

УДК 539.12.01

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_1\\_54\\_25](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_25)

EDN: GOLFMT

## РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ $d$ -СОСТОЯНИЙ РАССЕЙЯНИЯ

В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## SOLUTION OF RELATIVISTIC PARTIAL EQUATIONS FOR SCATTERING $d$ -STATES

V.N. Kapshai, A.A. Grishechkina

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Определены в релятивистском конфигурационном представлении и выражены через элементарные функции парциальные функции Грина для  $d$ -состояний рассеяния. Для полученных функций Грина найдены асимптотики при больших значениях координаты, а также определен их нерелятивистский предел. Точно решены четыре квазипотенциальных парциальных уравнения в релятивистском конфигурационном представлении для состояний рассеяния при моделировании взаимодействия потенциалами «дельта-сфера» и «суперпозиция двух дельта-сфер». Определены парциальные амплитуды и сечения рассеяния.

**Ключевые слова:** квазипотенциальный подход, релятивистское конфигурационное представление, функции Грина, состояние рассеяния,  $d$ -состояние, дельта-потенциал.

**Для цитирования:** Капшай, В.Н. Решение релятивистских парциальных уравнений для  $d$ -состояний рассеяния / В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 25–30. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_1\\_54\\_25](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_25). – EDN: GOLFMT

**Abstract.** Partial Green's functions for  $d$ -states are defined in the relativistic configurational representation and expressed in terms of elementary functions. For the Green's functions obtained the asymptotics are found for large values of the coordinate, and their nonrelativistic limit is determined. Four quasipotential partial equations in the relativistic configuration representation for scattering states are solved exactly in cases of “delta-sphere potential” and “superposition of two delta-sphere potentials”. The partial amplitudes and the scattering cross sections are determined.

**Keywords:** quasipotential approach, relativistic configurational representation, Green's functions, scattering state,  $d$ -state, delta function potential.

**For citation:** Kapshai, V.N. Solution of relativistic partial equations for scattering  $d$ -states / V.N. Kapshai, A.A. Grishechkina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 25–30. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2023\\_1\\_54\\_25](https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_25) (in Russian). – EDN: GOLFMT

### Введение

Для описания составных систем релятивистских частиц в квантовой теории поля было выведено уравнение Бете – Солпитера. Его решение затруднено наличием параметра относительного времени. С целью преодоления этой проблемы Логуновым и Тавхелидзе был предложен ковариантный одновременный подход в квантовой теории поля, интегральные уравнения которого трёхмерны. Иной вариант 3D-редукции четырехмерных полевых уравнений на основе гамильтоновой формулировки теории поля был осуществлён Кадышевским. Аналогичность полученных этими авторами уравнений квантовомеханическому уравнению Липпмана – Швингера (интегральной форме уравнения Шрёдингера для состояний рассеяния) нашла своё отражение в терминах «квазипотенциальные уравнения» и «квазипотенциальный подход».

Первоначально квазипотенциальные уравнения были сформулированы в импульсном представлении (ИП). При переходе в координатное представление с использованием преобразования Фурье получают более сложные интегродифференциальные уравнения. Чтобы избежать этого усложнения, в работах Кадышевского, Мир-Касимова и Скачкова была предложена альтернативная возможность: для перехода в дуальное импульсному представлении использовать разложение по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Лоренца – была сформулирована концепция релятивистского конфигурационного представления (РКП).

Преимущество интегральных уравнений в РКП по сравнению с уравнениями в ИП заключается в их наглядности. Например, в РКП уже на основе вида потенциала ясно, возможны ли в соответствующем ему поле состояния рассеяния, связанные состояния, резонансные состояния

рассматриваемой системы. Для ряда потенциалов, заданных в РКП, были найдены точные решения интегральных уравнений. Уравнения, сформулированные в конфигурационном представлении при использовании других потенциалов, могут служить важной и полезной альтернативой уравнениям, записанным в импульсном представлении, при численном исследовании их решений.

Разумеется, что как аналитическое, так и численное решение трехмерных уравнений радикально упрощается при возможности сведения их к одномерным уравнениям. Такая возможность реализуется с помощью парциального разложения всех функций теории (волновых функций, функций Грина (ФГ), потенциалов) по сферическим гармоникам. В результате этой операции получают уравнения, которые соответствуют состояниям, характеризующимся определённым орбитальным квантовым числом  $l$ . В большинстве работ ранее рассматривались сферически-симметричные  $s$ -состояния ( $l = 0$ ). Уравнения для  $p$ -состояний ( $l = 1$ ) были получены в [1]. В настоящей работе мы выделяем из трёхмерного уравнения парциальное уравнение для  $d$ -состояний ( $l = 2$ ).

Для формулировки и последующего решения парциальных уравнений в РКП необходим явный вид соответствующих функций Грина. Для его определения необходимо осуществить переход из ИП в РКП при помощи соответствующего интегрального преобразования. Для состояний, характеризующихся орбитальными квантовыми числами  $l = 0$  и  $l = 1$  ФГ найдены ранее в [1], [2]. В настоящей статье описана процедура нахождения явного вида ФГ в РКП для состояний с  $l = 2$ . Произведено также точное решение четырех парциальных уравнений (уравнений Кадышевского, Логунова – Тавхелидзе и их модифицированных версий) с использованием модельного потенциала «дельта-сфера» и суперпозиции двух таких потенциалов. На основании полученных волновых функций определены амплитуды и сечения рассеяния, характеризующие процесс взаимодействия двух частиц.

### 1 Нахождение явного вида парциальных функций Грина для орбитального квантового числа $l = 2$

Для описания состояний рассеяния системы двух частиц равной массы ( $m_1 = m_2 = m$ ) в импульсном представлении используем ФГ  $G_{(j)}(E_q, k)$ , имеющие вид [3]:

$$G_{(1)}(E_q, k) = \frac{1/m}{2E_q - 2E_k + i\varepsilon};$$

$$G_{(2)}(E_q, k) = \frac{1}{E_q^2 - E_k^2 + i\varepsilon};$$

$$G_{(3)}(E_q, k) = \frac{E_k/m}{E_q^2 - E_k^2 + i\varepsilon}; \quad (1.1)$$

$$G_{(4)}(E_q, k) = \frac{1}{2E_k(E_q - E_k + i\varepsilon)};$$

где индекс  $j$  соответствует определенному уравнению ( $j = 1$  – модифицированное уравнение Кадышевского (МК),  $j = 2$  – уравнение Логунова-Тавхелидзе (LT),  $j = 3$  – модифицированное уравнение Логунова – Тавхелидзе (MLT),  $j = 4$  –

уравнение Кадышевского (K)),  $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ ,  $k$  – релятивистский импульс,  $2E_q = 2m\text{ch}\chi_q$  – энергия системы двух частиц.

Осуществляя переход из импульсного представления в РКП, можно выразить парциальные ФГ через функции (1.1). Явный вид парциальных ФГ в РКП для  $s$ - и  $p$ -состояний (орбитальное квантовое число  $l = 0; 1$  соответственно) определен ранее в [2], [1]. Для описания  $d$ -состояний рассеяния выразим парциальные ФГ в РКП следующим образом [3]:

$$G_{2(j)}(\chi_q, r, r') = \quad (1.2)$$

$$= \frac{2m}{\pi} \int_0^\infty s_2(\chi_k, r) G_{(j)}(m\text{ch}\chi_q, m\text{sh}\chi_k) s_2^*(\chi_k, r') d\chi_k,$$

где функция  $s_2(\chi_k, r)$  имеет вид:

$$s_2(\chi_k, r) = \left( (1 + m^2 r^2) \sin \chi_k m r + 3m r \text{cth} \chi_k \cos \chi_k m r - 3 \text{cth}^2 \chi_k \sin \chi_k m r \right) / \left( (1 - imr)(2 - imr) \right), \quad (1.3)$$

$\chi_k$  – быстрота, связанная с импульсом  $k$  выражением  $k = m\text{sh}\chi_k$ ,  $r$  – релятивистская координата.

Опишем подробно процедуру нахождения явного вида ФГ модифицированного уравнения Кадышевского. После подстановки (1.3) в (1.2) функцию  $G_{2(1)}(\chi_q, r, r')$  можно представить в виде:

$$G_{2(1)}(\chi_q, r, r') = \frac{-\left( g_{2(1)}^{(-)}(\chi_q, r, r') + g_{2(1)}^{(+)}(\chi_q, r, r') \right)}{2\pi(mr' - i)(mr' - 2i)(mr + i)(mr' + 2i)},$$

где введено обозначение

$$g_{2(1)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') = \mp \left( \frac{1}{m} + m(r^2 + r'^2 + m^2 r^2 r'^2) \right) I_0(r \pm r') \pm 3(r \pm r')(1 \pm m^2 r r') I_1(r \pm r') \pm \left( \frac{6}{m} + 3m(r'^2 \pm 3r r' + r^2) \right) I_2(r \pm r') \mp 9(r \pm r') I_3(r \pm r') \mp \frac{9}{m} I_4(r \pm r'). \quad (1.4)$$

Величины  $I_n(\rho)$  в выражении (1.4) определяются в соответствии с соотношениями

$$I_n(\rho) = \begin{cases} \int_0^\infty \left( \frac{\text{ch } \chi_k}{\text{sh}(\chi_k + i\gamma)} \right)^n \frac{\cos \chi_k mr}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \\ n = 0, 2, 4; \\ \int_0^\infty \left( \frac{\text{ch } \chi_k}{\text{sh}(\chi_k + i\gamma)} \right)^n \frac{\sin \chi_k mr}{\text{ch } \chi_k - \text{ch}(\chi_q + i\varepsilon)} d\chi_k, \\ n = 1, 3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Мы добавили бесконечно малую мнимую часть  $\gamma$  аргумента функции  $\text{sh}(\chi_k + i\gamma)$ , чтобы осуществить сдвиг особых точек подынтегральных функций с вещественной оси в комплексную плоскость. Эти особые точки в исходных выражениях представляют собой устранимые особенности, поэтому знак вспомогательной величины  $\gamma$  может быть произвольным.

Интегралы  $I_0(\rho)$ ,  $I_1(\rho)$  и  $I_2(\rho)$  вычислены нами ранее в работе [1], где при их записи использованы несколько иные обозначения. Для вычисления интегралов  $I_3(\rho)$  и  $I_4(\rho)$  применим метод, описанный в работе [1], основанный на сведении исходных интегралов к интегралам по замкнутому контуру в комплексной плоскости и последующем применением теоремы Коши о вычетах [4], [5]. Выпишем результаты вычисления всех четырех интегралов:

$$I_0(\rho) = \frac{i\pi}{\text{sh}(\pi m\rho)} \frac{\text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho)}{\text{sh } \chi_q},$$

$$I_1(\rho) = \frac{\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[ 2 \frac{\text{ch } \chi_q}{\text{sh}^2 \chi_q} \text{ch}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \frac{\text{ch}(\pi m\rho)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} \right],$$

$$I_2(\rho) = \frac{i\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[ 2 \frac{\text{ch}^2 \chi_q}{\text{sh}^3 \chi_q} \text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \frac{i m\rho \text{ch}(\pi m\rho)}{1 - \text{ch } \chi_q} - \frac{i m\rho}{1 + \text{ch } \chi_q} \right], \quad (1.6)$$

$$I_3(\rho) = \frac{\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[ 2 \frac{\text{ch}^3 \chi_q}{\text{sh}^4 \chi_q} \text{ch}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \frac{\text{ch}(\pi m\rho)}{2(1 - \text{ch } \chi_q)} \left( 2 - m^2 \rho^2 - \frac{1}{1 - \text{ch } \chi_q} \right) - \frac{1}{2(1 + \text{ch } \chi_q)} \left( 2 - m^2 \rho^2 - \frac{1}{1 + \text{ch } \chi_q} \right) \right],$$

$$I_4(\rho) = \frac{i\pi}{2\text{sh}(\pi m\rho)} \left[ 2 \frac{\text{ch}^4 \chi_q}{\text{sh}^5 \chi_q} \text{sh}((i\chi_q + \pi)m\rho) + \right.$$

$$\left. + \frac{i m\rho \text{ch}(\pi m\rho)}{6(1 - \text{ch } \chi_q)} \left( 8 - m^2 \rho^2 - \frac{3}{1 - \text{ch } \chi_q} \right) - \frac{i m\rho}{6(1 + \text{ch } \chi_q)} \left( 8 - m^2 \rho^2 - \frac{3}{1 + \text{ch } \chi_q} \right) \right].$$

Воспользуемся полученными выражениями (1.6) и запишем явный вид функции  $G_{2(1)}(\chi_q, r, r')$  и аналогично – ФГ остальных уравнений, представляя их в виде:

$$G_{2(j)} = \frac{K_{q(j)}}{2i} \frac{G_{2(j)}^{(-)}(\chi_q, r, r') + G_{2(j)}^{(+)}(\chi_q, r, r')}{(mr' - i)(mr' - 2i)(mr + i)(mr + 2i)}, \quad (1.7)$$

$$G_{2(1)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') = \frac{1}{\text{sh}(\pi m(r \pm r'))} \times$$

$$\times \left[ \mp m^2 (r^2 + r'^2 + (mrr')^2) \times \right.$$

$$\times \text{sh}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \mp$$

$$\mp 3im(r \pm r')(1 \pm m^2 rr') \text{cth } \chi_q \times$$

$$\times \text{ch}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \pm$$

$$\pm 3m^2 (r^2 \pm 3rr' + r'^2) \text{cth}^2 \chi_q \times$$

$$\times \text{sh}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \pm$$

$$\pm 9im(r \pm r') \text{cth}^3 \chi_q \text{ch}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \mp$$

$$\mp (1 - 3\text{cth}^2 \chi_q)^2 \text{sh}((i\chi_q + \pi)m(r \pm r')) \left. \right],$$

$$G_{2(2)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') = \frac{1}{\text{sh}(\pi m(r \pm r')/2)} \times$$

$$\times \left[ \mp m^2 (r^2 + r'^2 + (mrr')^2) \times \right.$$

$$\times \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \mp$$

$$\mp 3im(r \pm r')(1 \pm m^2 rr') \text{cth } \chi_q \times$$

$$\times \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \pm$$

$$\pm 3m^2 (r^2 \pm 3rr' + r'^2) \text{cth}^2 \chi_q \times$$

$$\times \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \pm$$

$$\pm 9im(r \pm r') \text{cth}^3 \chi_q \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \mp$$

$$\mp (1 - 3\text{cth}^2 \chi_q)^2 \text{sh}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \left. \right],$$

$$G_{2(3)}^{(\pm)}(\chi_q, r, r') = \frac{1}{\text{ch}(\pi m(r \pm r')/2)} \times$$

$$\times \left[ \mp m^2 (r^2 + r'^2 + (mrr')^2) \times \right.$$

$$\times \text{ch}((i\chi_q + \pi/2)m(r \pm r')) \mp$$

$$\mp 3im(r \pm r')(1 \pm m^2 rr') \text{cth } \chi_q \times$$

$$\begin{aligned} & \times \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 3m^2\left(r^2 \pm 3rr' + r'^2\right) \operatorname{cth}^2 \chi_q \times \\ & \times \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 9im\left(r \pm r'\right) \operatorname{cth}^3 \chi_q \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \\ & \mp \left(1 - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_q\right)^2 \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi/2\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \Big], \\ & G_{2(4)}^{(\pm)}\left(\chi_q, r, r'\right) = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\pi m\left(r \pm r'\right)\right)} \times \\ & \times \left[ \mp im^2\left(r^2 + r'^2 + (mrr')^2\right) \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \right. \\ & \mp 3im\left(r \pm r'\right)\left(1 \pm m^2 rr'\right) \operatorname{cth} \chi_q \times \\ & \times \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 3m^2\left(r^2 \pm 3rr' + r'^2\right) \operatorname{cth}^2 \chi_q \times \\ & \times \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \pm \\ & \pm 9im\left(r \pm r'\right) \operatorname{cth}^3 \chi_q \operatorname{ch}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \\ & \mp \left(1 - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_q\right)^2 \operatorname{sh}\left(\left(i\chi_q + \pi\right)m\left(r \pm r'\right)\right) \mp \\ & \left. \mp \left(1 + m^2 r^2\right)\left(1 + m^2 r'^2\right) i \operatorname{sh} \chi_q \operatorname{sh}\left(\pi m\left(r \pm r'\right) / 2\right) \right]. \end{aligned}$$

В выражении (1.7) введен коэффициент  $K_{q(j)}$ , который для каждой из ФГ определен следующим образом:

$$K_{q(1)} = K_{q(3)} = \frac{1}{m \operatorname{sh} \chi_q},$$

$$K_{q(2)} = K_{q(4)} = \frac{2}{m \operatorname{sh} 2\chi_q}.$$

Проанализируем полученные ФГ. При  $r \gg 1$  функциям Грина (1.7) соответствуют асимптотические выражения:

$$\lim_{r \gg 1} G_{2(j)}\left(\chi_q, r, r'\right) = K_{q(j)} e^{imr\chi_q} R\left(\chi_q, r'\right), \quad (1.8)$$

в которых введено обозначение

$$R\left(\chi_q, r'\right) = -\frac{\left(1 + m^2 r'^2 - 3 \operatorname{cth}^2 \chi_q\right) \sin\left(\chi_q m r'\right)}{\left(m r' - 2i\right)\left(m r' - i\right)} - \frac{3 m r' \operatorname{cth} \chi_q \cos\left(\chi_q m r'\right)}{\left(m r' - 2i\right)\left(m r' - i\right)}.$$

Асимптотическое поведение (1.8) ФГ (1.7) легко прослеживается при помощи графиков зависимости действительной и мнимой частей ФГ от  $r$ , построенных при  $\chi_q = 1$ ,  $r' = 1$  и  $m = 1$  (рисунки 1.1, 1.2).

ФГ уравнения Кадышевского и Логунова – Тавхелидзе при  $r \gg 1$  ведут себя одинаково. В указанном пределе ФГ модифицированных версий уравнений также изменяются одинаково. Кроме того, при  $m \rightarrow \infty$  и  $\chi_q \rightarrow 0$  все четыре ФГ преобразуются в функцию

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \chi_q \rightarrow 0}} G_{2(j)}\left(\chi_q r, r'\right) = G_0\left(q, r, r'\right) =$$

$$\begin{cases} \frac{e^{iqr}}{q^4 r^2 r'} \left( \frac{\left(3 - q^2 r'^2\right)\left(q^2 r'^2 + 3iqr' - 3\right)}{qr'} \sin qr' + \right. \\ \left. + 3\left(3 - 3iqr' - q^2 r'^2\right) \cos qr' \right), r > r'; \\ \frac{e^{iqr'}}{q^4 r r'^2} \left( \frac{\left(3 - q^2 r^2\right)\left(q^2 r'^2 + 3iqr' - 3\right)}{qr} \sin qr + \right. \\ \left. + 3\left(3 - 3iqr' - q^2 r'^2\right) \cos qr \right), r < r'; \end{cases} \quad (1.9)$$

которая является ФГ трехмерного УШ для  $d$ -состояний, записанной в координатном представлении [6]. Таким образом, выражение (1.9) – нерелятивистский предел ФГ (1.7).

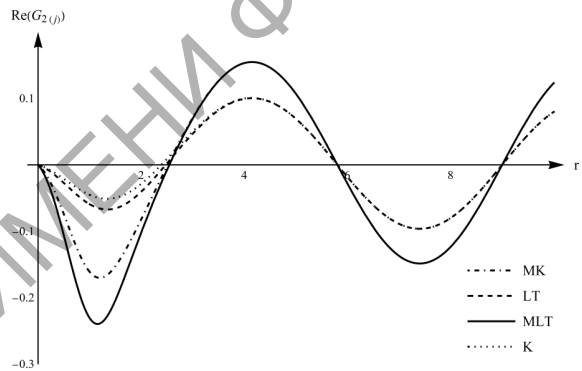


Рисунок 1.1 – Зависимость действительной части функций Грина (1.7) от координаты  $r$

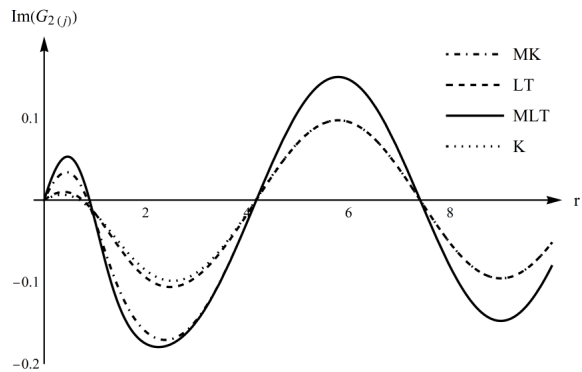


Рисунок 1.2 – Зависимость мнимой части функций Грина (1.7) от координаты  $r$

## 2 Решение парциальных релятивистских уравнений для состояний рассеяния в случае дельта-потенциала

Уравнение для  $d$ -состояний рассеяния имеет вид [3]:

$$\Psi_{(j)}(r) = s_2\left(\chi_q, r\right) + \int_0^\infty G_{2(j)}\left(\chi_q, r, r'\right) V\left(r'\right) \Psi_{(j)}\left(r'\right) dr', \quad (2.1)$$

где каждое из значений индекса  $j = 1, 2, 3, 4$ , как и ранее, соответствует определенному варианту квазипотенциального подхода.

Решение уравнения (2.1) для модельного потенциала « $\delta$ -сфера»

$$V^{(l)}(r) = V_0 \delta(r - a),$$

как нетрудно убедиться, можно представить в форме

$$\psi_{(j)}^{(l)}(r) = s_2(\chi_q, r) + \frac{s_2(\chi_q, a) V_0 G_{2(j)}(\chi_q, r, a)}{1 - V_0 G_{2(j)}(\chi_q, a, a)}. \quad (2.2)$$

При больших значениях переменной  $r$  волновые функции  $\psi_{(j)}^{(l)}(r)$ , задаваемые выражением (2.2), преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}^{(l)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} &= \\ &= s_2(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} - f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) e^{im\chi_q r} m \operatorname{sh} \chi_q. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В выражении (2.3)  $f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$  – релятивистская амплитуда рассеяния:

$$f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) = \frac{-V_0 K_{q(j)} R(\chi_q, a) s_2(\chi_q, a)}{m \operatorname{sh} \chi_q (1 - V_0 G_{2(j)}(\chi_q, a, a))}. \quad (2.4)$$

Парциальное сечение рассеяния  $\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$  для орбитального квантового числа  $l = 2$  выражается через амплитуду рассеяния  $f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$  следующим образом:

$$\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) = 20\pi \left| f_{2(j)}^{(l)}(\chi_q) \right|^2. \quad (2.5)$$

На рисунке 2.1 иллюстрированы зависимости парциальных сечений рассеяния  $\sigma_{0,1,2}^{(l)}$  от скорости  $\chi_q$  при  $a = 5$ ,  $V_0 = 2$  и  $m = 1$ , рассчитанных на основе всех четырех рассматриваемых в работе уравнений для орбитального квантового числа  $l = 2$ , а также найденных ранее при  $l = 0; 1$  [7], [1].

Парциальные сечения  $\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$ , полученные в данной работе, так же как и полученные в работах [7], [1]  $\sigma_{0(j)}^{(l)}(\chi_q)$  и  $\sigma_{1(j)}^{(l)}(\chi_q)$ , обладают следующими особенностями:

- при увеличении массы частиц  $m$  графики сечений рассеяния всех четырех уравнений сближаются и локализуются в области малых  $\chi_q$ ;

- при увеличении параметра  $V_0$  максимальные значения сечений рассеяния увеличиваются;
- при увеличении параметра  $a$  максимальные значения сечений рассеяния увеличиваются, а вблизи нулей функции  $\sigma_{2(j)}^{(l)}(\chi_q)$  появляются дополнительные пики.

На рисунке 2.1 прослеживается тенденция, отмеченная в [1] при сравнении поведения

сечений рассеяния  $\sigma_{0(j)}^{(l)}(\chi_q)$  и  $\sigma_{1(j)}^{(l)}(\chi_q)$ : локальные максимумы сечений рассеяния с увеличением  $l$  смещаются в область больших значений  $\chi_q$ , что является следствием наличия центростремительного барьера.

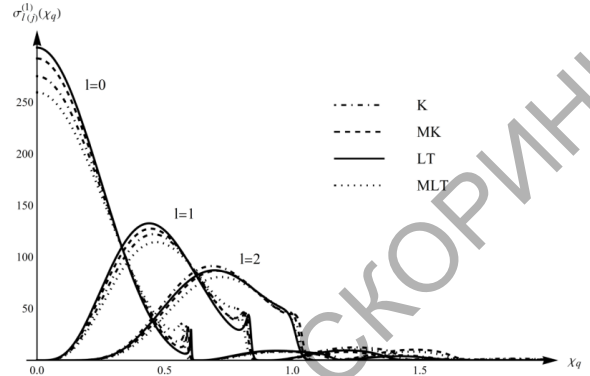


Рисунок 2.1 – Зависимость парциальных сечений  $\sigma_{0,1,2}^{(l)}$  от  $\chi_q$

### 3 Решение парциальных уравнений при моделировании взаимодействия суперпозицией двух дельта-потенциалов

Перейдем к рассмотрению потенциала, являющегося суперпозицией двух потенциалов « $\delta$ -сфера»:

$$V^{(2)}(r) = V_1 \delta(r - a_1) + V_2 \delta(r - a_2), \quad (3.1)$$

при котором уравнение (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}^{(2)}(r) &= s_2(\chi_q, r) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 G_{2(j)}(\chi_q, r, a_i) V_i \psi_{(j)}^{(2)}(a_i). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражение для функции  $\psi_{(j)}^{(2)}(a_i)$  из (3.2) можно записать в компактной форме

$$\psi_{(j)}^{(2)}(a_i) = \frac{\Delta_{i(j)}(\chi_q)}{\Delta_{(j)}(\chi_q)},$$

используя обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{(j)}(\chi_q) &= \prod_{n=1}^2 \left[ 1 - V_n G_{2(j)}(\chi_q, a_n, a_n) \right] - \\ &- V_1 V_2 \left( G_{2(j)}(\chi_q, a_1, a_2) \right)^2; \\ \Delta_{1(j)}(\chi_q) &= s_2(\chi_q, a_1) \left[ 1 - V_2 G_{2(j)}(\chi_q, a_2, a_2) \right] + \\ &+ V_2 s_2(\chi_q, a_2) G_{2(j)}(\chi_q, a_1, a_2); \\ \Delta_{2(j)}(\chi_q) &= s_2(\chi_q, a_2) \left[ 1 - V_1 G_{2(j)}(\chi_q, a_1, a_1) \right] + \\ &+ V_1 s_2(\chi_q, a_1) G_{2(j)}(\chi_q, a_2, a_1). \end{aligned}$$

Соотношение (3.2) при  $r \rightarrow \infty$  упрощается:

$$\psi_{(j)}^{(2)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = s_2(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} - f_{2(j)}^{(2)}(\chi_q) e^{im\chi_q r} m \operatorname{sh} \chi_q,$$

и для определения релятивистской амплитуды рассеяния получаем формулу

$$f_{2(j)}^{(2)}(\chi_q) = \frac{-K_{q(j)}}{m \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{i=1}^2 V_i R(\chi_q, a_i) \Psi_{(j)}^{(2)}(a_i).$$

Парциальное сечение рассеяния  $\sigma_{2(j)}^{(2)}(\chi_q)$  выражается через амплитуду рассеяния  $f_{2(j)}^{(2)}(\chi_q)$  по формуле, аналогичной (2.5). При этом его поведение легко проследить при помощи графиков, изображенных на рисунке 3.1: при значениях параметров  $a_1 = 3$ ,  $V_1 = 1$ ,  $a_2 = 4$ ,  $V_2 = 2$ ,  $m = 1$  – для состояния с орбитальным квантовым числом  $l = 2$ , рассмотренным в работе, а так же для состояний с орбитальными квантовыми числами  $l = 0, 1$ , рассмотренными ранее.

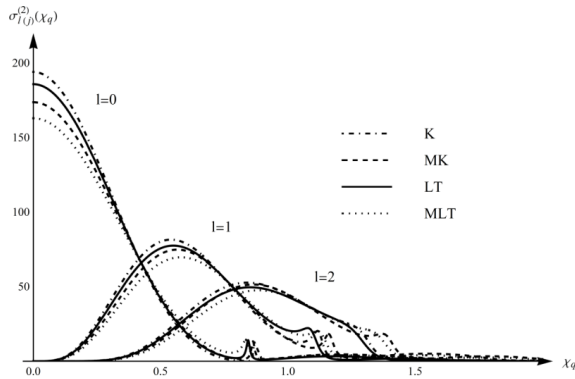


Рисунок 3.1 – Зависимость парциальных сечений  $\sigma_{0,1,2(j)}^{(2)}$  от  $\chi_q$

На рисунке 3.1 видно, что и при использовании модельного потенциала (3.1) происходит сдвиг максимумов парциального сечения рассеяния в сторону больших значений  $\chi_q$  с увеличением значения орбитального квантового числа.

### Заключение

Таким образом, в настоящей статье были рассмотрены состояния рассеяния двух релятивистских бесспиновых частиц. Найден явный вид парциальных функций Грина в состояниях с  $l = 2$ , проведен анализ их поведения; показано, что найденные функции в нерелятивистском пределе представляют не что иное, как ФГ трехмерного уравнения Шредингера для  $d$ -состояний.

Парциальные релятивистские уравнения, соответствующие четырём квазипотенциальным моделям, решены с использованием двух вариантов потенциалов, выраженных через дельта-функции; вычислены амплитуды и сечения рассеяния.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Капшай, В.Н. Релятивистские парциальные функции Грина состояний рассеяния, характеризующихся орбитальным квантовым числом  $l = 1$  / В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 7–13.
2. Капшай, В.Н. Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. ст. – Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.
3. Капшай, В.Н. Парциальные квазипотенциальные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении / В.Н. Капшай, С.И. Филалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 10. – С. 44–50.
4. Arfken, G.B. Mathematical methods for physicists / G.B. Arfken, H.J. Weber, F.E. Harris. – 7th ed. – New York: Elsevier, 2013. – 1205 p.
5. Гельфонд, А.О. Вычеты и их приложения / А.О. Гельфонд. – Москва: Ленанд, 2018. – 114 с.
6. Taylor, J.R. Scattering theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions / J.R. Taylor // USA: Dover Publications, 2006. – 512 p.
7. Капшай, В.Н. Релятивистская задача о  $s$ -состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов « $\delta$ -сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12.

Поступила в редакцию 09.01.2023.

### Информация об авторах

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент  
Гришечкина Анастасия Александровна – аспирантка