ТОМ 59, ВЫП. 6 • ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ • 1985 год

УДК 535.2

СФЕРИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЕСТЕСТВЕННО ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Годлевская А. Н., Карпенко В. А., Сердюков А. Н.

Разработаны основы теории сферических электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной гиротропной среде.

Теоретическое исследование оптических свойств естественно гиротропных сред в основном ограничено изучением особенностей распространения, отражения и преломления плоских электромагнитных волн [1-3]. Рассмотрение именно плоских волн допускает трактовку естественной гиротропии как эффекта пространственной дисперсии, т. е. зависимости несимметричного тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора плоской электромагнитной волны [1, 2]. Однако, как отмечалось в [4, 5], подход теории пространственной дисперсии не позволяет в полном объеме осветить вопросы излучения и рассеяния света в оптически активных средах, а также построить корректную теорию естественной гиротропии неоднородных сред. Наконец, в рамках теории пространственной дисперсии невозможно рассмотрение других типов электромагнитных волн, кроме плоских, в частности, сферических и цилиндрических, описание распространения которых не связано с определением волнового вектора.

Целью настоящего сообщения является построение основ теории сферических электромагнитных волн в изотропной естественно гиротропной среде на основе материальных уравнений [6, 7]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\alpha \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - i\alpha \mathbf{E} \tag{1}$$

со скалярными (вещественными в отсутствие поглощения [6]) параметрами ε, μ и α, зависящими, вообще говоря, от частоты.

При распространении плоских электромагнитных волн такая среда обнаруживает циркулярное двупреломление, причем показатели преломления право- и левополяризованных волн равны [6]

$$n_{\pm} = \sqrt{\varepsilon\mu} \pm \alpha. \tag{2}$$

Из уравнений Максвелла для гармонических волн частоты ω

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{D} \tag{3}$$

и материальных уравнений (1) при $\varepsilon\mu - \alpha^2 \neq 0$ можно получить следующие уравнения для напряженности электрического поля в однородной среде:

$$[\nabla^2 + k_+ k_- + (k_+ - k_-) \operatorname{rot}] \mathbf{E} = 0, \tag{4}$$

$$div\, \mathbf{E} = 0. \tag{5}$$

Аналогичным уравнениям удовлетворяют и остальные векторы поля: **D**, **B** и **H**. Величины $k_{\pm} = n_{\pm}\omega/c$ в (4) совпадают с волновыми числами плоских циркулярно поляризованных электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

Уравнение (4) отличается от обычного уравнения Гельмгольца слагаемым $(k_+ - k_-) \operatorname{rot} \mathbf{E}$, поэтому для нахождения решений уравнения поля в криволинейных координатах при $k_+ \neq k_-$, т. е. при $\alpha \neq 0$, известная методика [8, 9] оказывается неприменимой.

Аналитические трудности, связанные с решением векторного уравнения (4) в сферических координатах, могут быть преодолены путем введения скалярных потенциальных функций χ и ψ и представления поля $\mathbf{E}$ в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}(\mathbf{r}\chi) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi), \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения поля. Оправданность такого представления может быть обоснована тем, что свободное поле, согласно (5), соленоидально во всех точках пространства.

Подставляя (6) в (4) и учитывая равенство

$$\operatorname{rot}\nabla^2(\mathbf{r}\chi) = \operatorname{rot}(\mathbf{r}\nabla^2\chi), \tag{7}$$

получим

$$\operatorname{rot}\{\mathbf{r}[(\nabla^2 + k_+k_-)\chi - (k_+ - k_-)\nabla^2\psi]\} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\{\mathbf{r}[(\nabla^2 + k_+k_-)\psi + (k_+ - k_-)\chi]\}.$$

Этому уравнению можно удовлетворить тождественно, если на потенциальные функции χ и ψ наложить ограничения

$$(\nabla^2 + k_+k_-)\chi - (k_+ - k_-)\nabla^2\psi = 0, \tag{8}$$

$$(\nabla^2 + k_+k_-)\psi + (k_+ - k_-)\chi = 0. \tag{9}$$

Исключая из соотношений (8), (9) χ, приходим к следующему уравнению для функции ψ:

$$(\nabla^2 + k_+^2)(\nabla^2 + k_-^2)\psi = 0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) будем искать в виде суммы

$$\psi = \psi^+ + \psi^- \tag{11}$$

двух функций $\psi^\pm$, каждая из которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k_\pm^2)\psi^\pm = 0. \tag{12}$$

В таком случае потенциальная функция χ, согласно (9), (11), (12), также может быть представлена через $\psi^\pm$

$$\chi = k_+\psi^+ - k_-\psi^-. \tag{13}$$

Подставляя далее (11), (13) в (6), выразим напряженность электрического поля через $\psi^\pm$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \tag{14}$$

$$\mathbf{E}^\pm = (\operatorname{rot} \pm k_\pm)\operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi^\pm). \tag{15}$$

Таким образом, задача нахождения решений векторного уравнения (4) свелась к решению скалярного уравнения Гельмгольца (12). Из возможных решений этого уравнения выберем элементарные сферические волновые функции [9]

$$\psi^\pm_{{}^0_e lm}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{k_\pm r}} Z_{l+1/2}(k_\pm r) P_l^m(\cos\theta) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi, \tag{16}$$

конечные и однозначные во всех точках на поверхности сферы. В области пространства, включающей начало координат, в качестве $Z_{l+1/2}(k_\pm r)$ следует брать бесселевы функции первого рода, конечные и непрерывные в точке $r=0$. Такие решения будут описывать стоячие сферические волны. Для представления бегущих волн в тех случаях, когда начало координат исключается из рассмотрения, в качестве $Z_{l+1/2}(k_\pm r)$ необходимо использовать функции Ганкеля.

Подставляя в (15) разложение функций $\psi^\pm$ по сферическим функциям (16)

$$\psi^\pm = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(a_{lm}^\pm \psi_{0lm}^\pm + b_{lm}^\pm \psi_{elm}^\pm)$$

и учитывая гармоническую зависимость поля от времени, представим решение (14), (15) векторного уравнения (4) в сферической системе координат в виде суммы следующих сферических волн двух типов:

$$\left.\begin{aligned}
E_r^{\pm} &= A^{\pm}k_{\pm}^2\,\frac{l\,(l+1)}{(k_{\pm}r)^{3/2}}\,Z_{l+1/2}\,(k_{\pm}r)\,P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m\varphi e^{-i\omega t},\\
E_{\theta}^{\pm} &= A^{\pm}\left\{\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,[\sqrt{k_{\pm}r}\,Z_{l+1/2}\,(k_{\pm}r)]\,\frac{dP_l^m(\cos\theta)}{d\theta}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m\varphi\,\pm\right.\\
&\quad\left.\pm\,\frac{k_{\pm}^2 m}{\sqrt{k_{\pm}r}\,\sin\theta}\,Z_{l+1/2}\,(k_{\pm}r)\,P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix}\,m\varphi\right\}e^{-i\omega t},\\
E_{\varphi}^{\pm} &= A^{\pm}\left\{\frac{m}{r\sin\theta}\,\frac{d}{dr}\,[\sqrt{k_{\pm}r}\,Z_{l+1/2}\,(k_{\pm}r)]\,P_l^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix}\,m\varphi\,\mp\right.\\
&\quad\left.\mp\,\frac{k_{\pm}^2}{\sqrt{k_{\pm}r}}\,Z_{l+1/2}\,(k_{\pm}r)\,\frac{dP_l^m(\cos\theta)}{d\theta}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,m\varphi\right\}e^{-i\omega t},
\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

соответствующих двум значениям волнового числа k_+ и k_-.

В отличие от решений для сферических волн электрического или магнитного типа в негиротропной среде (см., например, [10]) оба типа полученных решений $\mathbf{E}^+$ и $\mathbf{E}^-$, согласно (17), являются гибридными и содержат ненулевую радиальную составляющую.

Уравнения Максвелла (3), материальные уравнения (1) и соотношения (15), (12), (7) позволяют выразить напряженность магнитного поля и векторы индукций обоих типов волн через напряженность электрического поля (17)

$$\mathbf{H}^{\pm} = \mp\, i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E}^{\pm},\quad \mathbf{B}^{\pm} = \mp\, i n_{\pm}\mathbf{E}^{\pm},\quad \mathbf{D}^{\pm} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,n_{\pm}\mathbf{E}^{\pm}. \qquad (18)$$

Используя полученные решения, определим собственные электромагнитные колебания металлического сферического резонатора, заполненного естественно гиротропной средой. Запишем условия на границе сферы радиуса R

$$E_{\theta}^{+} + E_{\theta}^{-} = E_{\varphi}^{+} + E_{\varphi}^{-} = B_r^{+} + B_r^{-} = 0 \ \text{при}\ r = R. \qquad (19)$$

Для стоячих волн граничные условия (19), согласно формулам (17), (18), дают

$$\begin{gathered}
A^{+}\left\{\frac{d}{dr}\,[\sqrt{k_{+}r}\,J_{l+1/2}\,(k_{+}r)]\right\}_{r=R} + A^{-}\left\{\frac{d}{dr}\,[\sqrt{k_{-}r}\,J_{l+1/2}\,(k_{-}r)]\right\}_{r=R} = 0,\\
A^{+}k_{+}^{3/2}J_{l+1/2}\,(k_{+}R) - A^{-}k_{-}^{3/2}J_{l+1/2}\,(k_{-}R) = 0.
\end{gathered} \qquad (20)$$

Нетривиальные решения для $A^{\pm}$ возможны при обращении в нуль определителя системы двух линейных однородных уравнений (20)

$$k_{+}^{3/2}J_{l+1/2}\,(k_{+}R)\,\frac{d}{dr}\,[\sqrt{k_{-}r}\,J_{l+1/2}\,(k_{-}r)]_{r=R} + k_{-}^{3/2}J_{l+1/2}\,(k_{-}R)\,\frac{d}{dr}\,[\sqrt{k_{+}r}\,J_{l+1/2}\,(k_{+}r)]_{r=R} = 0. \qquad (21)$$

Используя известное соотношение для функций Бесселя

$$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x),$$

преобразуем (21) к следующему виду:

$$\begin{gathered}
J_{l+1/2}\,(k_{+}R)\,J_{l-1/2}\,(k_{-}R) + J_{l+1/2}\,(k_{-}R)\,J_{l-1/2}\,(k_{+}R) - l\left(\frac{1}{k_{+}R} + \frac{1}{k_{-}R}\right)\times\\
\times J_{l+1/2}\,(k_{+}R)\,J_{l+1/2}\,(k_{-}R) = 0.
\end{gathered} \qquad (22)$$

Равенство (22) следует рассматривать как уравнение, определяющее собственные частоты металлического сферического резонатора, заполненного естественно гиротропной средой. «Поляризация» собственных мод резонатора (отношение амплитуд сферических волн обоих типов (17)) на каждой из таких частот, согласно (20), равна

$$\frac{A^+}{A^-}=\frac{k_-^{3/2}J_{l+1/2}(k_-R)}{k_+^{3/2}J_{l+1/2}(k_+R)}. \qquad (23)$$

В отсутствие гиротропии при $k_+=k_-=k$ уравнение (22) распадается на два известных уравнения [10]

$$J_{l-1/2}(kR)=\frac{l}{kR}J_{l+1/2}(kR), \quad J_{l+1/2}(kR)=0,$$

которые определяют собственные частоты электромагнитных волн соответственно электрического ($A^+=A^-$) и магнитного ($A^+=-A^-$) типов.

Литература

[1] Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., 1961.
[2] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., 1979.
[3] Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, 1976.
[4] Бокуть Б. В., Сердюков А. Н., Федоров Ф. И. — Опт. и спектр., 1974, т. 37, в. 2, с. 288.
[5] Гвоздев В. В., Сердюков А. Н. — Опт. и спектр., 1979, т. 47, в. 3, с. 544.
[6] Бокуть Б. В., Сердюков А. Н., Шепелевич В. В. — Опт. и спектр., 1974, т. 37, в. 1, с. 120.
[7] Rado G. T. — Phys. Rev. B, 1973, v. 8, p. 5239.
[8] Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960.
[9] Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М., 1948.
[10] De Бройль Л. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. М., 1948.

Поступило в Редакцию 17 января 1983 г.