

ПРОГРЕССИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ



АВТОР: Старовойтова
Наталья Александровна
*кафедра довузовской
подготовки и
профориентации*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же, **не равное нулю**, число **q** , называется геометрической прогрессией.

Число **q** называется знаменателем геометрической прогрессии.

Из определения следует рекуррентная формула геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Из определения следует , что среди членов геометрической прогрессии **не могут быть нули.**

Знаменатель геометрической прогрессии определяется формулой:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

Если $q > 1$ и первый член больше нуля — прогрессия является возрастающей.

Если $0 < q < 1$ и первый член больше нуля — прогрессия является убывающей.

$q=1$ — прогрессия является постоянной

Примеры:

2;8;32;128;512;...

2; $\sqrt{2}$;1; $\sqrt{2}/2$;1/2;...

-5;-5;-5;-5;-5;...

Формула n-го члена геометрической прогрессии

Пусть b_n - геометрическая прогрессия, b_1 - её первый член, q - знаменатель прогрессии, тогда

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q$$

$$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Перемножая $n-1$ равенство получим: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Пример1

В геометрической прогрессии с положительными членами $b_1 + b_2 = 20$, $b_3 + b_4 = 180$ и $b_n = 405$. Чему равно n ?

Решение.

$$1. \begin{cases} b_1 \cdot (1+q) = 20 \\ b_1 \cdot q^2 \cdot (1+q) = 180 \end{cases} \quad 2. q^2 = 9 \quad 3. q = 3$$

$$4. b_1 = 5 \quad 5. b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad 6. 405 = 5 \cdot 3^{n-1}$$

$$7. 3^{n-1} = 81 \quad 8. 3^{n-1} = 3^4 \quad 9. n = 5$$

СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Свойство 1 (характеристическое)

Любой член, начиная со второго, равен по модулю среднему пропорциональному предыдущего и последующего членов **или** $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Свойство 2

Для любой геометрической прогрессии, если $m + p = k + l$, то $b_m \cdot b_p = b_k \cdot b_l$.

Следствие В конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноотстоящих от концов, равны между собой и равны произведению крайних её членов, т.е.

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1} = \dots = b_1^2 \cdot q^{n-1}$$

Пример 2. В геометрической прогрессии произведение четвёртого и пятого членов равно 20. Найти шестой член прогрессии, если её третий член равен 5.

Решение. Так как $b_4 \cdot b_5 = b_3 \cdot b_6 = 20$,
то $5 \cdot b_6 = 20$ и $b_6 = 4$.

Пример 3. Сумма n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$S_n = 10 \cdot 2^{n-1}$. Найти шестой член прогрессии.

Решение. $S_1 = b_1 = 10 \cdot 2^{1-1} = 10$,

$$S_2 = b_1 + b_2 = 10 \cdot 2^{2-1} = 10 \cdot 2 = 20 ; 10 + b_2 = 20 \Rightarrow b_2 = 10$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{10}{10} = 1 ; \quad b_6 = b_1 \cdot q^5 = 10 \cdot 1^5 = 10 \cdot 1 = 10 .$$

ФОРМУЛА СУММЫ N ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Сумму n первых членов геометрической прогрессии обозначим через S_n :

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n \cdot (*)$$

Если $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$.

Если $q \neq 1$, то умножим почленно обе части равенства $(*)$ на q : $S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + \dots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q$
 $S_n \cdot q = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n \cdot q$ $(**)$. Вычтем из равенства $(**)$ равенство $(*)$ и приведем подобные члены, получим $S_n \cdot q - 1 = b_n \cdot q - b_1$,отсюда следует

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q - 1}$$

СУММА БЕСКОНЕЧНОЙ УБЫВАЮЩЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Напомним: $|q| < 1$. Сумму n первых членов бесконечной геометрической прогрессии назовем **n -ой частичной** суммой и обозначим S_n . Тогда $S_1 = b_1$, $S_2 = b_1 + b_2$, $S_3 = b_1 + b_2 + b_3$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$.

Пусть последовательность S_n частичных сумм бесконечной геометрической прогрессии при неограниченном возрастании n имеет предел S :
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. **Число S называют суммой бесконечной прогрессии.** Преобразуем выражение

$$S_n = \frac{b_1 \cdot q^n - 1}{q - 1} = \frac{b_1 \cdot 1 - q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q} = S$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЕСЯТИЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДРОБИ В ВИДЕ ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ

Число $0,(27) = 0,27272727\dots$ запишем в виде суммы бесконечного числа слагаемых:

$$0,(27) = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + 0,00000027\dots$$

Слагаемые в правой части равенства — члены геометрической прогрессии:

$$b_1 = 0,27 ; q = 0,01 < 1, \text{ поэтому}$$

$$0,(27) = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + \dots = \frac{0,27}{1 - 0,01} = \frac{0,27}{0,99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Интересные факты

- 1) **Химия.** При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.
- 2) **Геометрия.** Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.
- 3) **Физика.** И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.
- 4) **Биология.** Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.
- 5) **Экономика.** Вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты – увеличение в геометрической прогрессии.

**СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!**