УДК 512.542

РЕКУРСИВНО РАСПОЗНАВАЕМЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев[1], **Т.И. Васильева**[2]

[1]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
[2]Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

RECURSIVELY RECOGNIZABLE LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

A.F.Vasilyev[1], **T.I. Vasilyeva**[2]

[1]F. Scorina Gomel State University, Gomel
[2]Belarusian State University of Transport, Gomel

Пусть $\wp$ – некоторое подгрупповое свойство и n – натуральное число. Формация $\mathfrak{F}$ называется $\wp_n$-распознаваемой, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G, имеющую n $\wp$-подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{F}$. В статье предлагается оригинальный подход, основанный на концепции Т-модели, для установления $\wp_n$-распознаваемости локальных формаций конечных групп.

Ключевые слова*: конечная группа, локальная формация, локальный экран,* Т*-модель,* $\wp_n$*-распознаваемость.*

Let $\wp$ be some subgroup property and n is a natural number. A formation $\mathfrak{F}$ is called $\wp_n$-recognizable if $\mathfrak{F}$ contains each group G having n $\wp$-subgroups belonging $\mathfrak{F}$. In the paper an original method, based on the concept of T-models for study $\wp_n$-recognizable formations is proposed.

Keywords*: finite group, local formation, local screen,* T*-model,* $\wp_n$*-recognition.*

1 Введение

Рассматриваются только конечные группы. В теории групп довольно распространенным является доказательство утверждений следующего типа: если какая-то выделенная часть подгрупп данной группы принадлежит классу $\mathfrak{X}$, то и сама группа принадлежит $\mathfrak{X}$. К настоящему времени получено значительное число теорем отмеченного выше типа (для конкретных классов $\mathfrak{X}$ и различных подгрупповых свойств), которые рассеяны по многочисленным работам. Рядом авторов были предложены утверждения, для которых система подгрупп, устанавливающая принадлежность группы данному классу $\mathfrak{X}$, зависит от натурального n. Например, Х. Виландт [1] показал, что группа G разрешима, если она имеет три разрешимые подгруппы, чьи индексы в группе G попарно взаимно просты. Аналогичный результат для класса нильпотентных групп доказал О. Кегель [2]. К. Дерк [3] установил сверхразрешимость группы, у которой имеются четыре сверхразрешимые подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. О. Крамер [4]–[6] в классе конечных разрешимых групп исследовал локальные формации $\mathfrak{F}$, содержащие всякую группу, у которой имеется n $\mathfrak{F}$-подгрупп с попарно взаимно простыми индексами. При этом он установил рекурсивную зависимость между выполнимостью данного свойства для самой формации и значений ее локального экрана. Ряд результатов из отмеченных выше работ вошел в монографии [7]–[8].

Отметим еще один пример построения утверждений отмеченного выше типа. В.А. Белоногов в [9] доказал, что конечная группа нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. В [10] В.Н. Семенчук в классе разрешимых групп получил аналогичный результат для формации всех p-замкнутых групп. В [11]–[12] изучались в классе разрешимых групп Ω_n-замкнутые насыщенные формации, т.е. формации $\mathfrak{F}$, содержащие всякую группу G, имеющую n попарно несопряженных максимальных подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Здесь также была установлена рекурсивная зависимость для данного свойства между формацией и значениями ее локального экрана. В частности, было доказано, что разрешимая группа имеет нильпотентную длину, не превосходящую n, если она имеет n+2 попарно несопряженные максимальные подгруппы с нильпотентной длиной, не превосходящей n. Ряд результатов и следствий из них, установленных в работе [11], были позднее снова получены Б. Хёфлингом в [13] и составили основу его работы.

Наблюдающийся параллелизм в построении утверждений и в методах их доказательства в отмеченных выше работах приводит к задаче построения общей схемы получения теорем указанного выше вида и выработки единого способа их доказательства. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья. Ряд результатов этого исследования был анонсирован без доказательств в работе [14].

В дальнейшем рассматриваются только конечные группы. В обозначениях, определениях и используемых результатах мы следуем монографиям [7], [15]. Напомним некоторые из них. Используются обозначения для конкретных классов групп: $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{G}$ – класс всех групп; $\mathfrak{N}^n$ – класс всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит натуральное число n; $\mathfrak{L}_p(n)$ – класс всех p-разрешимых групп, нильпотентная p-длина которых не превосходит натуральное число n. Через π обозначается некоторое множество простых чисел, π' – дополнение к π в множестве **P** всех простых чисел. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\mathfrak{X}_\pi$ – класс всех π-групп из $\mathfrak{X}$.

Всякая функция $f : \mathbf{P} \to$ {формации} называется локальным экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной [7], [15], если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = (G \mid G/F_p(G) \in f(p))$ для любого $p \in \pi(G)$. Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$. По теореме Гашюца-Любезедер-Шмида формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна (см., например, [15, гл. IV, теорема 4.6]).

2 Т-модели и рекурсивная распознаваемость формаций конечных групп

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп. Отображение θ, которое ставит в соответствие каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором, если $\theta(G)^\alpha = \theta(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α группы G.

Пусть отображение Δ ставит в соответствие каждой группе G из данного класса $\mathfrak{X}$ некоторое бинарное отношение на множестве $S(G)$ всех подгрупп группы G. Через Δ_G обозначается значение отображения Δ на группе $G \in \mathfrak{X}$. В дальнейшем данное отображение Δ будем называть просто отношением Δ на классе групп $\mathfrak{X}$.

Тройка $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ называется [14] Т-*моделью* (*теорем моделью*) на классе групп $\mathfrak{X}$. Всякое множество $\{H_1,\ldots,H_n\}$ попарно несопряженных подгрупп группы $G \in \mathfrak{X}$ называется $\wp$-*тестом* группы G в модели $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$, если $H_i \in \theta(G)$ для любого $i = 1,\ldots,n$ и $(H_i,H_j) \in \Delta_G$ для любых $i \neq j \in \{1,\ldots, n\}$. Число n – длина теста.

Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – некоторая Т-модель. В дальнейшем будем предполагать, что отношение Δ_G симметрично для любой группы $G \in \mathfrak{X}$, т. е., если $(A, B) \in \Delta_G$, то $(B, A) \in \Delta_G$.

***Определение* 2.1.** *Пусть* $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-*модель и n – натуральное число. Класс $\mathfrak{F}$ будем называть $\wp_n$-распознаваемым, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу, у которой имеется $\wp$-тест $\{H_1,\ldots,H_n\}$ такой, что $H_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1,\ldots,n$. По определению, пустой класс является $\wp_n$-распознаваемым для любой* Т-*модели* $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$.

Используя это определение, сформулируем задачу рекурсивной распознаваемости для локальных формаций. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ – локальная формация, заданная локальным экраном f, и $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-модель. Найти рекурсивную зависимость между $\wp_n$-распознаваемостью $\mathfrak{F}$ и $\wp_m$-распознаваемостью значений ее экрана f.

3 Основные результаты

Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-модель и n – натуральное число. Следующие две леммы элементарны.

***Лемма* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{Y}$ – $\wp_n$*-распознаваемые классы групп. Тогда класс групп* $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{Y}$ *также* $\wp_n$*-распознаваем.*

***Лемма* 3.2.** *Если класс групп $\mathfrak{F}$ является $\wp_n$-распознаваемым для некоторого натурального числа n, то $\mathfrak{F}$ также является $\wp_k$-распознаваемым для всех $k \geq n$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый гомоморф. Отношение Δ на $\mathfrak{X}$ будем называть *проективным* на $\mathfrak{X}$, если для любой $\mathfrak{X}$-группы G и ее эпиморфизма φ из $(A, B) \in \Delta_G$ следует, что $(A^\varphi, B^\varphi) \in \Delta_G{}^\varphi$.

***Определение* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Бинарное отношение Δ на $\mathfrak{X}$ называется F-связанным, если для любой монолитической $\mathfrak{X}$-группы G и любой пары $(A, B) \in \Delta_G$ всегда выполняется хотя бы одно из следующих утверждений*:

1) *либо $F(G) \subseteq A$, либо $F(G) \subseteq B$*;

2) *либо $G = AF(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq B$, либо $G = BF(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq A$.*

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется *нижнерегулярным*, если из $H \in \theta(G)$ и $N \lhd G$ всегда следует, что $HN/N \in \theta(G/N)$.

***Предложение* 3.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ –* Т*-модель, где $\mathfrak{X}$ – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный $\mathfrak{X}$-функтор, Δ – F-связанное проективное отношение на классе $\mathfrak{X}$ и n – натуральное число, причём $n \geq 2$. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\wp_n$-распознаваемой в $\mathfrak{X}$, то формация $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ является $\wp_{n+1}$-распознаваемой в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$-группа G имеет $\wp$-тест $\{U_1,U_2,\ldots,U_{n+1}\}$ такой, что $U_i \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ для всех $i \in \{1,2,\ldots,n + 1\}$.

Нетрудно видеть, что при любом гомоморфизме группы G все условия переносятся на образы подгрупп U_i, $i = 1, 2,\ldots,n + 1$. Поэтому по индукции можно считать, что $\mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$-корадикал N группы G является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то можно считать, что N – абелева p-группа, где p – некоторое простое число. Если $p \in \pi$, то из

$G/N \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$. Поэтому будем считать, что $p \in \pi'$. Из разрешимости группы G и единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является p-группой.

Рассмотрим произвольную пару подгрупп U_i и U_j, где $i \neq j \in \{1, 2,\ldots,n + 1\}$. Покажем, что $U_i \in \mathfrak{F}$, или $U_j \in \mathfrak{F}$. Так как по условию отношение Δ на классе $\mathfrak{X}$ является F-связанным, то возможны следующие случаи.

1. Пусть $F \subseteq U_i$. Так как

$O_\pi(U_i) \subseteq C_G(F) \subseteq F$, то $O_\pi(U_i) = 1$.

Отсюда и из $U_i \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $U_i \in \mathfrak{F}$.

2. Если $F \subseteq U_j$, то, рассуждая, как и выше, получаем, что $U_j \in \mathfrak{F}$.

3. Предположим, что $G = U_iF$. Рассмотрим два случая.

3a. Пусть $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда $F(G/N) = F(G)/N$ и из включения $C_{G/N}(F(G)/N) \subseteq F(G)/N$ следует, что $O_\pi(G/N) = 1$. Используя этот факт и то, что $G/N \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$, получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Так как $G/N = U_i\, N/N\, F(G)/N$, то из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $U_iF/N = G/N$ следует, что $U_i\, F/N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, из $U_i \in \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $U_i\,/O_\pi(U_i\,) \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из $U_iF/F \cong U_i\,/\,U_i \cap F \in \mathfrak{F}$ следует, что $U_i\,/U_i \cap F \cap O_\pi(U_i) \cong U_i \in \mathfrak{F}$.

3b. Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $N = C_G(N) = F$. В силу 2) определения 3.3 группа $G = [N]U_i$ и $N \subseteq U_j$. Так как N – π'-группа и $N = C_G(N)$, то $O_\pi(U_j) = 1$. Отсюда и из $U_j \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ следует, что $U_j \in \mathfrak{F}$.

4. Если предположить, что $G = U_jF$, то, рассуждая, как и в случае 3), получаем, что $U_i \in \mathfrak{F}$ или $U_j \in \mathfrak{F}$.

Итак, доказано, что для любой пары подгрупп U_i и U_j, где $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ либо $U_i \in \mathfrak{F}$, либо $U_j \in \mathfrak{F}$. Отсюда, не теряя общности рассуждений, можно заключить, что $U_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1,2,\ldots,n$. Теперь из $\wp_n$-распознаваемости $\mathfrak{F}$ получаем, что $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_\pi\mathfrak{F}$. Предложение доказано.

***Лемма* 3.5.** *Пусть* $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-*модель, где* $\mathfrak{X}$ *– разрешимый насыщенный гомоморф,* θ *– нижнерегулярный* $\mathfrak{X}$*-функтор,* Δ *–* F*-связанное проективное отношение на классе* $\mathfrak{X}$ *и* π *– некоторое множество простых чисел. Тогда классы* $\mathfrak{G}_\pi$ *и* $\mathfrak{S}_\pi$ *являются* $\wp_2$*-распознаваемыми.*

Доказательство. Пусть класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$ не является $\wp_2$-распознаваемым. Пусть $\mathfrak{X}$-группа G – контрпример минимального порядка. Тогда в G имеется $\wp$-тест $\{U_1, U_2\}$ такой, что $U_i \in \mathfrak{G}_\pi$ для всех $i \in \{1, 2\}$, но сама группа G не является π-группой.

Так как $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, то G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Для группы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и N – p-группа для некоторого простого числа p. Если $p \in \pi$, то $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, N – q-группа, где q – простое число и $q \in \pi'$. Заметим, что G – монолитическая группа. Так как отношение Δ является F-связанным, то выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

1) либо $F(G) \subseteq U_1$, либо $F(G) \subseteq U_2$;

2) либо $G = U_1F(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq U_2$, либо $G = U_2F(G)$, причем, если $\Phi(G) = 1$, то $F(G) \subseteq U_1$.

Заметим, что в первом и втором случаях получаем, что $G \in \mathfrak{G}_\pi$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{S})$ – Т-модель. Локальный $\mathfrak{X}$-экран f будем называть $\wp_n$-распознаваемым, если формация $f(p)$ является $\wp_n$-распознаваемой для любого простого p.

***Теорема* 3.6.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация,* $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-*модель, где* $\mathfrak{X}$ *– разрешимый насыщенный гомоморф,* θ *– нижнерегулярный* $\mathfrak{X}$ *-функтор,* Δ *– проективное* F*-связанное отношение на классе* $\mathfrak{X}$ *и* n *– натуральное число, причём* $n \geq 2$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mathfrak{F}$ *имеет* $\wp_n$*-распознаваемый локальный* $\mathfrak{X}$*-экран* f, *то* $\mathfrak{F}$ *является* $\wp_{n+2}$*-распознаваемой формацией*;

2) *если* $\mathfrak{F}$ *имеет полный* $\wp_n$*-распознаваемый локальный* $\mathfrak{X}$*-экран* h, *то* $\mathfrak{F}$ *является* $\wp_{n+1}$*-распознаваемой формацией.*

Доказательство. Установим справедливость 1). Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 4.5 из [7] $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \cap (\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p))$.

Из предложения 3.4 следует, что формация $\mathfrak{N}_p f(p)$ является $\wp_{n+1}$-распознаваемый для каждого $p \in \pi$. Снова, применяя предложение 3.4, получаем $\wp_{n+2}$-распознаваемость формации $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого $p \in \pi$. Теперь из лемм 3.1, 3.2 и 3.5 следует, что формация $\mathfrak{F}$ будет $\wp_{n+2}$-распознаваема. Утверждение 1) доказано.

Докажем 2). Если h – полный локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}_{p'}(\mathfrak{N}_p\, h(p)) = \mathfrak{G}_{p'}\, h(p)$ для каждого простого p. Из предложения 3.4 следует, что $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\, h(p)$ – $\wp_{n+1}$-распознаваемая формация в классе $\mathfrak{X}$. Применяя леммы 3.1, 3.2 и 3.5, получаем, что $\mathfrak{F}$ – $\wp_{n+1}$-распознаваемая формация. Теорема доказана.

***Теорема* 3.7.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная формация,* $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{X})$ – Т-*модель, где* $\mathfrak{X}$ *– разрешимый насыщенный гомоморф,* θ *– нижнерегулярный* $\mathfrak{X}$ *-функтор,* Δ *– проективное* F*-связанное отношение на классе групп* $\mathfrak{X}$ *и* n *– натуральное число* ($n \geq 2$), *а* m *– целое неотрицательное число. Тогда из* $\wp_n$*-распознаваемости формации*

$\mathfrak{F}$ следует $\wp_{n+m}$-распознаваемость формации $\mathfrak{N}^m\mathfrak{F}$.

Доказательство. Если $m = 0$, то утверждение очевидно. Предположим, что $m \geq 1$. Тогда $\mathfrak{N}^m\mathfrak{F} = \mathfrak{N}(\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F})$. По индукции теорема справедлива для $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$. Поэтому, заменяя $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}$, нам нужно доказать утверждение только для случая $m = 1$. Так как $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то согласно пункту 10 из [7, с. 36] $\mathfrak{H} = LF(f)$, где f – локальный экран формации $\mathfrak{H}$ и $f(p) = \mathfrak{F}$ для каждого простого p.

Предположим, что теорема для случая $m = 1$ неверна и $\mathfrak{X}$-группа G – контрпример минимального порядка. Тогда G имеет $\wp$-тест $\{U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}\}$ такой, что $U_i \in \mathfrak{H}$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, но сама G формации $\mathfrak{H}$ не принадлежит. Рассуждая, как и при доказательстве предложения 3.4, получим, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, совпадающую с $\mathfrak{H}$-корадикалом $G^{\mathfrak{H}}$. Из $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ следует, что N – абелева p-группа, p – некоторое простое число. Так как $\mathfrak{H}$ – насыщенная формация, то $\Phi(G) = 1$. Поэтому $N = C_G(N) = F(G)$ и $G = [N]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G.

Учитывая свойство F-связанности отношения Δ на классе $\mathfrak{X}$ и рассуждая аналогично, как в предложении 3.4, получаем, что подгруппа N содержится в n подгруппах нашей системы подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $N \subseteq H_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$H_i = H_i \cap NM = N(H_i \cap M),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим множество подгрупп $\{R_i \mid R_i = H_i \cap M$, где $i = 1,2,\ldots,n\}$. Из $H_i \in \theta(G)$ и нижнее регулярности подгруппового функтора θ следует, что $H_i/N \in \theta(G/N)$. Откуда из $R_iN/N \cong R_i$ вытекает, что $R_i \in \theta(M)$. Из свойства проективности отношения Δ на классе $\mathfrak{X}$ следует, что $(R_i, R_j) \in \Delta_M$ для всех $i \neq j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Покажем, что $R_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

С одной стороны, так как $H_i \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}$ – локальная формация. По лемме 4.5 из [7] получаем, что $H_i/F_p(H_i) \in f(p) = \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2,\ldots,n$. Так как $N \subseteq H_i$ и $N \subseteq F_p(H_i)$ и $C_G(N) = N$, то $F_p(H_i)$ является p-группой для любого $i = 1, 2,\ldots,n$. Поэтому $H_i / F_p(H_i) = R_iF_p(H_i)/F_p(H_i) \cong$ $\cong R_i /R_i \cap F_p(H_i) \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

С другой стороны, из $M \in \mathfrak{H}=\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ получаем $R_iF(M)/F(M) \in \mathfrak{F}$. По лемме 3.9 из [7] $F(M)$ является p'-группой.

Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $R_i \cong R_i /F(M) \cap R_i \cap F_p(H_i) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$. Теперь из $\wp_n$-распознаваемости формации $\mathfrak{F}$ получаем, что $M \in \mathfrak{F}$. Откуда $G \in \mathfrak{H} = \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

***Теорема* 3.8.** *Пусть $\wp = (\theta, \Delta, \mathfrak{S})$ – Т-модель, где θ – нижнерегулярный $\mathfrak{S}$-функтор, Δ – проективное F-связанное отношение на классе $\mathfrak{S}$ и n – целое неотрицательно число. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *класс $\mathfrak{N}^n$ ($n \geq 1$) является $\wp_{n+2}$-распознаваемым*;

2) *класс $\mathfrak{L}_p(n)$ является $\wp_{2n+2}$-распознаваемым.*

Доказательство. Покажем справедливость утверждения 1). Пусть $n = 1$. Известно [7], что $\mathfrak{N} = LF(h)$, где h – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{N}$ такой, что $h(p) = \mathfrak{N}_p$ для каждого простого p. Ввиду леммы 3.5 экран h является $\wp_2$-распознаваемым. Из 2) теоремы 3.6 вытекает $\wp_3$-распознаваемость $\mathfrak{N}$. Применяя теорему 3.7, получаем $\wp_{n+2}$-распознаваемость $\mathfrak{N}^n$.

Докажем $\wp_{2n+2}$-распознаваемость класса $\mathfrak{L}_p(n)$, где p – простое число, а n – целое неотрицательное число.

Если $n = 0$, то $\mathfrak{L}_p(0) = \mathfrak{S}_{p'}$. По лемме 3.5 класс $\mathfrak{L}_p(0)$ является $\wp_2$-распознаваемым.

Пусть $n \geq 1$. Из доказательства теоремы 5.6 [7] вытекает, что $\mathfrak{L}_p(n)$ имеет такой локальный экран f, что $f(q) = \mathfrak{L}_p(n\text{-}1)$ при $q = p$, $f(p) = \mathfrak{S}$ при $q \neq p$. По индукции теорема для $\mathfrak{L}_p(n\text{-}1)$ верна. Так как класс всех разрешимых групп $\mathfrak{S}$ является $\wp_n$-распознаваемым для любого $n \geq 1$, то утверждение следует из 1) теоремы 3.6. Теорема доказана.

4 Приложения для конкретных Т-моделей

Рассмотрим некоторые приложения полученных выше общих результатов.

Пусть Σ – бинарное отношение на группах такое, что для любой группы G пара ее подгрупп $(H, K) \in \Sigma_G$, тогда и только тогда, когда $(|G{:}H|, |G{:}K|) =1$. Нетрудно показать, что Σ – проективное F-связанное отношение на классе $\mathfrak{S}$. Для класса групп $\mathfrak{X}$ и подгруппового $\mathfrak{X}$-функтора θ рассмотрим Т-модель $\wp = (\theta, \Sigma, \mathfrak{X})$. Для этой модели вместо *$\wp_n$-распознаваемый* класс $\mathfrak{F}$ будем говорить *Σ_n^{θ}-распознаваемый* класс $\mathfrak{F}$. Из теорем 3.6 и 3.7 вытекают следующие результаты.

***Теорема* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, $\wp = (\theta, \Sigma, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где $\mathfrak{X}$ – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный $\mathfrak{X}$-функтор, n – натуральное число, причем ($n \geq 2$). Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $\mathfrak{F}$ имеет Σ_n^{θ}-распознаваемый локальный экран f, то $\mathfrak{F}$ является Σ_{n+2}^{θ}-распознаваемой формацией*;

2) *если $\mathfrak{F}$ имеет полный Σ_n^{θ}-распознаваемый*

локальный экран h, то $\mathfrak{F}$ является Σ_{n+1}^{θ}-распознаваемой формацией.

***Теорема* 4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, $\wp = (\theta, \Sigma, \mathfrak{X})$ – T-модель, где $\mathfrak{X}$ – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный $\mathfrak{X}$-функтор и n – натуральное число ($n \geq 2$), а m – целое неотрицательное число. Тогда из Σ_{n}^{θ}-распознаваемости формации $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{X}$ следует Σ_{n+m}^{θ}-распознаваемость формации $\mathfrak{N}^{m}\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{X}$.*

Как отмечалось выше, в работах О. Крамера [4]–[6] изучались Σ_{n}^{θ}-*распознаваемые* (Σ_t-замкнутые) разрешимые формации в случае, когда $\mathfrak{X}$ – класс всех разрешимых групп и θ такой подгрупповой функтор, что $\theta(G)$ совпадает с множеством всех подгрупп для любой группы G. Теоремы 4.1 и 4.2 существенно расширяют результаты работ [10]–[11]. Применяя отмеченные выше результаты для других конкретных значений $\mathfrak{X}$ и θ, можно получить новые результаты. Отметим некоторые из них. Рассматривая различные подгрупповые функторы, мы можем получать новые признаки принадлежности группы локальным формациям в терминах систем подгрупп с попарно взаимно простыми индексами. Остановимся на некоторых из них.

Напомним [7], что подгруппа H группы G называется *абнормальной* в G, если $x \in \langle H^x, H\rangle$, для любого $x \in H$. Пусть S_{an} – подгрупповой функтор, который сопоставляет каждой группе G множество всех ее абнормальных подгрупп. Нетрудно убедиться, что S_{an} – нижнерегулярный подгрупповой функтор.

Согласно Ж. Роузу [16] подгруппа H группы G называется *контрнормальной* в G, если $H^G = G$. Будем обозначать: H *cn* G. Пусть S_{cn} – подгрупповой функтор, который сопоставляет каждой группе G множество всех ее контрнормальных подруп. Проверкой устанавливаем, что S_{cn} – нижнерегулярный подгрупповой функтор. Заметим, что $S_{an}(G) \subseteq S_{cn}(G)$. Обратное включение неверно.

***Лемма* 4.3.** Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$, *где $\mathfrak{X}$ – формация, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\Sigma_{2}^{S_{cn}}$-распознаваемой формацией в классе $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть группа G – контрпример минимального порядка. Тогда в G найдутся две подгруппы H_1 и H_2 такие, что H_i *cn* G, $H_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$ и $(|G : H_1|, |G : H_2|) = 1$, но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G.

Для группы G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $N = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Если N – p-группа, то из $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, N – q-группа, где q – простое число и $q \neq p$.

Если G нильпотентна, то из H_1 *cn* G следует, что $H_1 = G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть G ненильпотентна. Тогда $F = F(G) \subset G$. Из единственности N следует, что F – q-группа. Так как $(|G : H_1|, |G : H_2|) = 1$, то можно считать, что $F \subseteq G_q \subseteq H_1$, где G_q – некоторая силовская q-подгруппа группы G. Из $C_{H_1}(F) \subseteq C_G(F) \subseteq F$ заключаем, что $O_{q'}(H_1) = O_p(H_1) = 1$. Отсюда и из $H_1 \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$ следует, что $H_1 \in \mathfrak{X}$. Из нильпотентности $\mathfrak{X}$ получаем, что $H_1 = F$. Тогда из H_1 *cn* G следует, что $H_1 = G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

***Теорема* 4.4.** *Любая локальная подформация формации $\mathfrak{N}^2$ всех метанильпотентных групп является $\Sigma_{3}^{S_{cn}}$-распознаваемой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная подформация формации $\mathfrak{N}^2$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет внутренний локальный $\mathfrak{N}$-экран f. Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 3.3 из [7] для любого простого p имеет место равенство $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как по условию формация $f(p)$ состоит из нильпотентных групп, то по лемме 4.3 формация $h(p)$ является $\Sigma_{2}^{S_{cn}}$-распознаваемой. Теперь результат следует из 2) теоремы 4.1. Теорема доказана.

***Следствие* 4.4.1.** *Группа G является сверхразрешимой, если она имеет три контрнормальные сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G.*

***Следствие* 4.4.2.** *Пусть группа G имеет три контрнормальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, и их индексы в G попарно взаимно просты. Тогда G имеет нильпотентный коммутант.*

***Следствие* 4.4.3.** *Группа G является сверхразрешимой, если она имеет три абнормальные сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G.*

***Следствие* 4.4.4.** *Пусть группа G имеет три абнормальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, и их индексы в G попарно взаимно просты. Тогда G имеет нильпотентный коммутант.*

***Лемма* 4.5.** *Любая формация нильпотентных групп является $\Sigma_{2}^{S_{cn}}$-распознаваемой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация нильпотентных групп. Предположим, что существует группа $G = AB$, где A и B – контрнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, но сама G не является $\mathfrak{F}$-группой. Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

По теореме Виландта-Кегеля группа G является разрешимой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Для G/N все условия леммы выполняются. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то G

является монолитической группой с цоколем, равным N.

Предположим, что $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда из $G/N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ и насыщенности $\mathfrak{N}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}$. Но тогда из контрнормальности подгрупп A и B следует, что $A=B=G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором группы G. Поэтому можно считать, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае $G = [N]M$, где $N = C_G(N) = F(G)$, $|N| = p^{\alpha}$, p – простое число, а M – некоторая максимальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$.

Так как $G = AB$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Рассмотрим подгруппы $R = NA$ и $F = NB$. Если $R = F = G$, то A и B являются максимальными подгруппами группы G, дополняющими подгруппу N в G. Так как все дополнения к N в G сопряжены, то по теореме Оре [15] $AB \neq G$. Поэтому можно считать, что $F \neq G$. Из контрнормальности подгруппы F в G следует, что $F \neq N$. Отсюда следует, что F/N – неединичная подгруппа в G/N. Так как $G/N \cong M \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$, то из контрнормальности F/N в G/N следует, что $F/N = G/N$. Откуда $G = F$. Получили противоречие.

Так как из условия $(|G : A|, |G : B|) = 1$ всегда следует, что $G = AB$, то из приведенных выше рассуждений получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

***Теорема* 4.6.** *Класс* $\mathfrak{N}^n$ $(n \geq 1)$ *является* $\Sigma_{n+1}^{S_{cn}}$ *-распознаваемым.*

Доказательство. Индукцией по n. Если $n = 1$, то результат следует из леммы 4.5. Пусть $n > 1$. Так как $\mathfrak{N}^n = \mathfrak{N}\,\mathfrak{N}^{n-1}$, то результат следует из теоремы 3.7. Теорема доказана.

***Следствие* 4.6.1.** *Если группа G имеет n + 1 контрнормальные подгруппы, нильпотентная длина которых не превосходит n и чьи индексы в G попарно взаимно просты, то и нильпотентная длина группы G также не превосходит n.*

***Следствие* 4.6.2.** *Если группа G имеет n + 1 абнормальные подгруппы, нильпотентная длина которых не превосходит n и чьи индексы в G попарно взаимно просты, то и нильпотентная длина группы G также не превосходит n.*

Пусть Ω – бинарное отношение на классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп такое, что для любой группы G пара ее подгрупп $(H, K) \in \Omega_G$ тогда и только тогда, когда, либо H и K – несопряженные максимальные подгруппы в G, либо, по крайней мере, одна из подгрупп H или K совпадает с G. Нетрудно показать, что Ω – проективное F-связанное отношение на классе $\mathfrak{S}$. Для класса разрешимых групп $\mathfrak{X}$ и подгруппового $\mathfrak{X}$-функтора θ рассмотрим Т-модель $\wp = (\theta, \Omega, \mathfrak{X})$. Для этой модели вместо $\wp_n$*-распознаваемый* класс $\mathfrak{F}$ будем говорить Ω_n^{θ} *-распознаваемый* класс $\mathfrak{F}$.

Из теорем 3.6 и 3.7 вытекают следующие результаты.

***Теорема* 4.7.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, $\wp = (\theta, \Omega, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где $\mathfrak{X}$ – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный $\mathfrak{X}$-функтор, n – натуральное число, причём $n \geq 2$. Тогда справедливы утверждения*:

1) *если $\mathfrak{F}$ имеет Ω_n^{θ} -распознаваемый локальный экран f, то $\mathfrak{F}$ является Ω_{n+2}^{θ} -распознаваемой формацией*;

2) *если $\mathfrak{F}$ имеет полный Ω_n^{θ} -распознаваемый локальный экран h, то $\mathfrak{F}$ является Ω_{n+1}^{θ} -распознаваемой формацией.*

***Теорема* 4.8.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, $\wp = (\theta, \Omega, \mathfrak{X})$ – Т-модель, где $\mathfrak{X}$ – разрешимый насыщенный гомоморф, θ – нижнерегулярный $\mathfrak{X}$ -функтор и n – натуральное число $(n \geq 2)$, а m – целое неотрицательное число. Тогда из Ω_n^{θ} -распознаваемости формации $\mathfrak{F}$ следует Ω_{n+m}^{θ} -распознаваемость формации $\mathfrak{N}^m\mathfrak{F}$.*

В случае, когда подгрупповой функтор θ выделяет в каждой группе множество всех ее подгрупп, в качестве следствий из теорем 4.7 и 4.8 вытекают соответствующие результаты работ [11], [13].

***Лемма* 4.9.** *Любая формация нильпотентных групп является $\Omega_2^{S_{cn}}$ -распознаваемой.*

Доказательство. Проводим рассуждения аналогично доказательству леммы 4.5.

Отметим следующий новый результат, вытекающий из леммы 4.9 и теоремы 4.8.

***Теорема* 4.10.** *Класс* $\mathfrak{N}^n$ $(n \geq 1)$ *является* $\Omega_{n+1}^{S_{cn}}$ *-распознаваемым в классе* $\mathfrak{S}$.

В частности, из этой теоремы получаем следующие следствия.

***Следствие* 4.10.1.** *Любая разрешимая группа, нильпотентная длина которой больше натурального числа n, имеет не более n классов сопряженных абнормальных максимальных подгрупп, чья нильпотентная длина не превосходит натурального числа n.*

***Следствие* 4.10.2.** *Любая неметанильпотентная разрешимая группа имеет не более двух несопряженных абнормальных метанильпотентных максимальных подгрупп.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt, H.* Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierbaren Gruppen / H. Wielandt // J. Austral. Math. Soc. – 1960. – № 1. – S. 143–146.

2. *Kegel, O.H.* Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 1. – P. 42–48.

3. *Doerk, K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

4. *Kramer, O.-U.* Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilfremden Indizes / O.-U. Kramer // Math. Z. – 1974. – Vol. 139, № 1. – P. 63–68.

5. *Kramer, O.-U.* Zur Struktur endlicher auflösbarer Gruppen mit mindestens drei Untergruppen von paarweise teilfremden Indizes / O.-U. Kramer // Arch. Math. – 1975. – Vol. 26, № 4. – P. 361–366.

6. *Kramer, O.-U.* Properties of critical groups / O.-U. Kramer // J. Algebra. – 1980. – Vol. 65. – P. 98–103.

7. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

8. *Guo, W.* The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 257 p.

9. *Белоногов, В.А.* Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп / В.А. Белоногов // Докл. Акад. наук СССР. – 1965. – Т. 161, № 6. – С. 1255–1256.

10. *Семенчук, В.Н.* Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника. – 1981. – С. 138–149.

11. *Васильев, А.Ф.* О некоторых свойствах локальных формаций / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1985. – Вып. 1. – С. 4–9.

12. *Васильев, А.Ф.* К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.

13. *Höfling, B.* On the number of conjugacy classes of maximal subgroups in a finite soluble group / B. Höfling // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 1–8.

14. *Васильев, А.Ф.* Формации и их разпознавание / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2007. – № 2 (41). – С. 23–29.

15. *Doerk, K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

16. *Rose, J.S.* Nilpotent subgroups of finite soluble groups / J.S. Rose // Math. Z. – 1968. – Vol. 106. – P. 97–112.

Поступила в редакцию 19.10.09.