

УДК 535.2

## ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ФОТОНА В ЕСТЕСТВЕННО ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*Годлевская А. Н., Капшай В. Н.*

Показано, что в электродинамике естественно гиротропных сред с частотной дисперсией существует возможность представить энергию, импульс, спин и полный момент импульса электромагнитного поля в «квантово-механическом» виде. Это позволяет ввести соответствующие волновые функции фотона. При этом оказывается, что структура уравнений электромагнитного поля в гиротропной среде такова, что состояния фотона с определенными энергией, моментом и его проекцией двукратно-вырождены, но тем не менее не могут иметь определенной четности. Показано, что соответствующее вырождение можно устранить, потребовав, чтобы каждое состояние с определенными энергией и моментом импульса обладало еще и определенной спиральностью.

Теоретические исследования оптических свойств гиротропных сред обычно основываются на изучении плоских электромагнитных волн [1-3]. Однако в ряде задач ограничиться только плоскими волнами невозможно. Так, в связи с проблемой несохранения четности в атомах и молекулах, обусловленного слабыми взаимодействиями, возникла необходимость изучения электромагнитных свойств волноводов с оптически активным заполнением. В частности, для волноводов круглого сечения в [4, 5] были найдены соответствующие решения для цилиндрических электромагнитных волн. В задачах рассеяния электромагнитных волн в гиротропных средах необходимо использовать решения для сферических волн. Такие решения рассматривались в [6, 7].

В макроскопической электродинамике при решении задачи об излучении примесного атома необходимо знание волновых функций фотона, в том числе собственных функций оператора момента импульса. Хорошо известно, что в электродинамике вакуума волновые функции фотона вводятся в импульсном представлении, а именно с помощью фурье-компонент напряженностей или векторного потенциала [8, 9]. При этом важно, что имеется возможность записать динамические характеристики поля (энергию, импульс, момент импульса) в виде, полностью аналогичном нерелятивистской квантовой механике.

Сохраняющиеся величины в электродинамике непоглощающих естественно гиротропных сред были получены в [10] на основе методики, предложенной в [11]. В случае произвольной зависимости полей от времени известные выражения [10] для энергии, импульса и момента импульса довольно громоздки. Поэтому в дальнейшем, чтобы избежать непринципиальных усложнений, рассмотрим монохроматические поля вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)]. \quad (1)$$

Переходя к фурье-компонентам

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \quad (2)$$

запишем уравнения Максвелла для свободного электромагнитного поля

$$\begin{aligned} [ik, E(k)] &= \frac{i\omega}{c} B(k), \quad kE = 0, \\ [ik, H(k)] &= -\frac{i\omega}{c} D(k), \quad kB = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и материальные уравнения [12, 13]

$$\left. \begin{aligned} D(k) &= \varepsilon(\omega) E(k) + i\alpha(\omega) H(k), \\ B(k) &= \mu(\omega) H(k) - i\alpha(\omega) E(k). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Рассматривая в дальнейшем изотропную непоглощающую среду, будем считать скалярные параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$  вещественными.

Система уравнений электродинамики гиротропных сред (3), (4) может быть существенно упрощена следующим образом. Учитывая поперечность полей  $E$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $H$ , каждое из них можно разложить на две компоненты: «правую» и «левую» соответственно, следующим образом:

$$E(k) = E^+(k) + E^-(k), \quad E^\pm(k) = \frac{1}{2}(1 \pm i\mathbf{n}^\times) E(k). \quad (5)$$

Здесь и далее  $n = k/k$ ,  $k = |k|$ ,  $\mathbf{n}^\times$  — тензор, дуальный вектору  $\mathbf{n}$ , так что  $\mathbf{n}^\times E = [\mathbf{n}, E]$ . Отметим здесь, что разложения полей вида (5) однозначны и что справедливы равенства

$$\left( \frac{1 \pm i\mathbf{n}^\times}{2} \right)^2 E = \left( \frac{1 \pm i\mathbf{n}^\times}{2} \right) E, \quad \frac{1+i\mathbf{n}^\times}{2} \cdot \frac{1-i\mathbf{n}^\times}{2} E = 0. \quad (6)$$

Следовательно, операторы  $(1 \pm i\mathbf{n}^\times)/2$  являются операторами проектирования в подпространстве поперечных векторов. С использованием (6) нетрудно убедиться, что скалярные и векторные произведения «правого» поля на комплексно-сопряженное «левое» равны нулю, например:

$$(\dot{E}^-(k), E^+(k)) = 0, \quad [\dot{H}^-(k), E^+(k)] = 0. \quad (7)$$

С использованием разложений вида (5) и тождеств (6) систему уравнений (3), (4) можно расщепить на две (одну — отдельно для «правых» полей, другую — отдельно для «левых»)

$$\pm kE^\pm(k) = \frac{i\omega}{c} B^\pm(k), \quad \pm kH^\pm(k) = -\frac{i\omega}{c} D^\pm(k), \quad (8)$$

$$D^\pm(k) = \varepsilon E^\pm(k) + i\alpha H^\pm(k), \quad B^\pm(k) = \mu H^\pm(k) - i\alpha E^\pm(k). \quad (9)$$

Из уравнений (8), (9) следует, что

$$E^\pm(k) = \pm \left( k - \frac{\omega}{c} n_\pm \right) E^\pm(n), \quad (10)$$

где  $n_\pm = \sqrt{\varepsilon\mu \pm \alpha}$  — показатели преломления «правых» и «левых» волн. Кроме того, из (8)–(10) вытекают соотношения

$$H^\pm = \mp i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^\pm, \quad B^\pm = \mp i n_\pm E^\pm, \quad D^\pm = n_\pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^\pm, \quad (11)$$

справедливые как в импульсном, так и в координатном пространствах. Функции  $E^\pm(n)$ , зависящие только от угловых переменных, следует искать как решения уравнений

$$i\mathbf{n}^\times E^\pm(n) = \pm E^\pm(n). \quad (12)$$

Обратимся теперь к сохраняющимся величинам для электромагнитного поля в прозрачной гиротропной среде. Будем исходить из выражения для плотности энергии монохроматического поля [10]

$$\omega = \frac{1}{16\pi} \left\{ \dot{E}(r) \frac{d\omega\varepsilon(\omega)}{d\omega} E(r) + \dot{H}(r) \frac{d\omega\mu(\omega)}{d\omega} H(r) - 2 \operatorname{Im} \left( \dot{E}(r) \frac{d\omega\alpha(\omega)}{d\omega} H(r) \right) \right\}. \quad (13)$$

Подставляя в (13) разложение Фурье (2), проводя интегрирование по всему пространству и учитывая разложения (5) и формулы (7), (14), получаем энергию поля в следующем виде:

$$W = \int \hbar\omega \{N_{\pm}^2 \dot{\mathbf{E}}^{\pm}(\mathbf{k}) \mathbf{E}^{\pm}(\mathbf{k}) + N_{\mp}^2 \dot{\mathbf{E}}^{\mp}(\mathbf{k}) \mathbf{E}^{\mp}(\mathbf{k})\} d\mathbf{k}. \quad (14)$$

Здесь

$$N_{\pm}^2 = \frac{2}{\hbar\omega} \frac{(2\pi)^3}{16\pi} \left[ \frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega} + \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega} \pm 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\partial\omega\alpha}{\partial\omega}} \right]. \quad (15)$$

Вводя теперь величины

$$\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{k}) = N_{\pm} \mathbf{E}^{\pm}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{k}) = \mathbf{f}^+(\mathbf{k}) + \mathbf{f}^-(\mathbf{k}), \quad (16)$$

представим энергию электромагнитного поля в форме

$$W = \int \hbar\omega \{\mathbf{f}^+(\mathbf{k}) \mathbf{f}^+(\mathbf{k}) + \mathbf{f}^-(\mathbf{k}) \mathbf{f}^-(\mathbf{k})\} d\mathbf{k} = \int \hbar\omega \mathbf{f}(\mathbf{k}) \mathbf{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (17)$$

Для импульса, плотность которого задается выражением [10]

$$\mathbf{g} = \frac{1}{16\pi c} \left\{ 2 \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})] - c \operatorname{Im} \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \frac{d\varepsilon}{d\omega} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \frac{d\mu}{d\omega} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) - c \operatorname{Re} \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \frac{d\alpha}{d\omega} \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{d\alpha}{d\omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \right) \right\}, \quad (18)$$

действуя совершенно аналогично, получаем

$$\mathbf{G} = \int \hbar\mathbf{k} \{\mathbf{f}^+(\mathbf{k}) \mathbf{f}^+(\mathbf{k}) + \mathbf{f}^-(\mathbf{k}) \mathbf{f}^-(\mathbf{k})\} d\mathbf{k} = \int \hbar\mathbf{k} \mathbf{f}(\mathbf{k}) \mathbf{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (19)$$

Спиновый момент импульса электромагнитного поля в гиротропной среде определяется плотностью [10]

$$\frac{1}{16\pi c} \left\{ 2 \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})] + 2c \frac{d\alpha}{d\omega} \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r})] + c \frac{d\varepsilon}{d\omega} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r})] + c \frac{d\mu}{d\omega} [\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})] \right\}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал в кулоновской калибровке. Интегрируя (20) по всему пространству и переходя в импульсное представление, получаем спиновый момент в следующем виде:

$$\sigma = -i\hbar \int [\mathbf{f}(\mathbf{k}), \mathbf{f}(\mathbf{k})] d\mathbf{k}. \quad (21)$$

Плотность полного момента импульса поля задается выражением  $[\mathbf{r}, \mathbf{g}]$ , где  $\mathbf{g}$  определяется формулой (18). Переход в импульсное пространство в этом случае совершается несколько более громоздко (ср. [8]). В результате для полного момента импульса поля получаем (в компонентах)

$$M_{\alpha} = \int f_{\beta}(\mathbf{k}) \{-i\hbar [\mathbf{k}, \nabla_k]_{\alpha} f_{\beta}(\mathbf{k}) - i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} f_{\gamma}(\mathbf{k})\} d\mathbf{k}. \quad (22)$$

Выражения (17), (19), (21), (22) для энергии, импульса, спина и момента импульса полностью аналогичны нерелятивистским. При  $\varepsilon(\omega) = \mu(\omega) = 1$ ,  $\alpha(\omega) = 0$ , т. е. в случае электродинамики вакуума, они совпадают с хорошо известными [8].

Таким образом, функция  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ , определенная в (16), должна быть интерпретирована как волновая функция фотона в естественно гиротропной среде в импульсном представлении. Операторы умножения на  $\hbar\omega$  и  $\hbar\mathbf{k}$  являются операторами энергии и импульса соответственно. Оператор  $\hat{L} = -i\hbar [\mathbf{k}, \nabla_k]$  в (22) есть обычный квантово-механический оператор орбитального момента. Второе слагаемое в (22) совпадает с (21). Таким образом, оператор спина  $\hat{S}$  имеет вид

$$(\hat{S}_\alpha \mathbf{f}(\mathbf{k}))_\beta = -i\hbar e_{\alpha\beta\gamma} f_\gamma(\mathbf{k}). \quad (23)$$

Теперь ясно, что

$$\{(n_\alpha \hat{S}_\alpha) \mathbf{f}(\mathbf{k})\}_\beta = \{(n \hat{\mathbf{S}}) \mathbf{f}(\mathbf{k})\}_\beta = \{i\hbar n^\times \mathbf{f}(\mathbf{k})\}_\beta, \quad (24)$$

т. е. оператор  $i\mathbf{n}^\times$  имеет смысл оператора спиральности (проекции спина на направление импульса в единицах  $\hbar$ ).

Система уравнений Максвелла была сведена нами к уравнениям (12) или эквивалентным им уравнениям

$$i\mathbf{n}^\times \mathbf{f}^\pm(\mathbf{k}) = \pm \mathbf{f}^\pm(\mathbf{k}), \quad \mathbf{f}^\pm(\mathbf{k}) = \delta \left( k - \frac{\omega}{c} n_\pm \right) \mathbf{f}^\pm(\mathbf{n}), \quad (25)$$

которые означают, что «правые» и «левые» функции  $\mathbf{f}^+(\mathbf{k}), \mathbf{f}^-(\mathbf{k})$  являются собственными функциями оператора спиральности, соответствующими собственным значениям  $\pm 1$ . Оператор  $i\mathbf{n}^\times$  коммутирует с оператором  $\hbar\mathbf{k}$ . Их общие собственные функции, такие, что

$$\mathbf{f}^\pm(\mathbf{n}) = \mathbf{f}_0^\pm \delta^{(2)}(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0), \quad i\mathbf{n}^\times \mathbf{f}_0^\pm = \pm \mathbf{f}_0^\pm, \quad (26)$$

дают решения уравнений Максвелла в виде плоских монохроматических циркулярно поляризованных волн.

Нас здесь будут интересовать волновые функции  $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ , дающие решения уравнений Максвелла в виде сферических волн. Отметим в этой связи, что оператор  $i\mathbf{n}^\times$  коммутирует с оператором  $\hat{\mathbf{J}}$ . Поэтому можно искать общие собственные функции операторов  $\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}_3, i\mathbf{n}^\times$ , а также оператора энергии. Собственные функции операторов  $\hat{\mathbf{J}}^2$  и  $\hat{\mathbf{J}}_3$  хорошо известны. Это шаровые векторы (нас интересуют только поперечные) [14]

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} \nabla_y Y_{JM}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\mathbf{n}) = \frac{\hat{\mathbf{L}}}{\sqrt{J(J+1)}} Y_{JM}(\mathbf{n}), \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = J(J+1) \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{n}), \quad \hat{\mathbf{J}}_3 \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = M \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\mathbf{n}). \quad (28)$$

Здесь  $J=1, 2, 3, \dots; M=-J, -J+1, \dots, J; \lambda=1, 0$ ;  $Y_{JM}(\mathbf{n})$  — сферические гармоники. Нетрудно убедиться, что собственными векторами оператора  $i\mathbf{n}^\times$  будут следующие линейные комбинации:

$$\mathbf{Y}_{JM}^\pm(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{Y}_{JM}^{(1)}(\mathbf{n}) \mp \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\mathbf{n}) \}, \quad i\mathbf{n}^\times \mathbf{Y}_{JM}^\pm(\mathbf{n}) = \pm \mathbf{Y}_{JM}^\pm(\mathbf{n}). \quad (29)$$

Таким образом, согласно (10), (16), (29), волновая функция фотона в гиротропной среде в состоянии с определенными энергией, моментом  $J$ , его проекцией  $M$  имеет вид

$$\mathbf{f}_{\omega JM}(\mathbf{k}) = a^+ \mathbf{f}_{\omega JM}^+(\mathbf{k}) + a^- \mathbf{f}_{\omega JM}^-(\mathbf{k}), \quad \mathbf{f}_{\omega JM}^\pm(\mathbf{k}) = \delta \left( k - \frac{\omega}{c} n_\pm \right) \mathbf{Y}_{JM}^\pm(\mathbf{n}). \quad (30)$$

При этом, поскольку  $n_+ \neq n_-$ , волновая функция (30) ни при каких  $a^\pm$  не может быть собственной функцией оператора четности, который определяется следующим образом:  $\hat{P}\mathbf{f}(\mathbf{k}) = -\mathbf{f}(-\mathbf{k})$ . Вместе с тем волновая функция (30) двукратно-вырождена. Мы можем устранить это вырождение, потребовав, чтобы каждое состояние обладало определенной спиральностью.

Волновые функции фотона  $\mathbf{f}_{\omega JM}(\mathbf{k})$  с определенными энергией, моментом и спиральностью ( $\nu = \pm$ ) образуют, очевидно, в подпространстве поперечных векторов полную ортонормированную систему. Условие ортонормированности имеет вид

$$\int \mathbf{f}_{\omega J'M'}^\nu(\mathbf{k}) \mathbf{f}_{\omega JM}^\nu(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \omega^2 \frac{n_\nu}{c} \delta(\omega - \omega') \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\nu\nu'}. \quad (31)$$

Отметим также то обстоятельство, что состоянию фотона с волновой функцией  $\mathbf{f}_{\omega JM}(\mathbf{k})$  нельзя приписать определенного значения орбитального момента, так как шаровой вектор  $\mathbf{Y}_{JM}(\mathbf{n})$  (при  $\nu = \pm$ ) является линейной комбинацией трех

шаровых векторов  $\mathbf{Y}_{JM}^L(\mathbf{n})$  (их определение см., например, в [14]) с определенными значениями орбитального момента  $L=J+1, J, J-1$ .

Найдем также электрическое поле, соответствующее состояниям фотона с определенными энергией, моментом и спиральностью. Вычисляя интеграл Фурье (2), имеем (аналогично [6])

$$\mathbf{E}^\pm(\mathbf{r}) = 2\pi i^{J+1} N_\pm \left(\frac{\omega}{c} n_\pm\right)^2 \left\{ \sqrt{\frac{J}{2J+1}} z_{J+1}\left(\frac{\omega}{c} n_\pm r\right) \mathbf{Y}_{JM}^{J+1}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} z_{J-1}\left(\frac{\omega}{c} n_\pm r\right) \mathbf{Y}_{JM}^{J-1}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \mp iz_J\left(\frac{\omega}{c} n_\pm r\right) \mathbf{Y}_{JM}^J\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \right\}. \quad (32)$$

Здесь  $z_L\left(\frac{\omega}{c} n_\pm r\right)$  — сферические функции Бесселя. Другие поля можно определить, используя формулы (11). Отметим, что функции (32) удовлетворяют условию  $\operatorname{rot} \mathbf{E}^\pm(\mathbf{r}) = \pm \frac{\omega}{c} n_\pm \mathbf{E}^\pm(\mathbf{r})$ .

Таким образом, в настоящей работе определен вид операторов энергии, момента и спиральности для волновых функций фотона в диспергирующей естественно гиротропной среде. Найдена полная ортонормированная система собственных функций этих операторов. Волновые функции  $\mathbf{f}_{\omega JM}(\mathbf{k})$  следует использовать при расчете мультипольного излучения примесного атома в естественно гиротропной среде, чему будет посвящено отдельное рассмотрение.

В заключение авторы благодарят за обсуждения А. Н. Сердюкова.

### Литература

- [1] Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, 1976.
- [2] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., 1979.
- [3] Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред. М., 1961.
- [4] Альтшуллер Е. Л., Москалев А. Н., Рыжов В. А., Рындин Р. М., Сильвестров П. Г., Фомичев В. Н., Хриплович И. Б. // Материалы XIX зимней школы ЛИЯФ «Физика высоких энергий». Л., 1984. С. 91—143.
- [5] Кондратова Н. Л., Сердюков А. Н. // ЖПС. 1987. Т. 47. В. 2. С. 326—329.
- [6] Афонин А. А., Годлевская А. Н., Капшай В. Н., Сердюков А. Н. // ЖПС. 1986. Т. 45. В. 2. С. 307—312.
- [7] Годлевская А. Н., Карпенков В. А., Сердюков А. Н. // Опт. и спектр. 1985. Т. 59. В. 6. С. 1262—1265.
- [8] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.
- [9] Берестецкий В. Б., Либшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М., 1980.
- [10] Пеяль В. А., Сердюков А. Н. // ЖПС. 1976. Т. 25. В. 5. С. 906—911.
- [11] Пекар С. И. // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. В. 3. С. 866—880.
- [12] Бокуть Б. В., Сердюков А. Н., Шепелевич В. В. // Опт. и спектр. 1974. Т. 37. В. 1. С. 120—124.
- [13] Бокуть Б. В., Сердюков А. Н. // ЖПС. 1981. Т. 34. В. 4. С. 701—706.
- [14] Варшавович А. Б., Москлев А. Н., Херсонский В. Г. Квантовая теория углового момента. Л., 1975.

Поступило в Редакцию 18 декабря 1987 г.