

2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968.– Vol. B6. – № 1. – P. 125–148.

3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б.Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – № 3. – С. 635–690.

4. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of  $\delta$ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

5. Тейлор, Дж. Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – Москва: Мир, 1975. – 568 с.

6. Ньютон, Р. Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. – Москва: Мир, 1969. – 608 с.

7. Grishechkin, Yu.A. Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu.A. Grishechkin, V.N.Kapshai // Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56. – № 4. – P. 435–443.

8. Kapshai, V. Relativistic two-particle equations with superposition of delta-shell potentials: scattering and bound states [Electronic resource] / V. Kapshai, Yu. Grishechkin. – 2013. – Mode of acces: <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/1312.1902>. – Date of access: 06.12.2013.

**Е.А. Дей**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

### **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОЛПИТЕРА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ КВАРК- АНТИКВАРК**

Для исследования свойств мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время применяется широкий набор методов и подходов:

- нерелятивистские модели на основе уравнения Шредингера;
- модели на основе релятивистских уравнений квантовой механики;
- уравнение Бете-Солпитера;

- уравнение Солпитера (мгновенное приближение);
- квазипотенциальный подход (одновременное приближение).

Наиболее широко для численного решения уравнения Солпитера [1-4] применяется вариационный метод по системе функций, построенных по полиномам Лагерра [2], и метод кубических В-сплайнов [3]. В данной работе уравнение Солпитера для состояний с квантовыми числами  $1^{+-}$  решается численно методом коллокации в базисе линейных конечных элементов [5].

Уравнение Бете-Солпитера для системы кварк-антикварк имеет общий вид [2-4]

$$\left(\bar{p}_1 - m_1\right)\chi(p)\left(\bar{p}_2 + m_2\right) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V(P, p, k)\chi(k), \quad (1)$$

где  $P, p$  – полный и относительный импульсы частиц в системе,  $V(P, p, k)$  – оператор взаимодействия,  $p_1 = \alpha_1 P + p$ ,  $p_2 = \alpha_2 P - p$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Для систем, состоящих из кварков одного аромата,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ .

Одновременное приближение для уравнения (1) означает, что ядро уравнения зависит только от трехмерных импульсов  $V \equiv V(\vec{p} - \vec{k})$ . Как следствие волновая функция Солпитера в системе центра масс  $\vec{P} = 0$ ,  $P = M$  определяется соотношением

$$\psi(\vec{p}) = i \int \frac{dp_0}{2\pi} \chi(p). \quad (2)$$

Для описания кварк-антикваркового взаимодействия обычно используют суперпозицию потенциала одноглюонного обмена, запирающего потенциала, соответствующего линейному поведению в координатном представлении, и постоянной составляющей [4]

$$V(\vec{p} - \vec{k}) = \frac{4\pi\bar{\alpha}_s}{(\vec{p} - \vec{k})^2} \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\mu^{(2)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \frac{4\pi\lambda}{(\vec{p} - \vec{k})^2 + \varepsilon^2} \right) + u. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_s$  – константа одноглюонного обмена,  $\lambda$  – интенсивность запирающего взаимодействия,  $u$  – постоянная составляющая.

Учет квантовых чисел мезона выполняется разложением оператора взаимодействия по полной системе инвариантов алгебры Дирака и выделением в полной волновой функции скалярных амплитуд и множителей, определяющих ее трансформационные

свойства. Так, для состояния  $1^{+-}$  волновая функция имеет общую структуру [4]

$$\psi(\vec{p}) = \psi_P(p)\gamma^5 + \psi_A(p)\left(\gamma^0\gamma^5 + \gamma^5\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{m}\right). \quad (4)$$

Для скалярных функций  $\psi_A(p)$ ,  $\psi_P(p)$  в результате парциального разложения оператора взаимодействия получается система интегральных уравнений с симметричными ядрами ( $\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ )

$$\begin{cases} M\psi_P(p) = \left[\frac{2\omega^2(p)}{m} + u\frac{m}{\omega(p)}\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right)\right]\psi_A(p) + \frac{m}{\omega(p)}\int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} p^2 V_1(p,k)\psi_A(k); \\ M\psi_A(p) = m\left(2 + \frac{u}{\omega(p)}\right)\psi_P(p) + \frac{m}{\omega(p)}\int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} p^2 V_{21}(p,k)\psi_P(k) \end{cases} \quad (5)$$

и соответствующее условие нормировки

$$\frac{8}{m}\int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \omega(p)\psi_A(p)\psi_P(p) = 2M. \quad (6)$$

Операторы взаимодействия в (5) содержат компоненты

$$\begin{aligned} V_1(p,k) &= V_0^S(p,k) - \frac{pk}{m^2}V_1^S(p,k) + 2V_0^V(p,k); \\ V_2(p,k) &= V_0^S(p,k) - 4V_0^V(p,k); \end{aligned} \quad (7)$$

$$V_{0,1}^S(p,k) = \frac{8\pi^2\lambda}{pk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} Q_{0,1}\left(\frac{p^2 + k^2 + \varepsilon^2}{2pk}\right);$$

$$V_0^V(p,k) = \frac{8\pi^2\bar{\alpha}_s}{pk} Q_0\left(\frac{p^2 + k^2}{2pk}\right).$$

Величины  $V_0^S(p,k)$ ,  $V_1^S(p,k)$  и  $V_0^V(p,k)$  – элементы парциального разложения запирающей и одноглюонной компонент оператора

взаимодействия (3), выражающиеся через функции Лежандра второго рода  $Q_0(z)$ ,  $Q_1(z)$ .

Для численного решения область изменения аргументов ограничивалась достаточно большим значением  $0 \leq p \leq p_{\max}$  и разбивалась на  $N$  равных конечных элементов. Искомые волновые функции выражались через функции формы  $F_i(p)$  конечных элементов

$$\psi_1(p) = \sum_{i=1}^N \psi_i F_i(p); \quad \psi_2(p) = \sum_{i=1}^N \psi_{N+i} F_i(p). \quad (8)$$

Преимущество метода конечных элементов состоит в том, что все интегралы вычисляются не от неизвестных функций  $\psi_1(k)$ ,  $\psi_2(k)$ , а от функций формы, имеющих простой явный вид, так что большинство интегралов может быть вычислено аналитически.

В соответствии с методом коллокаций, в каждом узле невязка точного и численного решения системы уравнений (5) должна обращаться в ноль. В качестве узлов коллокации использовались центральные точки конечных элементов. С учетом выражений (8) при этом получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных значений волновой функции в узлах конечных элементов. Полученная система линейных уравнений образует стандартную задачу на собственные значения  $M$  квадратной матрицы  $A$ , действующей на объединенный вектор  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,N}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,N})$ :

$$\sum_{j=1}^{2N} A_{i,j} \psi_j = M \psi_i; \quad i = 1..2N. \quad (9)$$

Для расчета элементов матрицы использовались программные блоки, составленные в системе Mathcad. Собственные значения и собственные векторы вычислялись с помощью встроенных функций.

В настоящее время известно одно состояние системы  $c\bar{c}$  (чармоний) с квантовым числом  $1^{+-}$  – мезон  $h_c$ . Параметры расчета подбирались по экспериментальной массе состояния  $1S$   $M_{h_c} = 3525,93$  МэВ [6]. Вычисленные значения массы последующих состояний при значениях  $p_{\max} = 8$ ,  $N = 100$ ,  $m_c = 1,383$ ,  $u = 0,01$ ,  $\alpha_s = 0,288$ ,  $\lambda = 0,21$  приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Спектр масс псевдовекторных состояний кваркония

Состояние	$M(h_c)$	$M(h_c)$ [7]	$M(\eta_b)$	$M(\eta_b)$ [7]
1S	3526	3526	9900	9900
2S	3916	3943	10233	10280
3S	4214	4242	10507	10562
4S	4455		10747	

Для сравнения приведены результаты вычислений из работы [7], в которой использована иная параметризация взаимодействия. Там же приведены результаты расчетов массы  $b\bar{b}$ -системы  $h_c$  (параметры расчета  $m_b=4,96$ ,  $u=-0,575$ ,  $\alpha_s=0,23$ ,  $\lambda=0,21$ ) в сопоставлении с результатами [7].

Таким образом, метод коллокации по системе конечных элементов является удобным инструментом для численного решения уравнения Солпитера. Дальнейшее повышение точности численных результатов может быть достигнуто, во-первых, использованием конечных элементов высших порядков и, во-вторых, использованием эрмитовых конечных элементов, обеспечивающих непрерывность не только волновой функции, но и ее первых производных.

### Литература

1. Salpeter, E.E. Mass Corrections to the Fine Structure of Hydrogen-Like Atoms / E.E. Salpeter // Physical Review. – 1952. – Vol. 87 – P. 328–343.
2. Resag, J. Heavy Quarkonia in a covariant Salpeter Model / J.Resag, C.R. Münz // Nuclear Physics. – 1995. – Vol. A590. – P. 735–749.
3. Spence, J.L. Solving momentum-space integral equations for quarkonium spectra with confining potentials. III. Bethe-Salpeter equation with spin / J.L. Spence, J.P.Vary // Physical Review. – 1993. – Vol. C47. – P. 1282–1293.
4. Linde, J. Charmonium in the instantaneous approximation / J.Linde, H. Snellman // Nuclear Physics. – 1977. – Vol. A619. – P. 346–378.
5. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О.Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
6. Nakamura, K. Review of Particle Physics / K Nakamura (Particle Data Group) // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. – 2010. – Vol. 37.

7. Chang, C.-H. Spectrum for heavy quarkonia and mixture of the relevant wave functions within the framework of Bethe-Salpeter equation / C.-H. Chang, G.-L. Wang // Science China. Physics, Mechanics, Astronomy. – 2010. – Vol. 53 – № 11. – P. 2005–2018.

Е.А. Дей, А.И. Остапенко

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь

### ЧИСЛЕННОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭНДОФУЛЛЕРЕНОВ

Одними из самых известных исследуемых объектов нанofизики являются фуллерены. Они представляют собой систему связанных атомов углерода, образующих сферический каркас. Самым распространенным, изученным и стабильным является фуллерен  $C_{60}$ , форма которого состоит из 20 шестиугольников и 12 пятиугольников. Существуют и другие фуллерены с большим и меньшим количеством атомов. Конформации с числом атомов от 20 до 60 называются низшими фуллеренами, остальные (до 540) – высшими (рисунок 1). Для оценки масштаба изображения на рисунке приведена горизонтальная линия, длина которой соответствует расстоянию  $65 \text{ \AA}$ .

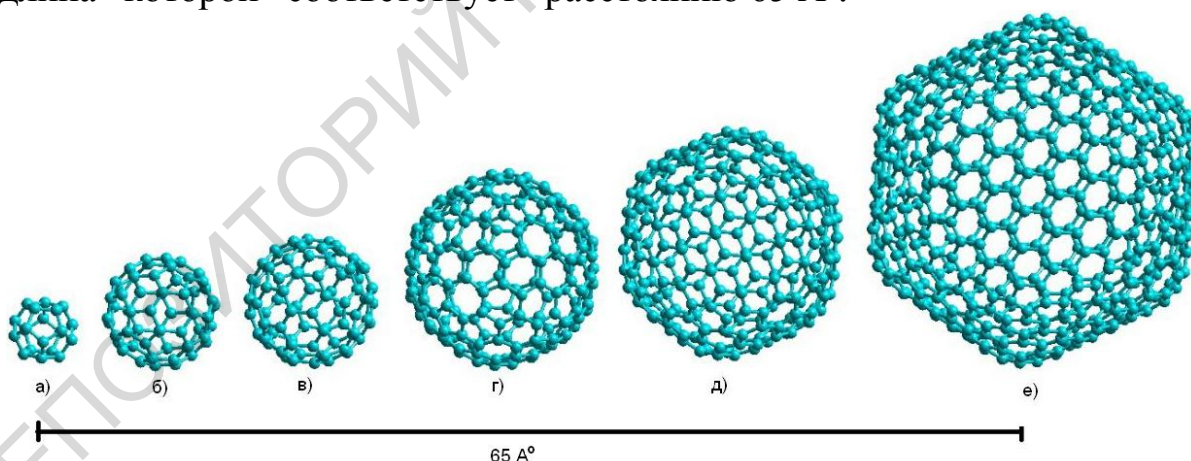


Рисунок 1 – Модели фуллеренов  $C_{20}$  (а),  $C_{60}$  (б),  $C_{80}$  (в),  $C_{120}$  (г),  $C_{240}$  (д),  $C_{540}$  (е)

Наряду с другими, для изучения таких нанообъектов используют методы компьютерного моделирования, разработанные с учетом экспериментальной информации и различных методов численного