполняются равенства $(x + y) = (x) + (y)$, $(\alpha x) = \alpha(x)$.

8.4 Переход от «старого» базиса к «новому» базису

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ «старый» и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ «новый» – два базиса линейного пространства V_n над полем P.

Тогда любой вектор $x \in V_n$ может быть записан в виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_n e_n,$$

$$\text{или } x = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \ldots + \beta_n e'_n.$$

Разложим векторы системы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \ldots \alpha_{1n}e_n, \\ e'_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots \alpha_{2n}e_n, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ e'_n = \alpha_{n1}e_1 + \alpha_{n2}e_2 + \ldots \alpha_{nn}e_n. \end{cases}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Если возьмём базисные столбцы

$$[e]=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} \text{ и } [e']=\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix},$$

то указанная выше система в матричной форме будет иметь вид $[e'] = A[e]$.

Теорема 8.13. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому невырожденная и имеет обратную матрицу.

Более того, если A – матрица перехода от старого базиса к новому, то A^{-1}– матрица перехода от нового базиса к старому.

Следующая теорема устанавливает связь между координатами вектора x в разных базисах.

Теорема 8.14. Пусть (x) – координатная строка вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, (x') – координатная строка вектора x в базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Если A – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, то $(x) = (x')A$, $(x') = (x)A^{-1}$.

8.5 Размерность линейного пространства

Линейное не бесконечномерное пространство V над полем Р называется *n-мерным,* если в нем есть базис, состоящий из n векторов. Число n называется *размерностью* пространства V. Нулевое пространство называется нульмерным. Все n-мерные пространства, $n \in \{0,1,2,\dots\}$, называются конечномерными.

Число n называется *размерностью* пространства V, если в нем:

1) существует n линейно независимых векторов;

2) любые $n + 1$ векторов – линейно зависимы.

В этом случае пишут $dimV = n$ и обозначают V_n. Таким образом, будем n-мерное пространство обозначать через V_n. Если линейное пространство V бесконечномерно, то пишем $dimV = \infty$.

Линейные пространства V_3, V_2, V_1, P_n, $M(n,P)$, $P_n[x]$ конечномерны. Линейные пространства $P[x]$, $C[a,b]$ являются бесконечномерными.

8.6 Связь между размерностью и базисом

Теорема 8.15. Для любого n-мерного линейного пространства справедливы следующие утверждения:

1) каждую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса;

2) любая линейно независимая система из n векторов является базисом.

Следствие. В линейном пространстве V_n любая система из $n+1$ векторов является линейно зависимой.

Вопросы для самоконтроля

1 Что такое линейная комбинация векторов?

2 Дайте определение линейной зависимости и линейной независимости векторов.

3 Сформулируйте основные признаки линейной зависимости векторов.

4 Что называется базисом векторного пространства?

5 Как записываются координаты вектора в некотором базисе?

6 Как осуществляется переход от «старого» базиса к «новому» базису?

7 Сформулируйте определение размерности линейного пространства.

8 Укажите связь между размерностью и базисом линейного пространства.

Литература

1 Ильин, В. А. Аналитическая геометрия / В. А.Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 223 с.

2 Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

3 Беклемешев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

4 Умнов, А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. Е. Умнов. – М. : МФТИ, 2011. – 570 с.

5 Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л. Л. Березкина. – Минск : РИВШ, 2012. – 354 с.

6 Аналитическая геометрия в примерах и задачах / Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.] – Минск : РИВШ, 2008. – 156 с.

7 Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун [и др.] – Минск : Універсітетскае, 1999. – 302 с.

8 Дадаян, А. А. Алгебра и геометрия : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов / А. А. Дадаян, В. А. Дударенко. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 288 с.

9 Рублев, А. Н. Курс линейнеой алгебры и аналитической геометрии : учебник для студентов вузов / А. Н. Рублев. – М. : Высшая школа, 1972. – 421 с.

10 Высшая математика : практическое руководство : в 3 ч. / А. В. Бузланов [и др.] – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.

11 Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. Ч.1 / М. В. Милованов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 302 с.

12 Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. Ч. 2 / М. В. Милованов, [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – 300 с.

13 Шикин, Е. В. Линейные пространства и отображения / Е. В. Шикин. – М. : МГУ, 1987. – 302 с.

14 Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай / В. Н. Русак [і інш.]. – Мінск : Вышэйшая школа, 1994. – 431 с.

15 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.

16 Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 186 с.

Производственно-практическое издание

Бородич Тимур Викторович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ

Практическое руководство

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 26.10.2016. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1 . Тираж 25 экз. Заказ 615.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.