**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75
EDN: RSKBWR

# ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ σ-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

**Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова**

*Витебский государственный университет имени П.М. Машерова*

# INJECTORS OF FINITE σ-SOLUBLE GROUPS

**N.T. Vorob'ev, E.D. Volkova**

*P.M. Masherov Vitebsk State University*

**Аннотация.** Пусть $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Конечная группа $G$ называется σ*-разрешимой*, если каждый главный фактор $H / K$ группы $G$ является $\sigma_i$-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$. Класс Фиттинга $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i\in\sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ называется σ*-классом Хартли*. В работе доказаны существование и сопряженность $\mathfrak{H}$-инъекторов в $G$ и описана их характеризация в терминах радикалов.

**Ключевые слова:** σ*-разрешимая группа*, σ*-класс Хартли*, *инъектор*.

**Для цитирования:** *Воробьев, Н.Т.* Инъекторы конечных σ-разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75. – EDN: RSKBWR

**Abstract.** Let $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e. $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ for all $i \neq j$. Finite group $G$ is σ*-soluble*, if every chief factor $H / K$ of $G$ is a $\sigma_i$-group for some $\sigma_i \in \sigma$. Fitting class $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i\in\sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ is said to be σ*-class Hartley*. In this paper we prove the existence and conjugacy of $\mathfrak{H}$-injectors of $G$ and describe their characterization in the terminal of the radicals.

**Keywords:** σ*-soluble group*, σ*-class Hartley*, *injector*.

**For citation:** *Vorob'ev, N.T.* Injectors of finite σ-soluble groups / N.T. Vorob'ev, E.D. Volkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 1 (54). – P. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_1_54_75 (in Russian). – EDN: RSKBWR

## Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. *Классом групп* называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой $G$ и все группы, изоморфные $G$.

Для многих исследований в теории групп и их классов основополагающими являются теоремы Силова [2] и Холла [3]. Изящное обобщение этих теорем в терминах классов Фиттинга было получено в работе Гащюца, Фишера и Хартли [4], где доказано, что *для любого класса Фиттинга разрешимых групп* $\mathfrak{F}$ *в каждой разрешимой группе G существуют* $\mathfrak{F}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены*. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. При этом подгруппу $V$ группы $G$ называют $\mathfrak{F}$*-инъектором*, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп $G$, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы $N$ группы $G$. В последующем развитие методов локализации в теории групп привело к серии результатов [5]–[13], посвященных как обобщению теоремы Гащюца – Фишера – Хартли, так и нахождению характеризаций инъекторов в терминах радикалов и холловых подгрупп.

В работах А.Н. Скибы [14]–[16] был предложен оригинальный метод исследования групп при помощи наличия у них σ-свойств, который состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P}\backslash\pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа $n$, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы $G$. Пусть $\sigma$ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа $G$ называется σ*-примарной*, если $G$ является $\sigma_i$-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; *σ-нильпотентной*, если $G = G_1 \times G_2 \times ... G_n$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, G_2, ..., G_n$; *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор G σ-примарен.

В настоящей работе мы применяем указанный метод Скибы для доказательства существования и сопряженности $\mathfrak{H}$-инъекторов и их характеризации в любой σ-разрешимой группе для случая, когда $\mathfrak{H}$ – σ-класс Хартли. При этом, следуя [6], класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ вида

$$\cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

будем называть σ-классом Хартли. Следствиями полученных результатов (теорема 4.3) являются, в частности, характеризации инъекторов разрешимых групп, полученные Фишером [5], Хартли [6], Го Вэньбинем и Н.Т. Воробьевым [12], Наингом, Го Вэньбинем и Н.Т. Воробьевым [13].

## 1 Предварительные сведения

Напомним, если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе $G$ существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом G* и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

*Произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *классов групп* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : \exists N \trianglelefteq G,\ N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{H})$; *произведением* $\mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$ [1, с. 566]. Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

***Лемма 1.1*** [1, замечание IX.1.11]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы $N$ группы $G$. Если класс групп $\mathfrak{F}$ является одновременно гомоморфом и классом Фиттинга, то его называют *радикальным гомоморфом*.

***Лемма 1.2*** [17, лемма 4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга и $\mathfrak{M}$ – радикальный гомоморф. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$.*

Класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то любая группа $G$ имеет наименьшую нормальную подгруппу, факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Ее называют *$\mathfrak{F}$-корадикалом G* и обозначают $G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – формации. Класс групп $\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H} = (G : G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$ называют *произведением формаций* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

***Лемма 1.3*** [1, теорема IV.1.8 (a), (b)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые формации. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ для всех групп G*;

2) $G^{\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ *для всех групп G.*

***Лемма 1.4*** [1, IX.1.1 (a)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Если $N \trianglelefteq G$, то*

$$N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}.$$

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппу $V$ группы $G$ называют:

(1) *$\mathfrak{F}$-максимальной* в $G$, если $H \in \mathfrak{F}$ и из условий $V \leq H \leq G$ и $H \in \mathfrak{F}$ следует, что $V = H$;

(2) *$\mathfrak{F}$-инъектором* $G$, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой $N$ для любой субнормальной подгруппы $N$ группы $G$.

***Лемма 1.5*** [1, IX.1.3]. *Пусть G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс групп. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $K \trianglelefteq G$ и $V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $G$, то $V \cap K$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $K$*;

2) *если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $G$, то $G_{\mathfrak{F}} \leq V$ и $V$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа $G$*;

3) *если $V$ – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа $G$ и $V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор для любой максимальной нормальной подгруппы $M$ группы $G$, то $V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $G$*;

4) *если $V$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $G$ и $\alpha : G \to G\alpha$ – изоморфизм, то $V\alpha$ – $\mathfrak{F}$-инъектор $G\alpha$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда группу $G$ называют *$\mathfrak{F}$-скованной*, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. Известно, что если $G$ разрешима, то группа $G$ $\mathfrak{N}$-скована, т. е. $C_G(F(G)) \leq F(G)$, где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга $G$. Произведение всех нормальных σ-нильпотентных подгрупп группы $G$ называется *σ-фиттинговой подгруппой G* и обозначается через $F_\sigma(G)$ [16].

***Лемма 1.6*** [16, лемма 3.1]. *Если группа G σ-разрешима, то $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$, т. е. группа G является $\mathfrak{N}_\sigma$-скованной.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *наследственным*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы $H$ группы $G$. Фиттинговой формацией называют класс групп, который одновременно является формацией и классом Фиттинга (см., например, [1, XI.1]).

***Лемма 1.7*** [14, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{S}_\sigma$ – класс всех σ-разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{S}_\sigma$ является наследственной фиттинговой формацией.*

***Лемма* 1.8** [15, теорема 3.18]. *Класс* $\mathfrak{N}_\sigma$ *всех σ-нильпотетных групп является наследственным классом Фиттинга.*

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ – некоторые непустые классы групп, $t \geq 2$. Тогда класс групп $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_t$, состоящий из всех групп

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_t,$$

где $G_i \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots t\}$, называют *прямым произведением* (см. [18, определение 17.6]) классов $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$. Если $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$ и $\mathfrak{F}_i$ – классы Фиттинга, то $\times_{i=1}^{t} \mathfrak{F}_i$ является классом Фиттинга [1, пример XI. (1.6)].

***Лемма* 1.9** [10]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$, *где* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ *при* $i \neq j$, $\cup_{i=1}^{n} \pi(\mathfrak{F}_i) = \mathbb{P}$ *и* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^2$ *– непустая насыщенная формация Фиттинга для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда каждая конечная группа обладает* $\mathfrak{F}$*-инъектором.*

***Лемма* 1.10** [9, теорема 1]. *Пусть*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_t,$$

*где все* $\mathfrak{F}_i$ *являются непустыми классами Фиттинга и* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ *при* $i \neq j$. *Пусть G – такая группа, что* $C_G(G_\mathfrak{F}) \leq G_\mathfrak{F}$. *Пусть* $\mathfrak{H}_i = \times_{i \neq j} \mathfrak{F}_j$ *и* $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$. *Для каждого i,* $1 \leq i \leq t$ *выберем* $\mathfrak{F}_i$*-подгруппу* $V_i$ *в* $C_i$, *содержащую* $G_{\mathfrak{F}_i}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $V_i \curlywedge V_j = 1$ *для всех* $i \neq j$;

2) $V_1 V_2 \ldots V_t = V_1 \times V_2 \times \ldots V_t$ – $\mathfrak{F}$*-подгруппа, содержащая* $G_\mathfrak{F}$;

3) *если* $V_i$ $\mathfrak{F}_i$*-максимальна в* $C_i$ *для любого i, то* $V_1 V_2 \ldots V_t$ $\mathfrak{F}$*-максимальна в G*;

4) *если для каждого i подгруппа* $V_i$ *является* $\mathfrak{F}_i$*-инъектором в* $C_i$, *то* $V_1 V_2 \ldots V_t$ *является* $\mathfrak{F}$*-инъектором в G*;

5) *если S –* $\mathfrak{F}$*-инъектор группы G, то* $S_{\mathfrak{F}_i}$ – $\mathfrak{F}_i$*-инъектор в* $C_i$ *для любого i*;

6) *если для каждого i подгруппа* $V_i$ *сопряжена в* $C_i$ *с некоторой подгруппой* $U_i$ *из* $C_i$, *то* $U_1 U_2 \ldots U_t$ *является подгруппой, сопряженной с* $V_1 V_2 \ldots V_t$ *в G.*

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Натуральное число *n* называется $\Pi$*-числом*, если

$$\pi(n) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i.$$

Подгруппа *H* группы *G* называется $\Pi$*-подгруппой* *G*, если $|H|$ является $\Pi$-числом. Если $|H|$ – $\Pi$-число и индекс $|G : H|$ – $\Pi'$-число, то *H* называют *холловой* $\Pi$*-подгруппой G* [14].

***Теорема Скибы*** [14, теорема B]. *Группа G σ-разрешима тогда и только тогда, когда для любого* $\Pi \subseteq \sigma$ *группа G содержит холлову* $\Pi$*-подгруппу E и каждая* $\Pi$*-подгруппа G содержится в некотором сопряжении подгруппы E.*

***Лемма* 1.11** [19, теорема B (b)]. *Если* $\mathfrak{F}$ *– непустой неединичный класс Фиттинга и* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, *то класс всех* $\mathfrak{F}$*-скованных групп является классом Фиттинга.*

## 2 σ-Класс Хартли и его локальные задания

Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$. Всякое отображение вида $h : \sigma \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто $H_\sigma$*-функцией* [20]. Если $H$ – $H_\sigma$-функция, то символом $Supp(h)$ обозначают носитель *h*, т. е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Следуя [20], пусть $LH_\sigma(h) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех $\sigma_i$-групп и всех $\sigma_i'$-групп соответственно.

***Определение***. *Класс Фиттинга* $\mathfrak{H}$ *назовем σ-классом Хартли, если* $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ *для некоторой* $H_\sigma$*-функции h. В частности, если*

$$\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\},$$

*то* $\mathfrak{H}$ *называют классом Хартли* [3].

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ *– σ-класс Хартли, определяемый* $H_\sigma$*-функцией h, и* $\Pi = Supp(h)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$;

2) $G \in \mathfrak{H}$ *тогда и только тогда, когда* $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$;

3) $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})$.

*Доказательство*. 1. Если $\sigma_i \in \Pi$, то $(1) \in h(\sigma_i)$ и для любой $\sigma_i$-группы *G* такой, что $G \neq 1$ имеем $\sigma(G) = \{\sigma_i\}$. Поскольку $G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, по утверждению 1) леммы 1.3 из $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = 1$ следует $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = 1$. Тогда $G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и по лемме 1.1

$$G \in (1)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

для любого $\sigma_i \in \Pi$. По определению произведения классов Фиттинга $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и поэтому $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \leq G_{h(\sigma_i)}$. Ввиду определения $h(\sigma_i)$-радикала, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \trianglelefteq G_{h(\sigma_i)}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ и $G \in \mathfrak{H}$. Значит, $\Pi \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

Если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, то для некоторой группы $G \in \mathfrak{H}$ имеем $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Значит,

$\sigma_i \in \Pi$ и $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \Pi$. Таким образом, $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$.

2. Если $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G$ – $\mathfrak{H}$-группа, то $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Поскольку $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \le G_{h(\sigma_i)}$ и произведение $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация,

$$(G / G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}}) / (G_{h(\sigma_i)} / G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}}) \cong G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Следовательно, $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Обратно, если для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, то $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \le G_{h(\sigma_i)}$ и, следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Значит, $G \in \mathfrak{H}$.

3. Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $|G|$ – $\sigma(\mathfrak{H})$-число. Ввиду утверждения 1) $\sigma(\mathfrak{H}) = \Pi$ и поэтому $|G|$ – $\Pi$-число, то есть $G$ – $\Pi$-группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_{\Pi}$. Кроме того, из $G \in \mathfrak{H}$ по утверждению 2) следует $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если $\sigma \in \Pi \setminus \sigma(G)$, то

$$G \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Таким образом, $G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})$ и

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}).$$

Докажем обратное включение. Действительно, если $G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, по утверждению 2) леммы $G \in \mathfrak{H}$ и

$$\mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}) \subseteq \mathfrak{H}. \qquad \square$$

Многие известные классы групп являются σ-классами Хартли, что подтверждают следующие

***Примеры 2.2.*** 1. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$ – класс всех σ-нильпотентных групп, в частности, всех нильпотентных групп, $h$ – $H_{\sigma}$-функция такая, что $h(\sigma_i) = (1)$ – класс единичных групп для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$LH_{\sigma}(h) = \cap_{\sigma_i \in \sigma}(1)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} =$$
$$= (1)(\cap_{\sigma_i \in \sigma}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \cap_{\sigma_i \in \sigma}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{N}_{\sigma}.$$

2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_{\sigma}$, $h$ – $H_{\sigma}$-функция такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$LH_{\sigma}(h) = \cap_{\sigma_i \in \sigma}\mathfrak{X}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{X}(\cap_{\sigma_i \in \sigma}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}) = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_{\sigma}.$$

3. Напомним, что через $\mathfrak{N}_{\sigma}^{k}$ обозначают произведение $\mathfrak{N}_{\sigma} \ldots \mathfrak{N}_{\sigma}$, состоящей из $k$ сомножителей $\mathfrak{N}_{\sigma}$, где $k \in \mathbb{N}$; $\mathfrak{N}_{\sigma}^{0}$ является классом групп порядка 1 по определению. Наименьшее $n$ такое, что $G \in \mathfrak{N}_{\sigma}^{n}$ называется σ-нильпотентной длиной группы $G$ [21, с. 959].

Если $k \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{N}_{\sigma}^{k}$ – класс всех групп σ-нильпотентной длины не превосходящей $k$. Пусть $k \ge 1$ и $H_{\sigma}$-функция $h$ такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma}^{k-1}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Тогда с учетом примера (2) получаем, что $LH_{\sigma}(h) = \mathfrak{N}_{\sigma}^{k}$ является σ-классом Хартли.

4. Пусть $\Pi \subseteq \sigma$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\Pi}$ и $h$ – $H_{\sigma}$-функция такая, что

$$h(\sigma_i) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \sigma_i \in \Pi', \\ \mathfrak{E}_{\Pi}, & \text{если } \sigma_i \in \Pi. \end{cases}$$

Тогда $LH_{\sigma}(h) = \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{E}_{\Pi}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\mathfrak{E}_{\sigma_j}) =$
$= \mathfrak{E}_{\Pi} \cap \mathfrak{E}_{\Pi}(\cap_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\mathfrak{E}_{\sigma_j}) = \mathfrak{E}_{\Pi}$.

Следуя [20], [22], произведем классификацию $H_{\sigma}$-функций σ-класса Хартли.

Пусть $h$ – $H_{\sigma}$-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$. Тогда $h$ назовем:

(1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$;

(2) *устойчивой* [22], если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \ne j$;

(3) *устойчивой приведенной*, если $h$ является одновременно устойчивой и приведенной $H_{\sigma}$-функцией.

***Лемма 2.3.*** *Каждый σ-класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется приведенной $H_{\sigma}$-функцией.*

*Доказательство*. Поскольку $\mathfrak{H}$ – σ-класс Хартли, определяемый $H_{\sigma}$-функцией $h$, по утверждению 3) леммы 2.1

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}),$$

где $\Pi = Supp(h)$. Определим $H_{\sigma}$-функцию $\varphi$ такую, что $\varphi(\sigma_i) = h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ для всех $i \in I$. Очевидно, $\varphi(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. По лемме 1.2 $\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $LH_{\sigma}(\varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Обратно, пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда по утверждению 2) леммы 2.1 $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. По определению произведения классов Фиттинга $G / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \le G_{h(\sigma_i)}$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$. Так как $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \trianglelefteq G$, то $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{H}$. Получаем $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H} = \varphi(\sigma_i)$. Значит, $G \in \varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и

$$G \in \mathfrak{E}_{\Pi} \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi}\varphi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}) = LH_{\sigma}(\varphi).$$

Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq LH_{\sigma}(\varphi)$ и $\mathfrak{H} = LH_{\sigma}(\varphi)$. $\square$

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то символом $Fit\mathfrak{X}$ будем обозначать класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$.

***Лемма* 2.4.** *Каждый σ-класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется устойчивой приведенной $H_\sigma$-функцией.*

*Доказательство*. Пусть $\mathfrak{H}$ – σ-класс Хартли. По лемме 2.3 $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h_1)$ для некоторой приведенной $H_\sigma$-функции $h_1$. Пусть $\Pi = Supp(h)$. Определим класс групп следующим образом:

$$\psi(\sigma_i) = (G : G \cong H^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \text{ для некоторой группы } H \in h_1(\sigma_i))$$

для всех $i \in I$.

Пусть группа $X \in \psi(\sigma_i)$. Тогда $X \cong Y^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ для некоторой группы $Y \in h_1(\sigma_i)$. Ввиду замкнутости классов Фиттинга относительно взятия нормальных подгрупп, $Y^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in h_1(\sigma_i)$. Значит, $X \in h_1(\sigma_i)$ и $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$ для всех $i \in I$. Следовательно, по лемме 1.2 $\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$.

Если $Y_1 \in h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$, то $Y_1 / (Y_1)_{h_1(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \le (Y_1)_{h_1(\sigma_i)}$. Следовательно, $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in h_1(\sigma_i)$. Поскольку $((Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}})^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} = (Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$, имеем $(Y_1)^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \psi(\sigma_i)$. Значит, по определению произведения классов групп $Y_1 \in \psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Таким образом, справедливо равенство

$$\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} = h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}. \tag{2.1}$$

Пусть $h$ – $H_\sigma$-функция такая, что $h(\sigma_i) = Fit(\psi(\sigma_i))$ для каждого $i \in I$. Докажем, что $LH_\sigma(h) = \mathfrak{H}$. Поскольку $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$, имеем

$$h(\sigma_i) = Fit(\psi(\sigma_i)) \subseteq Fit(h_1(\sigma_i)) = h_1(\sigma_i).$$

Следовательно, по лемме 1.2

$$h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$$

для всех $i \in I$ и поэтому $LH_\sigma(h) \subseteq \mathfrak{H}$.

Докажем обратное включение. Ввиду равенства (2.1)

$$Fit(h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}) = h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} = Fit(\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}).$$

Так как $\psi(\sigma_i) \subseteq Fit(\psi(\sigma_i))$, то по лемме 1.2

$$\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq Fit(\psi(\sigma_i))\mathfrak{E}_{\sigma_i'}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'} &= Fit(\psi(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}) \subseteq \\ &\subseteq Fit(\psi(\sigma_i))\mathfrak{E}_{\sigma_i'} = h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда по лемме 1.2 $h_1(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq LH_\sigma(h)$ и $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$.

Так как $h(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $h_1$ является приведенной $H_\sigma$-функцией $\mathfrak{H}$, то $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для каждого $\sigma_i \in \Pi$ и $h$ – приведенная $H_\sigma$-функция.

Покажем, что для любой $H_\sigma$-функции $h$ справедливо включение $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \ne j$. Пусть группа $L \in h_1(\sigma_i)$ и $i \ne j$. Поскольку $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$, имеем $\mathfrak{E}_{\sigma_j} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Ввиду утверждения 1) леммы 1.3 $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \le L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}}$. Так как $h_1$ – приведенная $H_\sigma$-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$ и $L \in h_1(\sigma_i)$, то $L \in \mathfrak{H}$. По условию 2) леммы 2.1 $L \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Значит, $L / L_{h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \le L_{h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}}$. Тогда $L^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}} \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Таким образом, мы получаем, что для всех групп $G \in h_1(\sigma_i)$ $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$-корадикал $G$ содержится в $h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Следовательно, если $R \in \psi(\sigma_i)$, то $R \cong V^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ для некоторой группы $V \in h_1(\sigma_i)$ и $R \in h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Значит, $\psi(\sigma_i) \subseteq h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= Fit(\psi(\sigma_i)) \subseteq Fit(h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}) = \\ &= h_1(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'} = h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'} \end{aligned}$$

для всех $i \ne j$. □

## 3 $h_\sigma$-Радикалы для σ-класса Хартли

Пусть $G$ – группа и $h$ – $H_\sigma$-функция с носителем Π. Подгруппу $G_h = \prod_{\sigma_i \in \Pi} G_{h(\sigma_i)}$ назовем *$h_\sigma$-радикалом G*.

Свойства $h_\sigma$-радикала для σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$ вида $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ с устойчивой $H_\sigma$-функцией $h$ описывают следующие три леммы.

***Лемма* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – σ-класс Хартли с устойчивой приведенной $H_\sigma$-функцией h. Если H – подгруппа группы G такая, что $H / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$, то $H \in \mathfrak{H}$.*

*Доказательство*. По условию подгруппа $G_h$ нормальна в $H$. Следовательно, по лемме 1.4

$$G_{h(\sigma_j)} = (G_h)_{h(\sigma_j)} = G_h \cap H_{h(\sigma_j)} \le H_{h(\sigma_j)}$$

для всех $\sigma_j \in \sigma$. Мы вначале покажем, что $G_h / (G_h)_{h(\sigma_j)}$ – $\sigma_j'$-группа для всех $\sigma_j \in \sigma$. Заметим,

$$\begin{aligned} G_{h(\sigma_j)}G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)} &\cong G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ &= G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \end{aligned}$$

для всех $i \ne j$. По лемме 2.4 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Значит, $G_{h(\sigma_i)} \in h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Следовательно, $G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ и $G_{h(\sigma_i)}G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \ne j$. Тогда $G_h / G_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ и ввиду изоморфизмов

$$H_{h(\sigma_j)}G_h / H_{h(\sigma_j)} \cong G_h / G_h \cap H_{h(\sigma_j)} \cong$$

$$\cong (G_h / G_{h(\sigma_j)}) / ((G_h \cap H_{h(\sigma_j)}) / G_{h(\sigma_j)}),$$

заключаем, что $H_{h(\sigma_j)} G_h / H_{h(\sigma_j)}$ – $\sigma'_j$-группа. Поскольку группа $H / G_h$ σ-нильпотентна,

$$H / G_h \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}.$$

Следовательно, ввиду изоморфизма

$$H / H_{h(\sigma_j)} G_h \cong (H / G_h) / (H_{h(\sigma_j)} G_h / G_h),$$

$$H / H_{h(\sigma_j)} G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$$

для всех $\sigma_j \in \sigma$. Поскольку $G_h \le H_{h(\sigma_j)}$ по условию, $H_{h(\sigma_j)} G_h = H_{h(\sigma_j)}$ и $H / H_{h(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$. Следовательно, $H \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma'_j} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $H \in \mathfrak{H}$. □

***Лемма* 3.2.** *Пусть* $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – *σ-класс Хартли с устойчивой приведенной* $H_\sigma$*-функцией h. Тогда для любой σ-разрешимой группы G справедливо равенство*

$$G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_\sigma (G / G_h).$$

*Доказательство*. Пусть $F_\sigma (G / G_h) = R / G_h$. Поскольку $H_\sigma$-функция *h* является приведенной для σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$, то

$$(G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = G_{\mathfrak{H}} \cap G_{h(\sigma_i)} = G_{h(\sigma_i)}.$$

Ввиду $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H} = \cap_{i \in I} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$, следует $G_{\mathfrak{H}} \in h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Значит,

$$G_{\mathfrak{H}} / (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}.$$

Так как класс $\mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – формация, то

$$(G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)}) / (G_h / G_{h(\sigma_i)}) \cong G_{\mathfrak{H}} / G_h$$

и $G_{\mathfrak{H}} / G_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Следовательно, $G_{\mathfrak{H}} / G_h$ – σ-нильпотентная подгруппа группы $G / G_h$. Таким образом, $G_{\mathfrak{H}} / G_h \le F_\sigma (G / G_h)$ и $G_{\mathfrak{H}} \le R$.

Докажем обратное включение. Так как подгруппа $R / G_h$ σ-нильпотентна, то по лемме 3.1 $R \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $R \le G_{\mathfrak{H}}$ и

$$F_\sigma (G / G_h) = G_{\mathfrak{H}} / G_h. \qquad \square$$

***Лемма* 3.3.** *Пусть* $\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – *σ-класс Хартли с устойчивой приведенной* $H_\sigma$*-функцией h и G – σ-разрешимая группа. Если H –* $\mathfrak{H}$*-подгруппа группы G такова, что* $G_{\mathfrak{H}} \le H \le G$, *то* $H / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$.

*Доказательство*. Так как $G_{\mathfrak{H}} \trianglelefteq H$ и $H_\sigma$-функция *h* является приведенной, то по лемме 1.4 $G_{h(\sigma_i)} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $[H_{h(\sigma_i)}, G_{\mathfrak{H}}] \le H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = G_{h(\sigma_i)}$ и

$$H_{h(\sigma_i)} \le C_G (G_{\mathfrak{H}} / G_{h(\sigma_i)}) \le C_G (G_{\mathfrak{H}} / G_h).$$

Поскольку по лемме 1.7 группа $G / G_h$ σ-разрешима, то из леммы 1.6 следует, что $G / G_h$ $\mathfrak{N}_\sigma$-скована. Кроме того, по лемме 3.2 $G_{\mathfrak{H}} / G_h = F_\sigma (G / G_h)$. Следовательно,

$$C_{G/G_h} (G_{\mathfrak{H}} / G_h) \le G_{\mathfrak{H}} / G_h$$

и поэтому $C_G (G_{\mathfrak{H}} / G_h) \le G_{\mathfrak{H}}$. Тогда $H_{h(\sigma_i)} \le G_{\mathfrak{H}}$, что влечет $G_{h(\sigma_i)} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(\sigma_i)} = H_{h(\sigma_i)} \cap G_{\mathfrak{H}} = H_{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$ и поэтому $G_h = H_h$. Следовательно, $H / G_h = H / H_h \in \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для каждого $\sigma_i \in \sigma$ и $H / G_h$ – σ-нильпотентная группа. □

Ввиду лемм 3.1 и 3.3 получаем

***Следствие* 3.4.** *Пусть h – устойчивая приведенная* $H_\sigma$*-функция σ-класса Хартли*

$$\mathfrak{H} = \cap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma'_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i},$$

*G – σ-разрешимая группа и ее подгруппа H такова, что* $G_{\mathfrak{H}} \le H \le G$. *Тогда* $H \in \mathfrak{H}$ *в том и только том случае, если* $H / G_h$ *– σ-нильпотентная группа.*

## 4 О существовании и сопряженности $\mathfrak{H}$-инъекторов в σ-разрешимой группе

В данном разделе мы решаем задачу существования и сопряженности инъекторов в σ-разрешимых группах для σ-классов Хартли. Ключевым моментом в реализации такой задачи являются результаты о существовании и сопряженности инъекторов, полученные Л.А. Шеметковым в работах [9] и [10] (см. леммы 1.9 и 1.10). Возможность применения указанных результатов для σ-нильпотентных инъекторов представляют следующие две леммы.

***Лемма* 4.1.** *В любой группе существуют σ-нильпотентные инъекторы.*

*Доказательство*. Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$. Заметим, что группа *G* σ-нильпотентна, если $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_t$ для некоторых σ-примарных групп. Тогда класс всех σ-нильпотентных групп представим в виде

$$\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{E}_{\sigma_1} \times \mathfrak{E}_{\sigma_2} \times \ldots \times \mathfrak{E}_{\sigma_t},$$

где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – класс Фиттинга всех $\sigma_i$-групп для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Кроме того, $\mathfrak{E}_{\sigma_i} = (\mathfrak{E}_{\sigma_i})^2$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – насыщенная фиттингова формация. Итак, для класса Фиттинга $\mathfrak{N}_\sigma$ все условия леммы 1.9 выполняются и поэтому в каждой группе существуют σ-нильпотентные инъекторы. □

***Лемма* 4.2.** *Путь G – σ-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *в G существуют σ-нильпотентные инъекторы и любые два из них сопряжены*;

2) *подгруппа V группы G является σ-нильпотентным инъектором G тогда и только тогда*, *когда* $F_\sigma(G) \le V$ *и V –* $\mathfrak{N}_\sigma$*-максимальная подгруппа группы G.*

*Доказательство*. 1) Существование σ-нильпотентных инъекторов группы $G$ следует по лемме 4.1. Для доказательства их сопряженности проверим выполнимость условий леммы 1.10. Заметим, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является классом Фиттинга по лемме 1.8 и прямым произведением классов Фиттинга

$$\mathfrak{E}_{\sigma_1}, \mathfrak{E}_{\sigma_2}, \ldots, \mathfrak{E}_{\sigma_t},$$

где все $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ – непустые классы Фиттинга, и $\pi(\sigma_i) \cap \pi(\sigma_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Кроме того, поскольку группа $G$ σ-разрешима, по лемме 1.6 $C_G(F_\sigma(G)) \leq F_\sigma(G)$. Теперь будем использовать обозначения, введенные в лемме 1.10. Пусть $\mathfrak{H}_i = \times_{j \neq i} \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ и $C_i = C_G(G_{\mathfrak{H}_i})$. Поскольку группа $G$ σ-разрешима, то по лемме 1.7 ее подгруппа $C_i$ является σ-разрешимой. Следовательно, по теореме Скибы для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ в группе $C_i$ существует холлова $\sigma_i$-подгруппа $V_i$, которая является $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$-инъектором в $C_i$. Тогда по утверждению 4) леммы 1.10 подгруппа

$$H = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_t$$

является σ-нильпотентным инъектором группы $G$ и по утверждению 5) леммы 1.10 каждый σ-нильпотентный инъектор строится таким образом. Сопряженность σ-нильпотентных инъекторов в группе $G$ следует по утверждению 6) леммы 1.10, поскольку по теореме Скибы любые два σ-нильпотетных инъектора сопряжены в $C_i$. Утверждение 1) леммы доказано.

2) Пусть $M$ – максимальная из σ-нильпотентных подгрупп группы $G$, содержащая ее σ-нильпотентный радикал $F_\sigma(G)$, и $U_i = U_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. По теореме Скибы каждая $\sigma_i$-подгруппа содержится в некоторой холловой $\sigma_i$-подгруппе, т. е. для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ существует такой элемент $x_i \in C_i$, что $U_i^{x_i} \leq V_i$. Тогда по утверждению 6) леммы 1.10 $U_1^{x_1} U_2^{x_2} \ldots U_t^{x_t}$ является $\mathfrak{N}_\sigma$-подгруппой, сопряженной с $M = U_1 U_2 \ldots U_t$. Следовательно, $M^x \subseteq H$ для некоторого $x \in G$. Но $H$ – σ-нильпотентный инъектор и поэтому по утверждению 3) леммы 1.5 $H$ – максимальная из σ-нильпотентных подгрупп $G$. Следовательно, $M^x = H$. □

Напомним, что если $h$ – некоторая $H_\sigma$-функция, то подгруппа $G_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} G_{h(\sigma_i)}$ – $h_\sigma$-радикал группы $G$.

***Теорема* 4.3.** *Пусть σ – некоторое разбиение множества* $\mathbb{P}$ *и* $\mathfrak{H} = \cap_{i \in I} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i'} \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ *– σ-класс Хартли с устойчивой приведенной* $H_\sigma$*-функцией* $h$. *Тогда для любой σ-разрешимой группы* $G$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *подгруппа* $V$ *группы* $G$ *является* $\mathfrak{H}$*-инъектором* $G$ *в том и только том случае, если* $V / G_h$ *является σ-нильпотентным инъектором* $G / G_h$;

2) *в* $G$ *существуют* $\mathfrak{H}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены*;

3) *множество всех* $\mathfrak{H}$*-инъекторов группы* $G$ *– это в точности множество всех* $\mathfrak{H}$*-максимальных подгрупп* $G$, *содержащих* $\mathfrak{H}$*-радикал* $G$.

*Доказательство*. 1. Поскольку группа $G$ σ-разрешима, то по лемме 1.7 фактор $G / G_h$ σ-разрешим. Следовательно, в $G / G_h$ по утверждению 1) леммы 3.2 существует σ-нильпотентный инъектор $V / G_h$. Докажем, что подгруппа $V$ является $\mathfrak{H}$-инъектором группы $G$. Для этого будем использовать индукцию по порядку группы $G$. Если $G$ – единичная группа, то утверждение очевидно. Пусть $G \neq 1$ – контрпример минимального порядка и $M$ – произвольная максимальная подгруппа $G$. Пусть $M_h = \prod_{\sigma_i \in \sigma} M_{h(\sigma_i)}$ – $h_\sigma$-радикал $M$. Покажем вначале, что $M_h = M \cap G_h$. Для этого установим, что $G_h / G_{h(\sigma_j)}$ является $\sigma_j'$-группой для всех $\sigma_j \in \sigma$. Так как по условию $h$ – устойчивая приведенная $H_\sigma$-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$, то по лемме 2.4 $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j) \mathfrak{E}_{\sigma_j}$ для всех $i \neq j$. Тогда ввиду изоморфизма

$$G_{h(\sigma_j)} G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)} \cong G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_i)} \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ = G_{h(\sigma_i)} / (G_{h(\sigma_i)})_{h(\sigma_j)}$$

следует, что $G_{h(\sigma_j)} G_{h(\sigma_i)} / G_{h(\sigma_j)}$ является $\sigma_j'$-группой. Следовательно, по определению класса Фиттинга $G_h / G_{h(\sigma_j)}$ также является $\sigma_j'$-группой. Далее, используя лемму 1.4 и изоморфизм

$$(G_h \cap M) G_{h(\sigma_j)} / G_{h(\sigma_j)} \cong \\ \cong (G_h \cap M) / (G_h \cap M) \cap G_{h(\sigma_j)} = \\ = (G_h \cap M) / G_{h(\sigma_j)} \cap M = (G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)},$$

получаем, что $(G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)}$ является $\sigma_j'$-группой для любого $\sigma_j \in \sigma$. Поскольку

$$(G_h \cap M) / M_{h(\sigma_j)} / M_h / M_{h(\sigma_j)} \cong (G_h \cap M) / M_h,$$

то $(G_h \cap M) / M_h \in \cap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Кроме того, очевидно $\cap_{\sigma_j \in \sigma} \mathfrak{E}_{\sigma_j'} = \mathfrak{E}_{\cap_{\sigma_j \in \sigma} \sigma_j'} = \mathfrak{E}_{(\cup_{\sigma_j \in \sigma} \sigma_j)'} = (1)$.

Следовательно, справедливо равенство

$$G_h \cap M = M_h.$$

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $G_h \leq M$. Тогда $G_h = M_h$. Поскольку $G$ – σ-разрешимая группа, по лемме 1.7 фактор $G / G_h$

σ-разрешим. Значит, по лемме 1.6 группа $G / G_h$ $\mathfrak{N}_\sigma$-скована. Поскольку класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп является подклассом Фиттинга $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп, то по лемме 1.11 класс всех $\mathfrak{N}_\sigma$-скованных групп является классом Фиттинга. Тогда из

$$M / M_h = M / G_h \trianglelefteq G / G_h$$

следует, что группа $M / M_h$ является $\mathfrak{N}_\sigma$-скованной. Поскольку $V / G_h$ – σ-нильпотентный инъектор $G / G_h$, то по утверждению 1) леммы 1.5 подгруппа $(V \cap M) / G_h$ является σ-нильпотентным инъектором группы $M / G_h$. Тогда ввиду равенства $G_h = M_h$, Подгруппа $(V \cap M) / M_h$ – σ-нильпотентный инъектор группы $M / M_h$. Следовательно, по индукции $V \cap M$ является $\mathfrak{H}$-инъектором $M$. Теперь, чтобы показать, что подгруппа $V$ является $\mathfrak{H}$-инъектором $G$, достаточно выяснить, учитывая утверждение 3) леммы 1.5, $\mathfrak{H}$-максимальность $V$ в $G$. Так как $V / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$, то по лемме 2.5 $V$ является $\mathfrak{H}$-подгруппой $G$. Предположим, $V < V_1$, где $V_1$ – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа $G$. Тогда

$$V \cap M = V_1 \cap M,$$

так как в противном случае мы получили бы противоречие с тем, что подгруппа $V \cap M$ $\mathfrak{H}$-максимальна в $M$. Итак, в данном случае подгруппа $V_1$ – $\mathfrak{H}$-максимальна в $G$ и $V_1 \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы $M$ для любой максимальной нормальной подгруппы $M$ группы $G$. Следовательно, по утверждению 3) леммы 1.5 $V_1$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы $G$. Тогда $G_{\mathfrak{H}} \le V_1$ и по следствию 3.4 $V_1 / G_h$ – σ-нильпотентная подгруппа $G / G_h$. Ввиду утверждения 2) леммы 1.5 получаем противоречие с тем, что подгруппа $V / G_h$ – $\mathfrak{N}_\sigma$-максимальна в $G / G_h$. Следовательно, $V / G_h = V_1 / G_h$ и $V = V_1$.

Остается принять случай, когда $G_h \not\le M$. В этом случае ввиду максимальности нормальной подгруппы $M$, $G = G_h M$. Следовательно, по лемме 1.7 ввиду σ-разрешимости группы $G / G_h$ и изоморфизма $G_h M / G_h \cong M / M \cap G_h = M / M_h$, по лемме 1.6 подгруппа $M / M_h$ $\mathfrak{N}_\sigma$-скована. Учитывая изоморфизм $G / G_h \cong M / M_h$ по утверждению 4) леммы 1.5 следует, что $(V \cap M) / M_h$ является σ-нильпотентным инъектором группы $M / M_h$. Теперь, применяя индукцию, получаем, что $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы $M$. По лемме 3.1 $V$ – $\mathfrak{H}$-подгруппа $G$. Если $V < F_1$, где $F_1$ – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа $G$, то $V \cap M = F_1 \cap M$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \le V$, то $VM = G$. Следовательно,

$$F_1 = F_1 \cap VM = V(F_1 \cap M) = V(V \cap M) = V$$

и $V$ является $\mathfrak{H}$-максимальной подгруппой $G$. Значит, ввиду произвольности выбора максимальной нормальной подгруппы $M$ группы $G$, по утверждению 3) леммы 1.5 $V$ – $\mathfrak{H}$-инъектор $G$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $V$ – $\mathfrak{H}$-инъектор $G$. Покажем, что $V / G_h$ – $\mathfrak{N}_\sigma$-инъектор $G / G_h$. По утверждению 2) леммы 1.5 $G_{\mathfrak{H}} \le V$ и подгруппа $V$ $\mathfrak{H}$-максимальна в $G$. Следовательно, по лемме 3.3 $V / G_h$ – σ-нильпотентная группа. Покажем, что подгруппа $V / G_h$ $\mathfrak{N}_\sigma$-максимальна в $G / G_h$. Предположим, что $V / G_h < V_1 / G_h$ и $V_1 / G_h$ $\mathfrak{N}_\sigma$-максимальна в $G / G_h$. Поскольку $V_1 / G_h \in \mathfrak{N}_\sigma$ и $V_1 \ge G_{\mathfrak{H}}$ по следствию 3.4 $V_1 \in \mathfrak{H}$. Но подгруппа $V$ $\mathfrak{H}$-максимальна в $G$. Следовательно, $V = V_1$ и $V / G_h$ – $\mathfrak{N}_\sigma$-максимальная подгруппа в $G / G_h$.

2) Существование $\mathfrak{H}$-инъекторов следует из утверждения 1) теоремы ввиду существования σ-нильпотентных инъекторов в группе $G / G_h$. Докажем сопряженность $\mathfrak{H}$-инъекторов группы $G$. Пусть $F / G_h$ и $V / G_h$ – σ-нильпотентные инъекторы $G / G_h$. Тогда по утверждению 1) леммы 4.2 подгруппы $F / G_h$ и $V / G_h$ сопряжены в $G / G_h$. Следовательно, $F$ и $V$ сопряжены в $G$.

3) Если $V$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы $G$, то по утверждению 2) леммы 1.5 $V$ $\mathfrak{H}$-максимален в $G$ и $V \ge G_{\mathfrak{H}}$. Обратно, пусть $V$ – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа $G$, содержащая $\mathfrak{H}$-радикал $G_{\mathfrak{H}}$. Так как $h$ – приведенная $H_\sigma$-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$, то $G_h \le G_{\mathfrak{H}}$ и, следовательно, $G_h \le V$. Тогда по лемме 3.3 группа $V / G_h$ σ-нильпотентна. Ввиду $\mathfrak{H}$-максимальности $V$ в $G$, $V / G_h$ – $\mathfrak{N}_\sigma$-максимальна в $G / G_h$. По лемме 3.2

$$F_\sigma(G / G_h) \le V / G_h.$$

Следовательно, по утверждению 2) леммы 4.2 $V / G_h$ – $\mathfrak{N}_\sigma$-инъектор $G / G_h$. Теперь, используя утверждение 1) теоремы, мы получаем, что $V$ – $\mathfrak{H}$-инъектор $G$. □

## 5 Приложения

Приведем применение теоремы 4.3 для описания инъекторов в некоторых известных классах групп.

***Следствие* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_\sigma$, где $\mathfrak{X}$ – любой непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{N}_\sigma$ – класс всех σ-нильпотентных групп. Тогда подгруппа $V$*

*σ-разрешимой группы $G$ является $\mathfrak{H}$-инъектором $G$ в том и только том случае, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – σ-нильпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

*Доказательство*. Утверждение вытекает непосредственно из утверждения 1) теоремы 4.3, поскольку ввиду примера 2.2(2) $\mathfrak{H}$ является σ-классом Хартли, который определяется устойчивой приведенной $H_\sigma$-функцией $h$ такой, что $h(\sigma_i)=\mathfrak{X}$ для каждого $\sigma_i \in \sigma$.

Группа $G$ называется *мета-σ-нильпотентной*, если $G$ содержит нормальную подгруппу $N$ такую, что $N$ и $G/N$ σ-нильпотентны.

В случае $\mathfrak{X}=\mathfrak{N}_\sigma$, получаем

***Следствие* 5.2.** *Подгруппа $V$ σ-разрешимой группы $G$ является мета-σ-нильпотентным инъектором $G$ в том и только том случае, если $V/F_\sigma(G)$ – σ-нильпотентный инъектор $G/F_\sigma(G)$.*

В случае, когда $\sigma=\sigma^1=\{\{2\},\{3\},\ldots\}$ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем описание $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъекторов, полученное Хартли [6].

***Следствие* 5.3** [6, c. 206]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп и $\mathfrak{H}=\mathfrak{X}\mathfrak{N}$. Тогда подгруппа $V$ разрешимой группы $G$ является $\mathfrak{H}$-инъектором $G$ тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – нильпотентный инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$.*

Если $\sigma=\sigma^1$ и $\mathfrak{H}$ – класс Хартли с $H$-функцией $h$ такой, что $h(p)=(1)$ для всех $p\in\mathbb{P}$ ((1) – класс всех единичных групп), то из теоремы 4.3 вытекает результат Фишера [5], описывающий множество всех нильпотентных инъекторов. Его представляет

***Следствие* 5.4.** *Множество всех нильпотентных инъекторов разрешимой группы – это множество всех нильпотентных максимальных подгрупп этой группы, содержащих ее радикал Фиттинга.*

***Следствие* 5.5.** *Пусть $\mathfrak{N}_\sigma^k$ – класс Фиттинга всех групп σ-нильпотентной длины, не превышающей $k$ $(k\ge 1)$ и $G$ – σ-разрешимая группа. Тогда множество всех $\mathfrak{N}_\sigma^k$-инъекторов $G$ в точности совпадает с множеством всех подгрупп $V$ из $G$ таких, что подгруппа $V/G_{\mathfrak{N}_\sigma^{k-1}}$ является σ-нильпотентным инъектором группы $G/G_{\mathfrak{N}_\sigma^{k-1}}$.*

*Доказательство*. Ввиду примера 2.3(3) $\mathfrak{N}_\sigma^k$ является σ-классом Хартли с устойчивой приведенной $H_\sigma$-функцией $h$ такой, что $h(\sigma_i)=\mathfrak{N}_\sigma^{k-1}$ для всех $i\in I$. Так как $G$ σ-разрешима, то по лемме 1.6 $G/G_h$ является $\mathfrak{N}_\sigma$-скованной и утверждение следует из теоремы 4.3.

**Заключение**

В настоящей работе нами доказано существование и сопряженность $\mathfrak{H}$-инъекторов и найдена их характеризация в терминах радикалов для любой σ-разрешимой группы и σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. *Sylow*, *M.L*. Theoremes sur les groupes de substitutions / M.L. Sylow // Math. Ann. – 1872. – Vol. 5. – P. 584–594.

3. *Hall*, *P*. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.

4. *Fisher*, *B*. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.

5. *Fisher*, *B*. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Grouppen / B. Fisher. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.

6. *Hartley*, *B*. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

7. *Blessenohl*, *D*. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56, № 3. – P. 516–532.

8. *Шеметков*, *Л.А*. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков; в кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.

9. *Шеметков*, *Л.А*. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.

10. *Shemetkov*, *L.A*. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.

11. *Liu*, *Y.F*. Description of $\mathfrak{F}$-injectors of finite soluble groups / Y.F. Liu, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.

12. *Guo*, *W*. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.

13. *Yang*, *N*. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

14. *Skiba*, *A.N*. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.

15. *Skiba*, *A.N*. On σ-properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics,

Mathematics and Technics. – 2015. – № 3 (24). – P. 70–83.

16. *Чжан Чи*. О $\Sigma_t^\sigma$-замкнутых классах конечных групп / Чжан Чи, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.

17. *Воробьев*, *Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

18. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

19. *Iranzo*, *M.J.* $\mathfrak{F}$-constraint with respect to a Fitting class / M.J. Iranzo, P. Monasor // Arch. Math. – 1986. – Vol. 46, № 5. – P. 205–210.

20. *Guo*, *W.* On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

21. *Zhang Chi*. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Zhang Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

22. *Воробьев*, *Н.Т.* Множества Хартли и инъекторы конечной группы / Н.Т. Воробьев, Т.Б. Караулова // Математические заметки. – 2019. – Vol. 105, № 2. – С. 214–227.

*Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» и при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований* (Ф21М-030).

*Поступила в редакцию* 28.01.2023.

**Информация об авторах**

*Воробьев Николай Тимофеевич* – д.ф.-м.н., профессор

*Волкова Екатерина Дмитриевна* – аспирантка