МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_89
EDN: ZVWNLP

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЯКОБИ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОЙ ЭРМИТОВСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ

Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

THE ANALOGUE OF JACOBI'S THEOREM FOR SIMULTANEOUS HERMITIAN INTERPOLATION OF SEVERAL FUNCTIONS

T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены достаточные условия, при которых для системы функций существуют рациональные аппроксимации Эрмита – Якоби. Показано, что при выполнении этих условий, аппроксимации Эрмита – Якоби совпадают с соответствующими аппроксимациями Эрмита – Паде. Основной результат в частном случае, когда система состоит из одной функции, является хорошо известной теоремой Якоби.

Ключевые слова: *определители Адамара*, *совершенные системы функций*, *аппроксимации Эрмита – Паде*, *аппроксимации Эрмита – Якоби*.

Для цитирования: *Оснач*, *Т.М.* Аналог теоремы Якоби для одновременной Эрмитовской интерполяции нескольких функций / Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 89–92. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_89. – EDN: ZVWNLP

Abstract. The sufficient conditions are found under which rational Hermite – Jacobi approximations exist for a system of functions. It is shown that under these conditions, the Hermite – Jacobi approximations coincide with the corresponding Hermite – Pade approximations. The main result in the particular case when the system consists of one function is well-known Jacobi's theorem.

Keywords: *Hadamard determinants*, *perfect systems of functions*, *Hermite – Pade approximants*, *Hermite – Jacobi approximants*.

For citation: *Osnach*, *T.M.* The analogue of Jacobi's theorem for simultaneous Hermitian interpolation of several functions / T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko, A.P. Starovoitov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 89–92. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_89 (in Russian). – EDN: ZVWNLP

Введение

Пусть задан степенной ряд

$$f(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i,$$

представляющий функцию $f(z)$. Для каждой пары (n,m) целых неотрицательных чисел существуют такие многочлены $P_n(z)$, $Q_m(z)$, степени которых $\deg P_n \leqslant n$, $\deg Q_m \leqslant m$, что

$$Q_m(z)f(z)-P_n(z)=O(z^{n+m+1}). \qquad (0.1)$$

Здесь и далее под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $l_1 z^p + l_2 z^{p+1} + \ldots$.

Многочлены $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ соотношениями (0.1) определяются не единственным образом, тем не менее, дроби

$$\pi_{n,m}(z)=\pi_{n,m}(z;f)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

определяют одну и ту же рациональную функцию не зависимо от того, какие бы многочлены $P_n(z)$, $Q_m(z)$, удовлетворяющие условию (0.1), мы не взяли [1, гл. 2, § 1]. Существование многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z)$ для каждой пары индексов (n,m) доказано А. Паде [2 , гл. 1, § 1.1]. В связи с этим в настоящее время рациональные функции $\pi_{n,m}(z)$ принято называть классическими аппроксимациями Паде или Фробениуса – Паде (Г. Фробениус в 1881 году рассматривал аналогичную задачу).

Похожие рациональные функции появились также в 1846 году в работе К. Якоби [3], который обобщил результат О. Коши о рациональной интерполяции функции, заданной в $n+m+1$ различных точках. К. Якоби рассмотрел $(n+m+1)$-кратную рациональную интерполяцию в одной точке. Его конструкция приводит к следующему определению.

***Определение* 0.1.** *Рациональную функцию вида*

$$\hat{\pi}_{n,m}(z)=\hat{\pi}_{n,m}(z;f)=\frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)},$$

где многочлены $\hat{Q}_m(z), \hat{P}_n(z)$ *имеют степени, соответственно, не выше m и n, будем называть аппроксимацией Паде – Якоби для пары* (m,n) *и функции* $f(z)$, *если она имеет максимально возможный порядок касания к ряду* (0.1), *т. е.*

$$f(z)-\frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_m(z)}=O(z^{n+m+1}).$$

В отличие от аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$, которые согласно теореме Паде [2, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1] существует для любой пары индексов (m,n), аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(z;f)$ может и не существовать. Соответствующий пример функции $f(z)$ и пары (n,m) приведен в [2, гл. 1, § 1.4]. Подробное исследование условий на функцию, при выполнении которых $\hat{\pi}_{n,m}(z;f)$ существует, провел Д. Бейкер [2, гл. 1, § 1.4]. Поэтому рациональную дробь $\hat{\pi}_{n,m}(z;f)$ иногда называют аппроксимациями Паде в смысле Бейкера. Первый существенный результат в этом направлении исследований был получен К. Якоби [3]. Для его формулировки введем в рассмотрение определители Адамара

$$H_n=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+1} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}, \qquad (0.2)$$

элементами которых являются коэффициенты ряда (0.1).

Теорема Якоби [3]. *Если для пары индексов* (m,n) *определитель* $H_{n,m}\neq 0$, *то аппроксимации Паде – Якоби* $\hat{\pi}_{n,m}(z;f)$ *существуют и совпадают с классическими аппроксимациями Паде – Фребениуса, т. е.*

$$\hat{\pi}_{n,m}(z;f)=\pi_{n,m}(z;f).$$

Аналогичные конструкции рациональных функций, но соответствующие одновременной интерполяции нескольких функций, были разработаны Ш. Эрмитом [4] и легли в основу его доказательства трансцендентности числа *e*. В работе [4] впервые появились интерполяционные рациональные дроби, которые в настоящее время принято называть совместными аппроксимациями Паде или аппроксимациями Эрмита – Паде [1, гл. 4, § 1]. Как и в одномерном случае, когда $k=1$, при $k>1$ совместные аппроксимации могут быть двух типов. Мы их будем называть аппроксимациями Эрмита – Паде и аппроксимациями Эрмита – Якоби. Изначально Ш. Эрмит рассматривал одновременную интерполяцию нескольких экспоненциальных функций. Как будет показано далее, для экспоненциальных функций обе конструкции таких рациональных функций совпадают. Для произвольного набора из нескольких аналитических функций это не так. Соответствующий пример приведем далее.

1 Аппроксимации Эрмита – Паде и Эрмита – Якоби

Пусть $\mathbf{f}=(f_1,f_2,...,f_k)$ – набор, состоящий из *k* степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i,\ j=1,...,k \qquad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Не ограничивая общности, считаем, что все ряды в (1.1) сходятся в некоторой окрестности нуля и тем самым равенства (1.1) определяют систему $\mathbf{f}$, состоящую из функций аналитических в окрестности нуля.

Множество *k*-мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных *k* целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m}=(m_1,...,m_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ – это сумма $m=m_1+...+m_k$. Зафиксируем индекс $n\in\mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_k)\in\mathbb{Z}_+^k$.

***Определение* 1.1.** *Аппроксимациями Эрмита – Паде для пары* $(n,\vec{m})$ *и системы функций* (1.1) *называются рациональные дроби*

$$\pi_{n_j,\vec{m}}^j(z)=\pi_{n_j,\vec{m}}^j(z;\mathbf{f})=\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)},\ j=1,...,k,$$

где тождественно не равный нулю многочлен $Q_m(z)=Q_m(z,\mathbf{f})$, $\deg Q_m\leqslant m$ *и многочлены* $P_{n_j}^j(z)=P_{n_j}^j(z;\mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j\leqslant n_j$, $n_j=n+m-m_j$ *при* $j=1,...,k$ *удовлетвор*яют условиям

$$Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=O(z^{n+m+1}). \qquad (1.2)$$

Если $k=1$, то $\mathbf{f}$ состоит из одной функции $f(z)=f_1(z)$. В этом случае $\pi_{n_1,\vec{m}}^1(z;f_1)$ является аппроксимацией Паде $\pi_{n,m}(z;f)$. Введем в рассмотрение аппроксимации Эрмита – Якоби.

***Определение* 1.2.** *Аппроксимациями Эрмита – Якоби для пары* $(n,\vec{m})$ *и системы функций* $\mathbf{f}$, *определённых равенствами* (1.1), *будем называть рациональные дроби*

$$\hat{\pi}_{n_j,\vec{m}}^j(z)=\hat{\pi}_{n_j,\vec{m}}^j(z;\mathbf{f})=\frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)},$$

где многочлены, стоящие в числителе и знаменателе,

$$\hat{Q}_m(z)=\hat{Q}_m(z,\mathbf{f}),\ \deg\hat{Q}_m\leqslant m,$$

$$\hat{P}_{n_j}(z)=\hat{P}_{n_j}(z;\mathbf{f}),\ \deg\hat{P}_{n_j}^j\leqslant n_j,\ n_j=n+m-m_j$$

при $j=1,...,k$ *подбираются таким образом, чтобы*

$$f_j(z)-\frac{\hat{P}_{n_j}^j(z)}{\hat{Q}_m(z)}=O(z^{n+m+1}). \qquad (1.3)$$

Хорошо известно [2, гл. 4, § 1], что многочлены $Q_m(z), P_{n_j}^j(z)$, для которых справедливы равенства (1.2), всегда существуют, но определяются, вообще говоря, не однозначно. В [5] и [6] установлены необходимые и достаточные условия, при которых эти многочлены определяются (с точностью до числового множителя) единственным образом, и поэтому аппроксимации Эрмита – Паде $\{\pi_{n_j,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. Для единственности существования многочленов $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ необходимо и достаточно (см. [5] и [6]), чтобы ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ порядка $m\times(m+1)$ был максимальный, т. е. $rankF_{n,\vec{m}} = m$. Матрица $F_{n,\vec{m}}$ определяется равенством

$$F_{n,\vec{m}} = \begin{pmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \cdots & f_{n_1+2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k+1}^k \\ f_{n-m_k+2}^k & f_{n-m_k+3}^k & \cdots & f_{n_k+2}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m}^k \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

В отличие от многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде многочлены $\hat{Q}_m(z), \hat{P}_{n_j}^j(z)$, удовлетворяющие условиям (1.3), и рациональные дроби $\hat{\pi}_{n_j,\vec{m}}^j(z)$ могут не существовать. Приведем соответствующий пример.

Пример. Пусть $k=2, n=1, m_1=m_2=1$,

$$f_1(z) = 2+z+2z^2+z^3+2z^4+z^5+\ldots$$

$$f_2(z) = 1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+\ldots$$

Тогда $n_1=n_2=2$, многочлены $Q_2(z)$, $P_2^1(z)$, $P_2^2(z)$, удовлетворяющие условиям (1.3), находятся однозначно с точностью до числового множителя и при определенном выборе этого множителя имеют вид:

$$P_2^1(z) = 2z-3z^2,\ P_2^2(z) = z-z^2,$$

$$Q_2(z) = z-2z^2.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$f_1(z) - \frac{2z-3z^2}{z-2z^2} \neq O(z^4),$$

$$f_2(z) - \frac{z-z^2}{z-2z^2} \neq O(z^4).$$

2 Кратный аналог теоремы Якоби

Для формулировки основного результата введем необходимые обозначения. Матрица $F_{n,\vec{m}}$ состоит из блок-матриц

$$F^j = \begin{pmatrix} f_{n-m_j+1}^j & f_{n-m_j+2}^j & \cdots & f_{n_j+1}^j \\ f_{n-m_j+2}^j & f_{n-m_j+3}^j & \cdots & f_{n_j+2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^j & f_{n+1}^j & \cdots & f_{n+m}^j \end{pmatrix}$$

порядка $m_j\times(m+1)$, расположенных друг над другом в порядке следования. В случае, если $m_j=0$ матрица $F_{n,\vec{m}}$ не содержит блок-матрицу F^j. При $k=1$ либо $\vec{m}=(m_1,0,0,\ldots,0)$ матрица $F_{n,\vec{m}}$ состоит из одного блока F^1. Если в $F_{n,\vec{m}}$ удалить последний столбец, то получим квадратную матрицу порядка *m*. Определитель этой матрицы обозначим через $H_{n,\vec{m}}$. Тогда

$$H_{n,\vec{m}} = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n_j}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \cdots & f_{n+m-1}^k \end{vmatrix}.$$

Определитель $H_{n,\vec{m}}$ является кратным $(k>1)$ аналогом определителя Адамара (0.2): при $k=1$ либо $\vec{m}=(m_1,0,0,\ldots,0)$ $H_{n,\vec{m}}$ совпадает с определителем (0.2) для функции $f_1(z)$.

***Теорема* 2.1.** *Если для мультииндекса* $(n,\vec{m})$ *и системы функций* $\mathbf{f}$, *определенных равенствами* (1.1), *определитель* $H_{n,\vec{m}}\neq 0$, *то аппроксимации Эрмите – Якоби существуют*, *определяются единственным образом и каждая из них тождественно совпадает с соответствующей аппроксимацией Эрмита – Паде*, *т. е.*

$$\hat{\pi}_{n_j,\vec{m}}^j(z;\mathbf{f}) = \pi_{n_j,\vec{m}}^j(z;\mathbf{f}),\ j=1,\ldots,k. \quad (1.5)$$

Доказательство. Предположим вначале, что $\vec{m}=(m_1,\ldots,m_k)$ – ненулевой мультииндекс. Тогда, если $H_{n,\vec{m}}\neq 0$, то

$$rankF_{n,\vec{m}} = m.$$

Поэтому аппроксимации Эрмита – Паде

$$\pi_{n_j,m}^j(z) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)},\ j=1,\ldots,k$$

существуют, определяются единственным образом, а многочлены $Q_m(z), P_{n_j}^j(z)$ находятся с точностью до числового множителя единственным образом и при $j=1,\ldots,k$ удовлетворяют условиям

$$Q_m(z)\cdot f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = O(z^{n+m+1}). \quad (1.6)$$

В этом случае при подходящем выборе нормирующего множителя многочлен $Q_m(z)$ представляется (см. [5], [6]) в виде определителя

$$Q_m(z) = det\begin{bmatrix} F_{n,\vec{m}} \\ E(z) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \dots & f^1_{n_1+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \dots & f^1_{n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \dots & f^k_{n_k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \dots & f^k_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m,$$

где $E(z) = \begin{pmatrix} z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{pmatrix}$ – матрица-строка, а b_j можно найти, разложив определитель в предыдущем равенстве по элементам последней строки. В частности, $b_0 = H_{n,\vec{m}} \neq 0$. Поэтому функция $1/Q_m(z)$ является аналитической в некоторой окрестности нуля и, следовательно, представима в этой окрестности степенным рядом

$$\frac{1}{Q_m(z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Разделив левую и правую часть равенств (1.6) на $Q_m(z)$, а затем перемножив соответствующие ряды в правой части нового равенства, получим, что при $j = 1, \ldots, k$

$$f_j(z) - \pi^j_{n_j,\vec{m}}(z) = O(z^{n+m+1}).$$

Отсюда и определения аппроксимаций Эрмита – Якоби следует справедливость равенств (1.5).

До сих пор предполагалось, что мультииндекс $\vec{m}$ является ненулевым. В случае, если $\vec{m} = (0, \ldots, 0)$ – нулевой мультииндекс, то, очевидно, что с точностью до числового множителя $Q_m(x) \equiv 1$, а $P^j_n(z)$ – n-ая частная сумма ряда $f_j(z)$, и равенства (1.5) также сохраняются. □

3 Замечания и следствия

Систему **f** назовём вполне совершенной [6], если для любого мультииндекса $(n, \vec{m})$

$$\deg Q_{\vec{m}} = m, \deg P^j_{n_j} = n_j, \text{ НОД}(Q_m, P^j_{n_j}) = 1.$$

Вполне совершенной системой является, например, набор экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$. Этот факт доказал Ш. Эрмит [4]. В [6] установлено, что если система функций **f** вполне совершенна, то $H_{n,\vec{m}} \neq 0$. Следовательно справедливо следующее следствие.

***Следствие* 3.1.** *Если система* **f** *вполне совершенна, то для любого мультииндекса* $(n, \vec{m})$ *существуют аппроксимации Эрмита – Якоби и справедливы равенства* (1.5).

***Следствие* 3.2.** *Теорема Якоби является частным случаем теоремы* 2.1.

Чтобы убедится в этом, достаточно в теореме 2.1 положить $k = 1$ либо взять мультииндекс $\vec{m} = (m_1, 0, \ldots, 0)$.

В заключении заметим, что теорема 2.1 и ее следствия остаются в силе, если вместо сходящихся рядов (1.1) рассматривать формальные степенные ряды. В этом случае ряды во всех равенствах следует понимать формально, не обращая внимания на их сходимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.

2. *Бейкер*, *Дж. мл.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.

3. *Jacobi*, *C.* Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function / C. Jacobi // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1846. – № 30. – P. 127–156.

4. *Hermite*, *C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

5. *Старовойтов*, *А.П.* О единственности решений задач Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фізіка-матэматычных навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 445–456.

6. *Старовойтов*, *А.П.* О детерминантных передставлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–36.

Поступила в редакцию 13.01.2023.

Информация об авторах

Оснач Татьяна Михайловна – аспирантка
Рябченко Наталия Валерьевна – к.ф.-м.н.
Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор