Проблемы физики, математики и техники, № 2 (15), 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ПЕРМУТИРУЕМЫЕ ПОДГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

А.Ф. Васильев[1], В.А. Васильев[1], Т.И. Васильева[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

PERMUTERAL SUBGROUPS AND THEIR APPLICATIONS IN FINITE GROUPS

A.F.Vasil'ev[1], V.A.Vasil'ev[1], T.I. Vasil'eva[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Пусть H – подгруппа группы G. Пермутизатором H в G называется подгруппа $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H\langle x \rangle \rangle$. Будем называть H пермутируемой в G, если $P_G(H) = G$; сильно пермутируемой в G, если $P_U(H) = U$ всякий раз, как $H \le U \le G$. Изучены свойства конечных групп с заданными системами пермутируемых и сильно пермутируемых подгрупп. Найдены новые критерии w-сверхразрешимости и сверхразрешимости групп.

Ключевые слова: *конечная группа, пермутизатор подгруппы, пермутируемая подгруппа, сверхразрешимая группа,* w*-сверхразрешимая группа,* **P**-*субнормальная подгруппа.*

Let H be a subgroup of a group G. The permutizer of H in G is the subgroup $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H\langle x \rangle \rangle$. The subgroup H of a group G is called permuteral in G, if $P_G(H) = G$; strongly permuteral in G, if $P_U(H) = U$ whenever $H \le U \le G$. The properties of finite groups with given systems of permuteral and strongly permuteral subgroups are obtained. New criteria of w-supersolubility and supersolubility of groups are received.

Keywords: *finite group, permutizer of a subgroup, permuteral subgroup, supersoluble group,* w*-supersoluble group,* **P**-*subnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие нормализатора подгруппы играет центральную роль при изучении групп. Например, хорошо известно, что группа нильпотентна, если нормализатор любой ее силовской подгруппы совпадает с группой, или группу можно представить в виде произведения ее нильпотентных подгрупп, нормализаторы которых совпадают с группой. Естественным обобщением нормализатора подгруппы является понятие пермутизатора подгруппы, введенное Дескинсом и Венцке в [1, с. 27]. Напомним, *пермутизатором* подгруппы H в группе G называется подгруппа

$$P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H\langle x \rangle \rangle.$$

В [1] начато исследование влияния свойств пермутизаторов для различных систем подгрупп на строение группы. Группы с пермутизаторным свойством, т. е. группы G, у которых $H < P_G(H)$ для любой собственной подгруппы H из G, изучались в [1, с. 27–29], в работах [2]–[4] и др. Группы с заданными системами подгрупп (максимальных, почти максимальных, свободных от четверной группы Клейна и др.), пермутизаторы которых совпадают с группой, исследовались в [1, с. 27–29], в работах [5]–[6] и др.

Введем следующее

Определение. Подгруппу H группы G будем называть:

1) *пермутируемой в* G, если $P_G(H) = G$;

2) *сильно пермутируемой* в G, если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $H \le U \le G$.

Существуют группы, которые обладают пермутируемыми, но не сильно пермутируемыми подгруппами. Например, легко проверить, что в $G = PSL(2, 7)$ силовская 3-подгруппа Z_3 является пермутируемой в G. Так как $Z_3 \le U \le G$, где $U \cong A_4$ – знакопеременная группа степени 4, и $P_U(Z_3) = Z_3$, то Z_3 не сильно пермутируема в G.

В работе исследуются свойства групп с заданными системами пермутируемых и сильно пермутируемых подгрупп. Получены новые критерии w-сверхразрешимости и сверхразрешимости групп.

1 Предварительные результаты

Обозначения и терминология стандартны, при необходимости см. [7], [8].

Пусть G – группа. Для подгруппы H из G используются обозначения $H \le G$ и $H < G$, если $H \ne G$. Через $|G|$ обозначается порядок G; $\mathrm{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп из G для некоторого простого числа p; $\mathrm{Core}_G(M)$ пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G; $F(G)$

– подгруппа Фитинга группы G; **P** – множество всех простых чисел; π – некоторое множество простых чисел; $\pi' = \mathbf{P} \setminus \pi$; Z_p – циклическая группа порядка p; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, p_i – простое число, называется *дисперсивной по Оре* [7, с. 251], если $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. *Подгруппа Картера* – это самонормализуемая нильпотентная подгруппа группы. Группа *p-замкнута*, если она имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

***Лемма* 1.1** [8, гл. A, теорема 2.7 (ii)]. Если G *– разрешимая группа, то*
$F(G)/\Phi(G) = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$.

Подгруппа H группы G называется **P**-*субнормальной* в G [9], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Обозначается H **P**-sn G.

***Лемма* 1.2** [10, лемма 3.1]. *Пусть H – подгруппа группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H **P**-sn G, то $(H \cap N)$ **P**-sn N и HN/N **P**-sn G/N*;

2) *если $N \le H$ и H/N **P**-sn G/N, то H **P**-sn G*;

3) *если HN_i **P**-sn G, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ **P**-sn G*;

4) *если H **P**-sn K и K **P**-sn G, то H **P**-sn G*;

5) *если H **P**-sn G, то H^x **P**-sn G для любого $x \in G$.*

***Лемма* 1.3** [10, лемма 3.4]. *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H **P**-sn G, K – подгруппа из G, то $(H \cap K)$ **P**-sn K*;

2) *если H_i **P**-sn G, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)$ **P**-sn G.*

Группа G называется w-*сверхразрешимой* [9], если любая силовская подгруппа группы G является **P**-субнормальной в G. Через w$\mathfrak{U}$ обозначается класс всех w-сверхразрешимых групп. Заметим, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Пример 1 [9] показывает, что $\mathfrak{U} \neq \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

***Лемма* 1.4** [9, предложение 2.8]. *Любая* w*-сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.*

Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $< H, H^x >$;

***Лемма* 1.5** [7, лемма 17.5]. *Пусть H – подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H пронормальна в G и $H \le U \le G$, то H пронормальна в U*;

2) *если $N \trianglelefteq G$ и $N \trianglelefteq H$*, то *H пронормальна в G тогда и только тогда, когда H/N пронормальна в G/N*;

3) *если $N \trianglelefteq G$ и H пронормальна в G, то HN/N пронормальна в G/N*;

4) *если H пронормальна и субнормальна в G, то $H \trianglelefteq G$.*

2 Свойства пермутируемых подгрупп

***Лемма* 2.1.** *Пусть H – подгруппа группы G. Тогда*

1) *$P_U(H) \le P_G(H)$ для любой подгруппы U группы G такой, что $H \le U$*;

2) *если $P_G(H) = R$*, то *$P_R(H) = R$*;

3) *$P_G(H)^g = P_G(H^g)$ для любого элемента $g \in G$*;

4) *$N_G(H) \le P_G(H)$*;

5) *если $N \trianglelefteq G$, то $P_G(H)N/N \le P_{G/N}(HN/N)$*;

6) *если $N \trianglelefteq G$ и $N \le H$, то $P_{G/N}(H/N) = P_G(H)/N$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из определения $P_G(H)$.

Утверждение 3). Пусть $g \in G$. Допустим, что $P_G(H) = < L >$, где $L = \{x \in G \mid < x > H = H < x >\}$, и $P_G(H^g) = < K >$, где $K = \{y \in G \mid < y > H^g = H^g < y >\}$. Ясно, что $P_G(H)^g = < L^g >$.

Возьмем любой $z \in L^g$. Тогда $z = x^g$ для некоторого $x \in L$. Из $< x^g > H^g = < x >^g H^g = (< x > H)^g = (H < x >)^g = H^g < x^g >$ получаем, что $L^g \subseteq K$.

Рассмотрим любой $y \in K$. Из $y^{g^{-1}} \in K^{g^{-1}}$ получаем, что

$$< y^{g^{-1}} > H = < y >^{g^{-1}} (H^g)^{g^{-1}} =$$
$$= (< y > H^g)^{g^{-1}} = (H^g < y >)^{g^{-1}} = H < y^{g^{-1}} >.$$

Отсюда $K \subseteq L^g$. Значит, $P_G(H)^g = < L^g > = < K > = P_G(H^g)$.

Утверждения 4)–6) – это лемма 2.4 из [6]. Лемма доказана.

***Лемма* 2.2.** *Пусть H – подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда*

1) *если H пермутируема в G, то HN/N пермутируема в G/N*;

2) *если H пермутируема в G, то HN пермутируема в G*;

3) *если $N \le H$, то H пермутируема в G тогда и только тогда, когда H/N пермутируема в G/N*;

4) *если H сильно пермутируема в G, то HN/N сильно пермутируема в G/N.*

Доказательство. 1) следует из 5) леммы 2.1.

Утверждение 2). Если $P_G(H) = G$, то из 6) леммы 2.1 получаем, что $P_G(HN) = G$. Это означает пермутируемость HN в G.

3) следует из 1) леммы и 6) леммы 2.1.

4) следует из 1). Лемма доказана.

***Лемма* 2.3.** *Пусть группа $G = HQ$, где $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p – наибольший простой делитель $|G|$, Q – циклическая подгруппа из G. Тогда G p-замкнута.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна.

Так как G – произведение нильпотентных подгрупп, по теореме Кегеля-Виландта [11], [12] G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда G/N p-замкнута. Так как класс всех p-замкнутых групп является насыщенной формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $M \cap N = 1$, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ и $N = C_G(N)$. Из выбора G следует, что N – q-группа, $q \neq p$. Ввиду теоремы Силова $H^g \subseteq M$ для некоторого $g \in G$ и $N \subseteq Q$. Тогда $|N| = q$. Отсюда $M \cong G/C_G(N)$ изоморфно вкладывается в Z_{q-1}. Это противоречит тому, что $p > q$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.4**. *Пусть G группа, $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p – наибольший простой делитель $|G|$. Если H пермутируема в G, то G p-замкнута*.

Доказательство. Пусть x – любой элемент группы G такой, что $<x>H = H<x>$. По лемме 2.3 H нормальна в $< x >H$. Поэтому $< x > \subseteq N_G(H)$ и $G = P_G(H) \subseteq N_G(H)$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.5.** *Если любая силовская подгруппа группы G пермутируема в G, то G дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Проведем индукцией по $|G|$. Пусть $|G| = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$, где $p_1 > \ldots > p_k$, p_i – простое число, $i = 1, ..., k$. Для $P_1 \in \mathrm{Syl}_{p_1}(G)$ по лемме 2.4 $P_1 \trianglelefteq G$. Любая силовская p_i-подгруппа из G/P_1 имеет вид P_iP_1/P_1, где $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 2, \ldots, k$. Ввиду 1) леммы 2.2 P_iP_1/P_1 пермутируема в G/P_1. По индукции G/P_1 дисперсивна по Оре. Отсюда G дисперсивна по Оре. Лемма доказана.

***Лемма* 2.6.** *Если G – сверхразрешимая группа, то любая пронормальная подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

Доказательство. Ввиду наследственности $\mathfrak{U}$ и 1) леммы 1.5 достаточно доказать, что любая пронормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{U}$ пермутируема в G.

Пусть G – сверхразрешимая группа наименьшего порядка такая, что $P_G(H) \neq G$ для некоторой пронормальной подгруппы H из G.

Допустим, что $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi \in \mathfrak{U}$, по 3) леммы 1.5 $H\Phi/\Phi$ пронормальна в G/Φ. Ввиду выбора G и 4) леммы 1.5 $H\Phi/\Phi \neq 1$. Из $P_{G/\Phi}(H\Phi/\Phi) = G/\Phi$ ввиду 6) леммы 2.1 заключаем, что $P_G(H\Phi) = G$. Так как $P_G(H) \neq G$, найдется $x \in G$ такой, что $x \notin P_G(H)$ и $< x >H\Phi = H\Phi< x >$. Тогда $R = < x >H\Phi$ – подгруппа группы G. Если $R \neq G$, то из выбора G следует, что $P_R(H) = R$. Поэтому $x \in R \leq P_G(H)$, что противоречит $x \notin P_G(H)$. Значит, $R = < x >H\Phi = G = < x >H$. Поэтому $x \in \in P_G(H)$. Получили противоречие с выбором x.

Значит, $\Phi(G) = 1$. Группа $G \in \mathfrak{U}$, поэтому коммутант G' нильпотентен. Из $N_G(H) \neq G$ и абнормальности $N_G(H)$ в G получаем, что

$$G = G'N_G(H) = F(G)\, N_G(H).$$

По лемме 1.1 $F(G) = N_1 \ldots N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G для $i = 1, \ldots, k$. Из $G \in \mathfrak{U}$ следует, что N_i – циклическая подгруппа. Из $N_iH = HN_i$ получаем, что $N_i \leq P_G(H)$ для $i = 1, \ldots, k$. Поэтому $G = F(G)N_G(H) \subseteq P_G(H)$. Получили противоречие с $P_G(H) \neq G$. Лемма доказана.

***Следствие* 2.6.1.** *Если G – сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

***Следствие* 2.6.2.** *Если G – сверхразрешимая группа, то любая подгруппа Картера из G сильно пермутируема в G.*

***Следствие* 2.6.3.** *Если G – сверхразрешимая группа, то любая холлова подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

Сверхразрешимая группа может обладать не пермутируемыми в ней подгруппами.

***Пример* 2.7.** Пусть $G = < a^4 = b^4 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = 1 >$ – группа порядка 16. Тогда подгруппа $H = < ab >$ не пермутируема в G, так как $< a >H \neq H< a >$ и $< b >H \neq H< b >$, причем $P_G(H)$ есть элементарная абелева 2-группа порядка 8.

Пример показывает также, что пересечение пермутируемых подгрупп в группе не всегда является пермутируемой подгруппой группы. Заметим, что подгруппы $H_1 = < a^2 >\times< ab >$ и $H_2 = < ab^{-1} >\times< ab >$ пермутируемы в G. Очевидно, что $H = < ab > = H_1 \cap H_2$.

***Лемма* 2.8.** *Пусть G – разрешимая группа. Если H – **P**-субнормальная холлова подгруппа из G, то H сильно пермутируема в G.*

Доказательство. Ввиду наследственности формации всех разрешимых групп и 1) леммы 1.3 достаточно доказать, что любая **P**-субнормальная холлова подгруппа разрешимой группы G пермутируема в G.

Пусть G – разрешимая группа наименьшего порядка такая, что $P_G(H) \neq G$ для некоторой **P**-субнормальной холловой π-подгруппы H из G. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда HN/N – холлова π-подгруппа из G/N. По 1) леммы 1.2 HN/N **P**-*sn* G/N. По выбору G холлова π-подгруппа HN/N пермутируема в G/N. По 3) леммы 2.2 HN пермутируема в G. Поэтому N – q-группа для простого числа $q \notin \pi$.

Из H **P**-*sn* G следует, что в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $H \leq M$ и $|G : M|$ – простое число. По 1) леммы 1.3 H **P**-*sn* M. Из выбора G следует, что $M = P_M(H) \leq P_G(H) \neq G$. Поэтому $M = P_G(H)$. Так как $G = P_G(HN)$, в G найдется x такой, что $x \notin M$ и $< x >HN = HN< x >$. Отсюда и из $P_G(H) = M$ следует, что $G = < x >HN$. Если $N \leq \Phi(G)$, то $G = < x >H$. Значит, $x \in P_G(H) = M$, что противоречит $x \notin M$. Итак, $N \not\subset \Phi(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа W такая, что $N \not\subset W$ и $G = NW$. Отсюда $|G : W|$ – q-число и $H \leq W^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда $W^g = P_{W^g}(H) \le P_G(H) = M$ и $G = NM$. Допустим, что $NH \ne G$. Тогда из выбора G заключаем, что $NH = P_{NH}(H) \le P_G(H) = M$. Получили противоречие $G = NM \le M \ne G$.

Значит, $HN = G$. Из $N \cap M = 1$ следует, что $H = M$. Тогда $|N| = q$. Ввиду $NH = HN$ получаем, что $N \le P_G(H) = M$. Откуда $G \le M \ne G$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

***Следствие* 2.8.1.** *Если G – w-сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

3 Критерии w-сверхразрешимости и сверхразрешимости групп

***Теорема* 3.1.** *Группа w-сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа группы сильно пермутируема в группе.*

Предложение 2.5 [9] показывает, что нильпотентную длину w-сверхразрешимой группы нельзя ограничить фиксированным натуральным числом. Так как у сверхразрешимой группы коммутант нильпотентен, то нильпотентная длина сверхразрешимой группы не превосходит 2, т. е. сверхразрешимая группа метанильпотентна.

***Теорема* 3.2** *Пусть G – метанильпотентная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *G сверхразрешима*;

2) *любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G*;

3) *любая силовская подгруппа из G пермутируема в G.*

***Теорема* 3.3.** *Пусть G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *G сверхразрешима*;

2) *любая пронормальная подгруппа из G сильно пермутируема в G*;

3) *любая пронормальная подгруппа из G пермутируема в G*;

4) *любая холлова подгруппа из G сильно пермутируема в G*;

5) *любая холлова подгруппа из G пермутируема в G.*

***Теорема* 3.4.** *Пусть G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *G сверхразрешима*;

2) *$G = AB$ – произведение сильно пермутируемых нильпотентных подгрупп A и B из G*;

3) *$G = AB$ – произведение пермутируемых нильпотентных подгрупп A и B из G.*

Заключение

Из теорем раздела 3 вытекают как известные, так и новые результаты. Например,

***Следствие* 1** [15]. *Если любая холлова подгруппа группы G* **P**-*субнормальна в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Так как любая силовская подгруппа группы G **P**-субнормальна в G, G разрешима ввиду леммы 1.4. Из леммы 2.8 и теоремы 3.3 заключаем, что G сверхразрешима.

***Следствие* 2.** *Пусть $G = AB$ – произведение своих силовских подгрупп A и B. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда A и B пермутируемы в G.*

***Следствие* 3.** *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G = F(G)H$, где H – пермутируемая подгруппа Картера из G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

2. *Zhang, J.* A note on finite groups satisfying the permutizer condition / J. Zhang // Sci. Bull. – 1986. – Vol. 31. – P. 363–365.

3. *Beidleman, J.C.* On finite groups satisfying the permutizer condition / J.C. Beidleman, D.J.S. Robinson // J. Algebra. – 1997. – Vol. 191, № 2. – P. 686–703.

4. *Ballester-Bolinches, A*. On a question of Beidleman and Robinson / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero // Comm. Algebra. 2002. – Vol. 30, № 12. – P. 5757–5770.

5. *Liu, X.* Implications of permutizers of some subgroups in finite groups / X. Liu, Ya. Wang // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33. – P. 559–565.

6. *Qiao, Sh.* Influence of permutizers of subgroups on the structure of finite groups / Sh. Qiao, G. Qian, Ya. Wang // J. Pure and Applied Algebra. – 2008. – Vol. 212, № 10. – P. 2307–2313.

7. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

8. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

9. *Васильев, А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

10. *Васильев, А.Ф.* О произведениях **P**-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

11. *Kegel, O.H.* Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12, № 2. – P. 90–93.

12. *Wielandt, H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen. III / H. Wielandt // J. Math. – 1958. – Bd. 2, № 4B. – S. 611–618.

13. *Kniahina,V.* On supersolvability of finite groups with **P**-subnormal subgroups / V. Kniahina, V. Monakhov // International J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

Поступила в редакцию 25.04.13.