

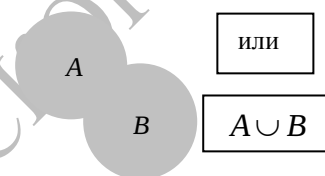
Тема 1. Множества. Числовые множества N, Z, Q, R

1. Множества. Операции над множествами.
2. Множество натуральных чисел N .
3. Множество целых чисел Z . Делимость целых чисел. Признаки делимости.
4. Рациональные числа и действия над ними.
5. Множество R . Представление действительных чисел в виде десятичных дробей.

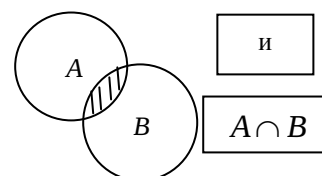
1. Множества, операции над множествами

Определение 1: Под множеством понимается совокупность некоторых объектов (элементов) множества, обладающих общим для них свойством. Обозначаются множества прописными латинскими буквами, элементы – строчными.

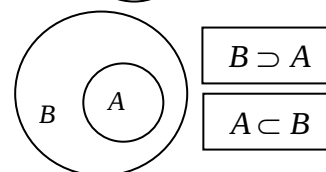
Определение 2: Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B .



Определение 3: Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству A , так и множеству B .



Определение 4: Если любой элемент множества A принадлежит также множеству B , то множество A называется подмножеством множества B .



Определение 5: Множество, не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается $\emptyset$.

Определение 6: Два множества A и B называются равными, если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B и наоборот. Обозначается $A=B$.

2. Множество натуральных чисел N

Определение 7: Числа употребляемые при счете предметов называются натуральными.

Определение 8: Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания образуют натуральный ряд и обозначаются N .

$$N + \{0\} = N_0$$

Запись натуральных чисел

Определение 9: Систематической записью натурального числа a , называется представление данного числа в виде

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i (i = \overline{0, n}) = \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$$

Пример 1:

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b$$

Пример 2:

$$3762 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$$

Множество натуральных чисел замкнуто относительно двух операций: сложения и умножения.

Основные законы сложения и умножения натуральных чисел

1. Переместительный (коммутативный) закон сложения $a+b=b+a$
2. Переместительный (коммутативный) закон умножения $ab=ba$
3. Сочетательный закон сложения (ассоциативный) $(a+b)+c=a+(b+c)$
4. Сочетательный закон умножения (ассоциативный) $(ab)c=a(bc)$
5. Распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения $(a+b)c=ac+bc$

3. Множество целых чисел Z . Делимость целых чисел. Признаки делимости

Определение 10: Натуральные числа, им противоположные и $\{0\}$ называются целыми числами

$$Z = N + (-N) + \{0\}$$

Все законы сложения и умножения натуральных чисел справедливы для целых чисел.

Делимость целых чисел

Целое число a делится на целое число b (нацело), если существует такое $c \in Z$, что $a=bc$, при этом a – делимое, b – делитель, c – частное. $a:b \Leftrightarrow \text{if } \exists c: a = b \cdot c$

Свойства делимости целых чисел

1. Делимость рефлексивна $a:a$
2. Отношение делимости транзитивно $\text{if } a:b \text{ и } b:c \Rightarrow a:c$
3. $\text{if } a:b \Rightarrow -a:b; -a:(-b); a:(-b)$
4. $\text{if } a:c \text{ и } b:c \Rightarrow (a+b):c$
5. $\text{if } a:c \text{ и } b:c \Rightarrow (a-b):c$
6. $\text{if } a:c \text{ и } b \text{ не делится нацело на } c \Rightarrow (a \pm b) \text{ не делится нацело на } c$
7. $\text{if } a:c, b \in Z \Rightarrow ab:c$
8. Любое целое число всегда делится нацело на 1 и равно этому числу.
9. $0:b = 0, b \neq 0$

Признаки делимости.

1. На 2 делятся все четные числа.

2. На 3 и 9 делятся числа, у которых сумма цифр делится нацело на 3 и на 9. (Пример: Число 1377 делится на 3 и на 9, так как сумма цифр $1+3+7+7=18$ делится нацело на 3 и на 9).
3. На 4 делятся те и только те числа, у которых число, записанное последними двумя цифрами делится нацело на 4. (Пример: Число 23864 делится на 4, так как число 64 делится на 4).
4. На 8 делятся только те числа, у которых число, записанное последними тремя цифрами делится нацело на 8. (Пример: Число 23864 делится на 8, так как число 864 делится на 8).
5. На 5 делятся те и только те числа, которые заканчиваются цифрой 0 или 5.
6. На 10 делятся только те числа, которые заканчиваются цифрой 0.

Деление с остатком

Разделить целое число a на $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ с остатком, значит найти такие 2 целых числа q и r , что $a=bq+r$, $r \geq 0, r < |b|$.

Определение 11: Целое число d называется наибольшим общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, если d – общий делитель этих чисел, d делится на любой общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Пример:

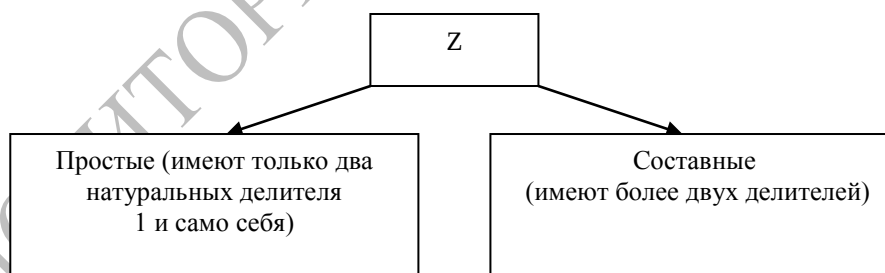
Найти НОД(-135; 180).

Ответ: НОД=45.

$\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ или $[a_1, a_2, \dots, a_n]$

Определение 10: Целое число m называется общим кратным чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ (целых) не равных нулю, если m делится на каждое из этих чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Определение 11: Целое число m называется наименьшим общим кратным (НОК) целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, если m является общим кратным этих чисел, и любое общее кратное этих чисел делится нацело на m .



Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

Алгоритм нахождения НОД (алгоритм Евклида): последний не равный нулю остаток является НОД данных чисел.

Пример:

Найти НОД(7560; 825)

Ответ: НОД=15.

Целые числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются взаимно простыми, если их НОД=1.

$$НОК(a, b) = \frac{ab}{НОД(a, b)}$$

Основная теорема арифметики: всякое число n кроме 1, может быть единственным способом представлено в виде произведения простых чисел (если не учитывать порядок расположения множителей).

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где p_i – простые числа, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Замечание: разложение любого числа n на простые множители называется канонической записью числа n .

Правило нахождения НОД:

1. Разложить число на простые множители.
2. Составить произведение из всех простых множителей с наименьшим показателем степени.
3. Найти произведение.

Пример:

НОД(196; 988)

Ответ: НОД=4.

Правило нахождения НОК:

1. Разложить число на простые множители.
2. Составить произведение из всех простых множителей одного числа и недостающих другого.
3. Найти это произведение.

4. Рациональные числа и действия над ними

Определение 12: Под множеством рациональных чисел ($\mathbb{Q}$) понимают множество обыкновенных несократимых дробей вида $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

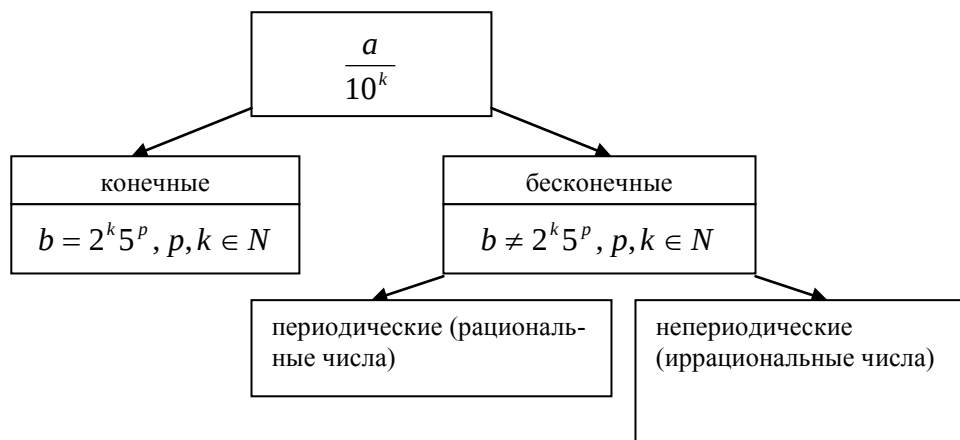
Множество $\mathbb{Q}$ замкнуто относительно всех четырех арифметических операций.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то дробь не изменится:

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$

Обыкновенная дробь вида $\frac{a}{10^k}$ называется десятичной.

Теорема 1. Несократимую дробь можно обратить в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда в разложении ее знаменателя на простые множители содержатся только цифры 2 и 5 или их степени или знаменатель равен 1.



Определение 13: Десятичная дробь называется бесконечной периодической, если у нее цифра или группа цифр после запятой последовательно повторяются.

Примеры:

1,0(77); 1,0(27).

Теорема 2. Любая бесконечная периодическая дробь является представлением некоторого рационального числа и наоборот.

Правило представления бесконечной периодической дроби в обыкновенную:

из числа, стоящего до второго периода вычесть число, стоящее до первого периода и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и 0 столько раз, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример:

2,10(7)

Ответ: $2\frac{97}{900}$.

5. Множество R . Представление действительных чисел в виде десятичных дробей

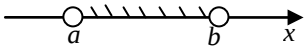
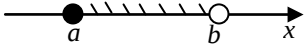
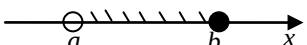
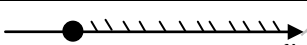
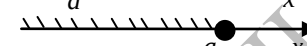
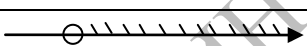
Определение 14: Иррациональным числом называется число, которое нельзя представить в виде обыкновенной несократимой дроби вида $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.

$R = \mathbb{Q} + \text{иррациональные числа}$.

Теорема 3. Любое иррациональное число представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби и наоборот.



Числовые промежутки

Множество R , заданное неравенством	Числовые промежутки и их виды	Изображение на координатной прямой
$a < x < b$	$(a; b)$ – интервал	
$a \leq x < b$ $a < x \leq b$	$[a; b)$ $(a; b]$ – полуинтервал	 
$x \geq a$ $x \leq a$	$[a; +\infty)$ $(-\infty; a]$ – луч	 
$x > a$ $x < a$	$(a; +\infty)$ $(-\infty; a)$ – открытый луч	 

Определение 15: Координатной прямой называется горизонтальная прямая с выбранным направлением, началом отсчета 0 и масштабом (единичным отрезком).

Координатная прямая является геометрической моделью множества R .

Вопросы для самоконтроля:

1. Натуральные числа.
2. Простые и составные числа.
3. Делитель, кратное.
4. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, связь между ними.
5. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10.
6. Целые числа, действия над ними.
7. Противоположные числа.
7. Рациональные числа и арифметические действия над ними.
8. Действительные числа. Представление их в виде десятичных дробей.
9. Взаимнообратные числа.
10. Изображение чисел на числовой прямой.

Ассистент Старовойтова Н.А.