Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь

ЗАДАЧА О S-СОСТОЯНИЯХ РАССЕЯНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Уравнения квазипотенциального типа [1, 2] нашли широкое применение в исследовании релятивистских систем двух частиц. Основным преимуществом этих уравнений по сравнению с другими является возможность проведения простой квантовомеханической аналогии. Релятивистские уравнения для s-состояний рассеяния двух частиц одинаковой массы m в релятивистском конфигурационном представлении [3] (РКП) имеют вид [4]

$$\psi_{(j)}(\chi_q,r)=\sin(\chi_q mr)-\lambda\int_0^\infty dr' G_{(j)}(\chi_q,r,r')V(r')\psi_{(j)}(\chi_q,r'), \qquad (1)$$

где индекс $j=1,2,3,4$ соответствует одному из четырёх вариантов уравнений [1-3]: $j=1$ ($j=3$) – уравнение Логунова-Тавхелидзе (модифицированное), $j=2$ ($j=4$) – уравнение Кадышевского (модифицированное). Величина $\psi_{(j)}(\chi_q,r)$ в уравнениях (1) – волновая функция, r – модуль радиус-вектора в РКП, $\chi_q \geq 0$ – быстрота, связанная с энергией двухчастичной системы $2E_q$ соотношением $2E_q=2m\,\mathrm{ch}\chi_q$, λ – константа связи, $V(r)$ – потенциал. Функции Грина (ФГ) $G_{(j)}(\chi_q,r,r')$ имеют следующую форму [4]:

$$G_{(j)}(\chi_q,r,r')=G_{(j)}(\chi_q,r-r')-G_{(j)}(\chi_q,r+r'), \qquad (2)$$

где

$$G_{(1)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{K_q^{(1)}}\frac{\mathrm{sh}(\pi/2+i\chi_q)mr}{\mathrm{sh}(\pi mr/2)},\; G_{(3)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{K_q^{(3)}}\frac{\mathrm{ch}(\pi/2+i\chi_q)mr}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)}, \qquad (3)$$

$$G_{(2)}(\chi_q,r)=\frac{(4m\,\mathrm{ch}\chi_q)^{-1}}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)}-\frac{i}{K_q^{(2)}}\frac{\mathrm{sh}(\pi+i\chi_q)mr}{\mathrm{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(4)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{K_q^{(4)}}\frac{\mathrm{sh}(\pi+i\chi_q)mr}{\mathrm{sh}(\pi mr)}.$$

В выражениях (3) мы использовали обозначения

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m \operatorname{sh} 2\chi_q, \; K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m \operatorname{sh} \chi_q. \qquad (4)$$

Из уравнений (1) следуют асимптотики волновых функций при $r \to \infty$

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r)\big|_{r\to\infty} \cong \sin(\chi_q m r) + q f_{(j)}(\chi_q) \exp(i\chi_q m r), \qquad (5)$$

где $f_{(j)}(\chi_q)$ – обозначение для амплитуды рассеяния, которая введена по аналогии с квантовой механикой, как коэффициент при рассеянной волне $\exp(i\chi_q m r)$, разделенный на импульс $q = m\operatorname{sh}\chi_q$ [5, 6]:

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{2\lambda}{q K_q^{(j)}} \int_0^\infty dr' \sin(\chi_q m r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'). \qquad (6)$$

Амплитуда рассеяния связана с парциальным сечением рассеяния $\sigma_{0(j)}(\chi_q)$ и унитарной S-матрицей $S_{(j)}(\chi_q)$ выражениями

$$\sigma_{0(j)}(\chi_q) = 4\pi |f_{(j)}(\chi_q)|^2; \;\; S_{(j)}(\chi_q) = 1 + 2iq f_{(j)}(\chi_q). \qquad (7)$$

Унитарность S-матрицы отражается в представлении $S_{(j)}(\chi_q) = \exp(2i\phi_{(j)}(\chi_q))$, где $\phi_{(j)}(\chi_q)$ – парциальный фазовый сдвиг. Длина рассеяния в квантовой механике определяется по формуле $a_{(j)} = -f_{(j)}(0)$ [5, 6]. Из формул (6) нетрудно получить выражение для длины рассеяния через волновую функцию

$$a_{(j)} = -\lambda \int_0^\infty dr' r' V(r') \tilde{\psi}_{(j)}(r'); \qquad \tilde{\psi}_{(j)}(r) = \lim_{\chi_q \to 0} \psi_{(j)}(\chi_q, r)/q. \qquad (8)$$

Разделив уравнения (1) на q и найдя их предел при $\chi_q \to 0$, получим уравнения для функций $\tilde{\psi}_{(j)}(r)$

$$\tilde{\psi}_{(j)}(r) = r - \lambda \int_0^\infty dr' G_{(j)}(0, r, r') V(r') \tilde{\psi}_{(j)}(r'). \qquad (9)$$

Асимптотики уравнений (9) при $r \to \infty$, с учётом (8) имеют вид

$$\tilde{\psi}_{(j)}(r)\big|_{r\to\infty} \cong r - a_{(j)}. \qquad (10)$$

Формулу (10) удобнее использовать для нахождения длины рассеяния, чем (8), т.к. она не содержит интеграл. Нерелятивистский предел (при $m \to \infty$, $\chi_q \to 0$) всех приведенных уравнений и формул даёт уравнения и выражения квантовой механики [5, 6].

Для решения интегральных уравнений (1), (9) был использован метод составных квадратур Гаусса. В работе [7] этот метод уже был использован нами для решения релятивистских двухчастичных уравнений в РКП. Решения двухчастичных уравнений были получены в случае потенциала однобозонного обмена, рассмотренного в [3] и потенциала Юкавы в РКП

$$V(r)=\frac{\mathrm{ch}(\pi-\alpha)mr}{r\,\mathrm{sh}\pi mr}; \quad V(r)=\frac{\exp(-\mu r)}{r}, \tag{11}$$

где параметр α связан с массой скалярного бозона обмена μ как $\cos\alpha = 1-\mu^2/2m^2$. Приведенный потенциал является одним из вариантов релятивистского обобщения потенциала Юкавы. Основным отличием релятивистского потенциала от нерелятивистского является его более сильная сингулярность при $r=0$.

На рисунке 1 приведены результаты вычисления длин рассеяния для уравнений $j=1$, $j=4$ с потенциалом однобозонного обмена при $m=1$, $\mu=0{,}2$. Из рисунка видно, что при некоторых константах связи значения длин рассеяния резко возрастают. Аналогичное поведение зависимости длины рассеяния от константы связи хорошо известно и в нерелятивистской теории. Например, длина рассеяния в случае потенциальной ямы обладает таким же свойством [5].

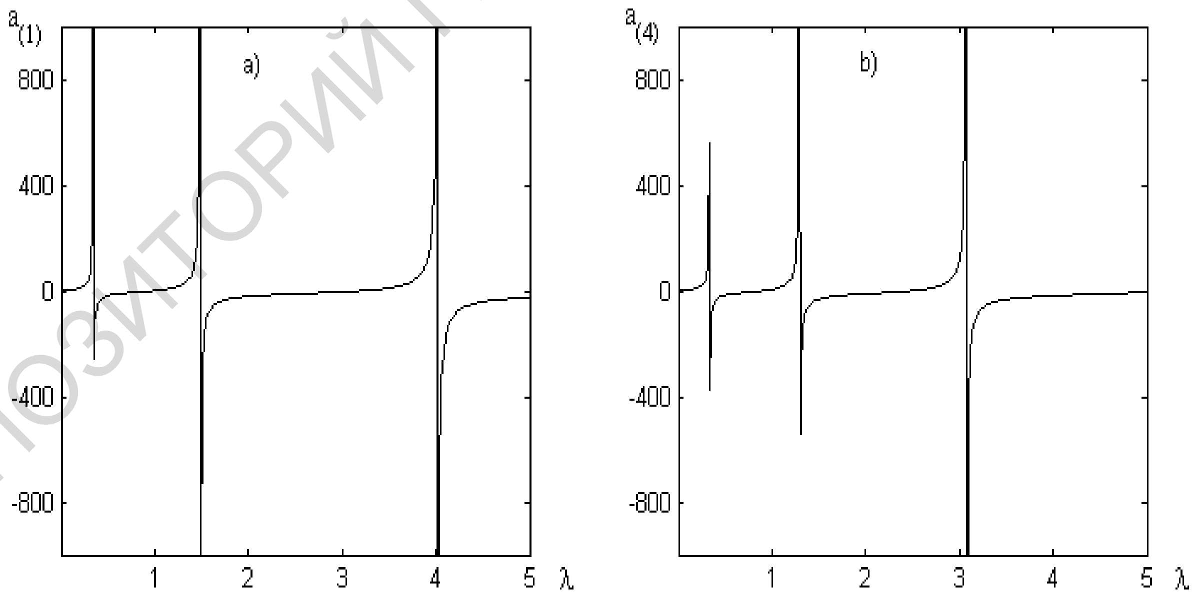

Рисунок 1 – Зависимость длин рассеяния от константы связи для потенциала однобозонного обмена: a – $j=1$, b – $j=4$

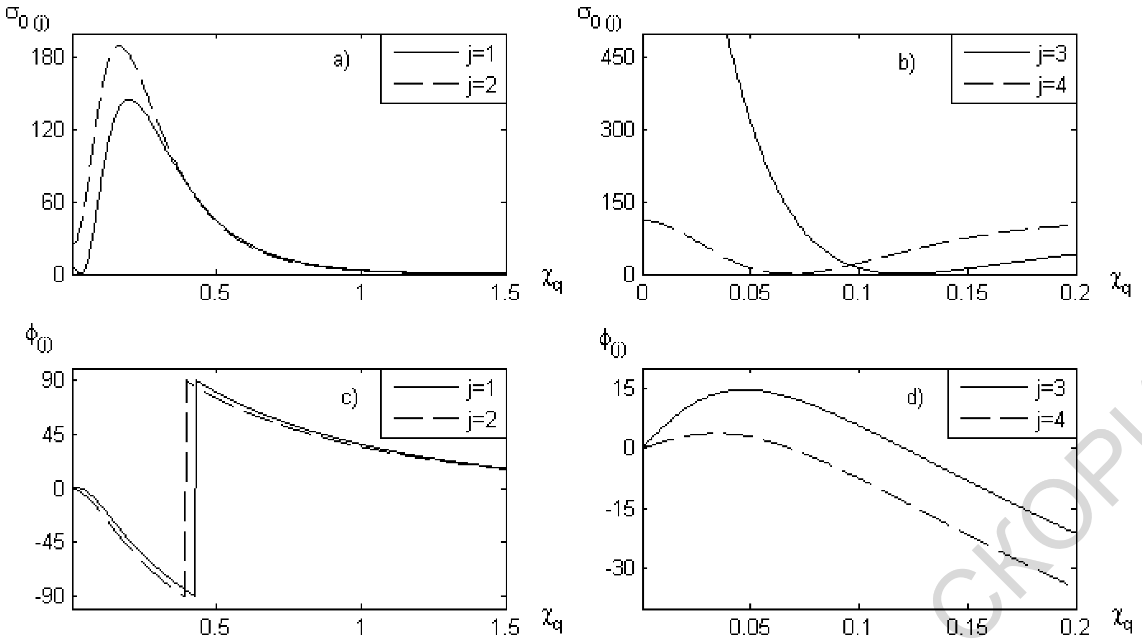

Рисунок 2 – Зависимость парциальных сечений рассеяния (a, b) и соответствующих фазовых сдвигов (c, d) от быстроты:
a, c – потенциал однобозонного обмена; b, d – потенциал Юкавы

На рисунке 2 приведены результаты вычисления сечений рассеяния и фазовых сдвигов для потенциала однобозонного обмена и потенциала Юкавы при $m = 1$, $\mu = 0{,}2$, $\lambda = 1$. Результаты для других случаев мы не приводим, т.к. они имеют похожий вид.

Численные расчёты показывают, что все полученные амплитуды рассеяния удовлетворяют условию унитарности

$$\operatorname{Im} f_{(j)}(\chi_q) = q\,|\,f_{(j)}(\chi_q)|^2, \qquad (12)$$

которое в случае суперпозиции двух дельта-потенциалов в РКП было доказано точно [8]. Доказательство равенства (12) на основании интегральных уравнений в РКП для других потенциалов нам неизвестно.

В дальнейшем мы планируем изучение состояний рассеяния на основании двухчастичных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении с другими потенциалами и применение полученных результатов для исследования реальных физических процессов, например, протон-антипротонного рассеяния.

Литература

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29. – № 2. – P. 380–399.

2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968.– Vol. B6. – № 1. – P. 125–148.

3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б.Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – № 3. – С. 635–690.

4. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

5. Тейлор, Дж. Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – Москва: Мир, 1975. – 568 с.

6. Ньютон, Р. Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. – Москва: Мир, 1969. – 608 с.

7. Grishechkin, Yu.A. Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu.A. Grishechkin, V.N.Kapshai // Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56. – № 4. – P. 435–443.

8. Kapshai, V. Relativistic two-particle equations with superposition of delta-shell potentials: scattering and bound states [Electronic resource] / V. Kapshai, Yu. Grishechkin. – 2013. – Mode of acces: http: // arxiv.org / pdf quant-ph/1312.1902. – Date of access: 06.12.2013.

Е.А. Дей

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОЛПИТЕРА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ КВАРК-АНТИКВАРК

Для исследования свойств мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время применяется широкий набор методов и подходов:

- нерелятивистские модели на основе уравнения Шредингера;
- модели на основе релятивистских уравнений квантовой механики;
- уравнение Бете-Солпитера;