ТОМ 53, ВЫП. 2 • ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ • 1982 год

УДК 535.391.01

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ СРЕДЫ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В. В. Яцышен

В работе исследуется проблема отражения электромагнитной волны от среды вблизи экситонного резонанса для общего случая наклонного падения. Рассматривается вопрос о выполнимости закона сохранения энергии в случае, когда в среде с пространственной дисперсией возникает «дополнительная» волна. Поскольку распределение энергии между отраженной и преломленной волнами регулируется системой граничных условий, то найдены ограничения на вид дополнительного условия и остальных граничных условий, при которых закон сохранения энергии оказывается выполненным. Показано, что система неоднородных граничных условий, включающая неоднородное дополнительное граничное условие и условие скачка магнитного поля на границе, является внутренне непротиворечивой при определенном соотношении между неоднородными членами обоих условий.

Вопросу о граничных условиях в теории пространственной дисперсии (ПД) уделялось много внимания [1-2, 4-7]. В большинстве работ для анализа проблемы отражения вводится «дополнительное граничное условие» (ДГУ). Однако весьма важным является вопрос об ограничении, которое накладывает закон сохранения энергии на вид системы граничных условий (а значит и на вид ДГУ). Для неоднородных граничных условий такой вопрос был впервые поставлен и решен для частного случая нормального падения в работе [8]. В настоящей работе рассматривается общий случай наклонного падения.

Запишем систему уравнений, описывающих распространение плоской монохроматической волны в диэлектрике вблизи изолированного экситонного резонанса. Рассмотрим случай, когда вектор электрического поля волны направлен перпендикулярно плоскости падения.

Тогда поле и поляризацию в среде можно представить в виде

$$E_y = E_y(z)\exp(ik_\parallel x),\quad P_y = P_y(z)\exp(ik_\parallel x), \tag{1}$$

где $k_\parallel$ — тангенциальная компонента волнового вектора $\mathbf{k}$, которая при отражении и преломлении является величиной постоянной. Тогда система уравнений, описывающая взаимодействие излучения с веществом, записывается в следующем виде

$$\frac{\hbar\omega_0}{m_e^*}\cdot\frac{\partial^2 P_y}{\partial z^2} - \frac{\hbar\omega_0}{m_e^*}k_\parallel^2 P_y - \frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} - \omega_0^2 P_y = -\frac{\omega_p^2}{4\pi}E_y, \tag{2а}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - k_\parallel^2 E_y - \frac{\varepsilon_0}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2}. \tag{2б}$$

Здесь P_y и E_y — компоненты макроскопической поляризации и поля в среде, ω_0 — экситонная частота, m_e^* — эффективная масса экситона, ε_0 — часть диэлектрической постоянной, связанная с другими переходами, ω_p — «плазменная» частота [1]. При этом мы пренебрегаем потерями энергии на диссипацию, возбуждение поверхностных поляритонов, что является оправданным по крайней мере в первом приближении (при исследовании возможных значений параметров, входящих в систему граничных условий).

Систему граничных условий запишем в виде

$$P_y \big|_{z=0+} + \frac{1}{\frac{\omega}{c} T} \cdot \frac{\partial P_y}{\partial z} \bigg|_{z=0+} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \cdot \frac{\eta}{T} E_y \big|_{z=0+}, \tag{3а}$$

$$E_y \big|_{z=0+} - E_y \big|_{z=0-} = 0, \tag{3б}$$

$$H_x \big|_{z=0+} - H_x \big|_{z=0-} = 4\pi i \eta' \beta P_y \big|_{z=0+}. \tag{3в}$$

Такая система граничных условий возникает в модели осцилляторов, если считать, что поверхностный слой осцилляторов обладает зарядом, плотность которого, приходящаяся на один атомный слой, отлична от объемной [1, 8]. Здесь T и η, η' — есть вещественные постоянные, $\beta = \hbar\omega_0 c^2/m_e^* \omega^2$. Член $4\pi i \eta' \beta P_y$ в правой части (3в) отражает вклад в излучение поверхностных токов, возникших при движении поверхностного заряда.

Мы не будем далее подробно рассматривать микроскопическую модель, а исследуем какие ограничения накладывает закон сохранения энергии на входящие в систему (3) вещественные постоянные η, η' и T. Такое рассмотрение является макроскопическим и будет справедливо и для других моделей, приводящих к неоднородным граничным условиям вида (3) в теории ПД.

Предположим, что на полуограниченную среду, обладающую ПД, под углом θ_i падает электромагнитная волна. Из классической оптики известно [3], что при наклонном падении сохраняющейся величиной является нормальная компонента вектора Пойнтинга. Запишем для нашего случая вектор Пойнтинга для падающей $\mathbf{E}_0$, отраженной $\mathbf{E}_R$ и двух преломленных $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ волн.

Имеем

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \sin\theta_i \cdot \mathbf{n}_x + \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \cos\theta_i \cdot \mathbf{n}_z, \tag{4а}$$

$$\mathbf{S}_R = \frac{c}{8\pi} |E_R|^2 \sin\theta_i \cdot \mathbf{n}_x - \frac{c}{8\pi} |E_R|^2 \cos\theta_i \cdot \mathbf{n}_z, \tag{4б}$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \zeta_1 |E_1|^2 \mathbf{n}_z + \frac{c}{8\pi} |E_1|^2 \sin\theta_i \cdot \mathbf{n}_x, \tag{4в}$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{c\zeta^2}{8\pi} |E_2|^2 \mathbf{n}_z + \frac{c}{8\pi} |E_2|^2 \sin\theta_i \cdot \mathbf{n}_x, \tag{4г}$$

$$\zeta_j = c k_{jz}/\omega,$$

$\mathbf{k}_j$ — волновой вектор j-й преломленной волны ($j = 1, 2$).

При учете ПД необходимо принимать во внимание поток механической энергии [1]. Нас интересует нормальная компонента потока энергии. Нетрудно показать, что в нашем случае выражение для потока механической энергии j-й волны дается выражением

$$S_j^z = \frac{c\zeta_j}{8\pi} \frac{\beta\omega_p^2}{\Phi_j^2} |E_j|^2, \tag{4д}$$

$$\Phi_j = \Delta + \beta(\zeta_j^2 + \sin^2\theta_i), \quad \Delta = \omega_0^2 - \omega^2. \tag{5}$$

Для случая, когда в среде распространяется две волны, закон сохранения энергии записывается в виде

$$S_z^R + S_z^{(1)\,\text{эм}} + S_z^{(1)\,\text{мех}} + S_n^{(2)\,\text{эм}} + S_z^{(2)\,\text{мех}} = S_z^0. \tag{6}$$

Здесь $S_z^{(j)\,\text{мех}}$, $S_z^{(j)\,\text{эм}}$ соответственно электромагнитная и механическая часть вектора Пойнтинга j-й волны. Подставляя в это соотношение выражение для компонент векторов Пойнтинга, мы получим окончательно следующее условие:

$$|E_R|^2 \cos\theta_i + \zeta_1 |E_1|^2 [1 + (\beta\omega_p^2/\Phi_1^2)] + \zeta_2 |E_2|^2 [1 + (\beta\omega_p^2/\Phi_2^2)] = |E_0|^2 \cos\theta_i. \tag{7}$$

Отметим, что ситуация, когда в среде с ПД распространяются две преломленные волны, реализуется в случае $\omega > \omega_l$, где

$$\omega_l = \sqrt{\omega_0^2 + (\omega_p^2/\varepsilon_0) + Dk_\parallel^2}\,, \quad D = c^2\beta/\omega^2. \tag{8}$$

Когда $\omega < \omega_l$ — в среде лишь одна из волн является распространяющейся, другая же — экспоненциально затухает вглубь среды и энергии не переносит. Пусть распространяющейся волной является волна $j = 2$. Тогда условие равенства потоков энергии принимает вид

$$|E_R|^2 \cos\theta_i + \zeta_2 |E_2|^2 [1 + (\beta\omega_p^2/\Phi_2^2)] = |E_0|^2 \cos\theta_i. \tag{9}$$

Теперь необходимо решить граничную задачу об отражении электромагнитной волны от среды с ПД при граничных условиях (3). Мы не будем подробно останавливаться на процедуре решения этой задачи, а запишем лишь основные соотношения. Из дополнительного граничного условия (3а) получаем следующее соотношение между амплитудами волн

$$E_1 + \alpha E_2 = 0, \tag{10}$$

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}\, u, \tag{11}$$

$$u = u' + iu'' = \frac{T + i\zeta_2 - \eta\Phi_2}{T + i\zeta_1 - \eta\Phi_1}. \tag{12}$$

Используя связь (10) и оставшиеся граничные условия системы (3), мы получаем следующие выражения для амплитуды волн

$$E_R = \frac{\cos\theta_i - \zeta_2 - i\psi_2 - \alpha(\cos\theta_i - i\psi_1 - \zeta_1)}{\cos\theta_i + \zeta_2 + i\psi_2 - \alpha(\cos\theta_i + i\psi_1 + \zeta_1)}\, E_0, \tag{13}$$

$$E_2 = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \zeta_2 + i\psi_2 - \alpha(\cos\theta_i + i\psi_1 + \zeta_1)}\, E_0, \tag{14}$$

$$E_1 = -\frac{2\alpha\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \zeta_2 + i\psi_2 - \alpha(\cos\theta_i + i\psi_1 + \zeta_1)}\, E_0. \tag{15}$$

Здесь

$$\psi_j = \eta'\beta\omega_p^2/\Phi_j, \quad (j = 1,\ 2). \tag{16}$$

Далее исследуем энергетические соотношения для полей (13) — (15).

1. $\omega > \omega_l$. В этом случае энергия переносится волнами 1 и 2. Энергетический баланс выражается уравнением (7). Подставим в это уравнение выражение для амплитуд (13) — (15). После проведения простых преобразований, получим

$$4\cos\theta_i\,[\alpha'(\zeta_1 + \zeta_2) - \alpha''(\psi_1 - \psi_2) + (\zeta_1|\alpha|^2\beta\omega_p^2/\Phi_1^2) + (\zeta_2\beta\omega_p^2/\Phi_1^2) + (\zeta_2\beta\omega_p^2/\Phi_2^2)] = 0. \tag{17}$$

Подставляя сюда значения α', α'', $|\alpha|^2$, которые находим при помощи определения (11), а также пользуясь тождеством $\Phi_1\Phi_2 = -\beta\omega_p^2$, получим окончательно [1]

$$4\beta\omega_p^2\cos\theta_i\,\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Phi_2^2}\cdot\frac{\zeta_2\mu_1 - \zeta_1\mu_2}{\mu_1^2 + \zeta_1^2}\,(\eta - \eta') = 0, \tag{18}$$

где

$$\mu_1 = T - \eta\Phi_1, \quad \mu_2 = T - \eta\Phi_2. \tag{18a}$$

Поскольку $\Phi_2 \neq \Phi_1$, $\zeta_2\mu_1 \neq \zeta_1\mu_2$ в общем случае, то получим следующее условие: требование закона сохранения энергии (6) оказывается выполненным, если между правыми частями граничных условий (3а) и (3в) существует связь

$$\eta = \eta'. \tag{19}$$

---

[1] Доказательство этого тождества можно провести по аналогии с доказательством, приведенным в Приложении работы [8].

Таким образом, выполнение условия (19) обеспечивает внутреннюю непротиворечивость системы граничных условий (3), поскольку при этом соблюдается закон сохранения энергии. В этой связи необходимо подчеркнуть следующее обстоятельство. Постановка вопроса о выполнимости закона сохранения энергии в задаче об отражении электромагнитной волны от среды с ПД является важной, поскольку возникающая в этом случае «дополнительная волна» переносит энергию. При этом распределение энергии между отраженной и преломленными волнами регулируется условиями на границе, т. е. системой граничных условий (3). Ясно, что закон сохранения энергии должен наложить определенные требования на входящие в систему граничных условий параметры. Как было показано, в случае $\omega > \omega_l$, эти требования сводятся к условию (19) в предположении вещественности параметров η, η', T. Покажем, что и для случая $\omega < \omega_l$ соотношение (19) гарантирует выполнимость закона сохранения энергии и, тем самым, для любых частот система граничных условий (3) будет внутренне непротиворечивой.

2. $\omega < \omega_l$. В этом случае одна из величин ζ_1, ζ_2 является чисто мнимой. Пусть

$$\zeta_1 = iq_1. \tag{20}$$

Тогда амплитуды полей E_R и E_2 (только эти волны в данном случае будут переносить энергию) перепишутся в виде

$$E_R = \frac{\cos\theta_i - \zeta_2 - i\varphi_2 - \alpha(\cos\theta_i - i\varphi_1)}{\cos\theta_i + \zeta_2 + i\varphi_2 - \alpha(\cos\theta_i + i\varphi_1)} E_0, \tag{21}$$

$$E_2 = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \zeta_2 + i\varphi_2 - \alpha(\cos\theta_i + i\varphi_1)} E_0, \tag{22}$$

где $\varphi_1 = q_1 + (\eta'\beta\omega_p^2/'\Phi_1)$, $\varphi_2 = \psi_2$, а величина u перепишется в виде

$$u = \frac{\mu_2}{\mu_1} + i\frac{\zeta_2}{\mu_1}, \tag{23а}$$

$$\mu_1 = T - \eta\Phi_1 - q_1, \quad \mu_2 = T - \eta\Phi_2. \tag{23б}$$

Подставим теперь значение амплитуд E_R и E_2 в уравнение (9), описывающее энергетический баланс на границе. После проведения ряда упрощений, мы получим

$$4\cos\theta_i \left[\zeta_2\alpha' - \alpha''(\varphi_1 - \varphi_2) + \zeta_2\frac{\beta\omega_p^2}{\Phi_2^2}\right] = 0. \tag{24}$$

Подставим сюда значения α', α'' и воспользуемся тождеством $\Phi_1\Phi_2 = -\beta\omega_p^2$, мы получим окончательно

$$4\cos\theta_i \frac{\zeta_2\beta\omega_p^2}{\mu\Phi_2^2}(\Phi_2 - \Phi_1)(\eta - \eta') = 0. \tag{25}$$

Откуда получаем $\eta = \eta'$, поскольку $\Phi_2 \neq \Phi_1$. Тем самым показано, что при соблюдении условия (19) закон сохранения энергии оказывается выполненным.

Таким образом, для наиболее общего случая неоднородных граничных условий в теории пространственной дисперсии показано, что для любых вещественных значений $\eta = \eta'$, T система граничных условий (3) является внутренне непротиворечивой. Поэтому этой системой можно пользоваться при анализе коэффициентов отражения и прохождения. Для случая нормального падения такой анализ был проведен в работе [9]. Отметим, что дальнейшая конкретизация значений параметров η, T может быть проведена путем сравнения расчетных значений коэффициента отражения (и преломления) с данными эксперимента. Отметим, что параметры T, η в системе граничных условий определяются характером взаимодействия экситонов с поверхностью кристалла. При этом данные параметры могут быть вычислены только в рамках микротеории. Параметр T в модели осцилляторов явно учитывает отличие собственных частот граничных и объемных осцилляторов, и в работе [8] он был назван механическим граничным импедансом. Отметим в этой связи, что параметр T входит в выражение для коэффициента отражения «механических» [1] экситонов от границы кристалла.

Дальнейшее усложнение модели осцилляторов приводит к модели, в которой граничный слой молекул является «поврежденным», т. е. отличается от молекул объемных как значением собственной частоты, так и значениями эффективных масс и заряда. Для такой модели в работе [1] получены явные выражения для η и T. При этом оказывается, что отличие эффективного поверхностного заряда молекулярного осциллятора от объемного заряда приводит к возникновению поверхностных токов, причем параметр η как раз описывает величину поверхностных токов.

Вероятно, что для других случаев или моделей конкретные выражения для T и η могут отличаться друг от друга тем более, что поиск универсального выражения этих параметров для всех кристаллов с учетом зависимости реального состояния поверхности от различных факторов (наличие тонких переходных слоев, технологии изготовления и пр.) является бесперспективным занятием. Тем не менее важно подчеркнуть, что система граничных условий (3) является весьма общей для теории пространственной дисперсии и установленные в данной работе ограничения на вид параметров, входящих в данную систему, носят макроскопический характер и справедливы для различных моделей, приводящих к системе граничных условий (3).

Литература

[1] В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. «Наука», М., 1979.
[2] С. И. Пекар. ЖЭТФ, *33*, 1022, 1957.
[3] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1973.
[4] M. P. Philpott. Phys. Rev., *B*, *14*, 3471, 1976.
[5] J. E. Sipe, J. Kranendonk. Canad. J. Phys., *53*, 2095, 1975.
[6] D. L. Johnson, P. R. Rimbey. Phys. Rev., *B*, *14*, 2398, 1976.
[7] Н. Н. Ахмедиев, В. В. Яцышен. ФТТ, *18*, 1679, 1976.
[8] N. N. Akhmediev, V. V. Yatsishen. Solid State Commun., *27*, 357, 1978.
[9] Н. Н. Ахмедиев, В. В. Яцышен. ФТТ, *21*, 3529, 1979.

Поступило в Редакцию 23 декабря 1980 г.