Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (108), 2018

УДК 512.548

О неассоциативности l-арной операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$

А.Д. Русаков[1], А.М. Гальмак[2], В.Л. Мережа[1]

Продолжается изучение l-арной операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$. В частности, найдены достаточные условия для невыполнимости в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ $l-1$ тождеств, включая тождество полуассоциативности, определяющих ассоциативность операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$.

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, ассоциативность, единица.

The study of the l-ary operation $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ continues. In particular, the sufficient conditions of impracticability of l-1identities in l-ary groupoid $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ were found, including identity of the semiassociativity, which determines the associativity of $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ operation.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, associativity, identity element.

Введение. Полиадическая операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ была определена в [1] на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η. Частным случаем ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ является l-арная операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. Изучению операции $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ посвящена книга [3].

При

$$k = m - 1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m - 1),\ A = \mathbf{S}_n$$

операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ совпадает с m-арной операцией Э. Поста, определенной [4] на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$, а при $A = \mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ и тех же k, l и σ операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ совпадает с m-арной операцией Э. Поста, определенной [4] на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$.

В [1] доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ также является ассоциативной. Если же подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то, как установлено в [5], наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности влечёт за собой невыполнимость в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ тождества полуассоциативности. При этом в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ могут выполняться некоторые тождества, определяющие ассоциативность операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$, отличные от тождества полуассоциативности.

Основным результатом данной статьи является теорема, утверждающая, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ единицы является достаточным условием для невыполнимости в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ $l-1$ тождеств, включая тождество полуассоциативности, определяющих ассоциативность операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$.

1. Предварительные сведения. Напомним, что n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нём для любого $i = 2, \ldots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}).$$

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n-арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n-арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют полуассоциативной, если в нём выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2n-1})).$$

Ясно, что ассоциативная n-арная операция является и полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *левой* (*правой*) *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}x) = x\ (\eta(xe_1 \ldots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной и правой нейтральной.

Элемент e n-арного группоида $< A, \eta >$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\eta(x\underbrace{e \dots e}_{n-1}) = \eta(ex\underbrace{e \dots e}_{n-2}) = \dots = \eta(\underbrace{e \dots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e \dots e}_{n-1}x) = x.$$

Определение 1.1 [1]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\,\sigma,\,k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\,\sigma,\,k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$
$$\eta_{1,\,\sigma,\,k}(\dots \eta_{1,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \dots))).$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\,\sigma,\,k}$.

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ описывает следующая

Теорема 1.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \dots, l,$$
$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\ \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\eta(\dots$$
$$\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \dots))). \qquad (1.1)$$

Замечание 1.1. Если n-арная операция η ассоциативна, то (1.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 1.2 [1]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ ассоциативна.*

Теорема 1.3 [5]. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью; подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ не выполняется тождество*

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) = \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1}\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1})), \qquad (1.2)$$

то есть l-арная операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ не является полуассоциативной.

Замечание 1.2. Ясно, что в теореме 1.3 левую нейтральную последовательность можно заменить нейтральной последовательностью.

Лемма 1.1 [3]. *Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) *f_σ – биекция*;

2) *для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \to (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \dots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ *для любого $i \geq 2$*;

4) *если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_{k})$, то* $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) *если $< A, * >$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $< A^k, * >$ с операцией*

$$\mathbf{x} * \boldsymbol{y} = (x_1, \dots, x_k) * (y_1, \dots, y_k) = (x_1 * y_1, \dots, x_k * y_k).$$

Утверждение 5) леммы 1.1 обобщается следующей леммой.

Лемма 1.2. *Если в условиях леммы* 1.1 $< A, \eta >$ – *n-арный группоид, то* f_σ – *автоморфизм n-арного группоида* $< A^k, \eta >$ *с n-арной операцией* η, *которая определяется покомпонентно с помощью операции* η:

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = (\eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, \eta(x_{1k} \ldots x_{nk})).$$

Доказательство. Так как

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} = (\eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})))^{f_\sigma} =$$
$$= (u_1 = \eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, u_k = \eta(x_{1k} \ldots x_{nk}))^{f_\sigma} =$$
$$= (u_{\sigma(1)} = \eta(x_{1\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma(1)}), \ldots, u_{\sigma(k)} = \eta(x_{1\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma(k)})) =$$
$$= \eta((x_{1\sigma(1)}, \ldots, x_{1\sigma(k)}) \ldots (x_{n\sigma(1)}, \ldots, x_{n\sigma(k)})) = \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} = \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то есть f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$. Лемма доказана.

Замечание 1.3. Ясно, что для n-арного группоида $< A, \eta >$ n-арная операция, определённая на декартовой степени A^k покомпонентно с помощью n-арной операции η и обозначаемая тем же символом η, совпадает с n-арной операцией $\eta_{1, \varepsilon, k}$, где ε – тождественная подстановка. Поэтому, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то по теореме 1.2 $< A^k, \eta >$ – n-арная полугруппа.

Лемма 1.3 [3]. *Пусть множество A содержит более одного элемента,* $k \geq 2$, σ *и* τ – *подстановки из* $\mathbf{S}_k$. *Если* $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ *для любого* $\mathbf{x} \in A^k$, *то* $\sigma = \tau$.

2 Основные результаты

Согласно теореме 1.3, если n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает левой нейтральной последовательностью, и для подстановки σ верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$, то в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ не выполняется тождество (1.2), которое при $i = l$ является одним из следующих тождеств

$$\eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}) =$$
$$= \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1})\mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}),\ i = 2, \ldots, l, \qquad (2.1)$$

определяющих ассоциативность l-арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

В связи с этим возникает естественный

Вопрос 2.1. Существуют ли в классе всех l-арных группоидов вида $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ l-арные группоиды, в которых не выполняются все тождества (2.1)?

Пример 2.1. Положим в определении 1.1: $A = \mathrm{R}$, η – тернарная операция, производная от операции умножения действительных чисел;

$$n = 3,\ s = 1,\ k = 3,\ \sigma = (132) \in \mathbf{S}_3.$$

Так как $(132)^3$ – тождественная подстановка, то $(132)^3 \neq (132)$.

Ясно, что $< \mathrm{R}, \eta >$ – тернарная полугруппа.

Определим на R^3 тернарную операцию

$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1, (132), 3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) =$$
$$= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)}), \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)}), \eta(x_3 y_{\sigma(3)} z_{\sigma^2(3)})) =$$
$$= (\eta(x_1 y_3 z_2), \eta(x_2 y_1 z_3), \eta(x_3 y_2 z_1)).$$

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ – те же, что и выше,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Согласно определению 1.1,

$$\eta_{1, (132), 3}(\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (132), 3}((\eta(x_1y_3z_2), \eta(x_2y_1z_3), \eta(x_3y_2z_1))\mathbf{uv}) =$$
$$= (\eta(x_1y_3z_2u_3v_2), \eta(x_2y_1z_3u_1v_3), \eta(x_3y_2z_1u_2v_1)),$$
$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x}(\eta(y_1z_3u_2), \eta(y_2z_1u_3), \eta(y_3z_2u_1))\mathbf{v}) =$$
$$= (\eta(x_1y_3z_2u_1v_2), \eta(x_2y_1z_3u_2v_3), \eta(x_3y_2z_1u_3v_1)),$$
$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xy}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{zuv})) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xy}(\eta(z_1u_3v_2), \eta(z_2u_1v_3), \eta(z_3u_2v_1)) =$$
$$= (\eta(x_1y_3z_2u_1v_3), \eta(x_2y_1z_3u_2v_1), \eta(x_3y_2z_1u_3v_2)).$$

Если $x_1 = y_3 = z_2 = v_2 = 1$, $u_3 \neq u_1$, то

$$\eta_{1, (132), 3}(\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}).$$

Если $x_1 = y_3 = z_2 = u_3 = u_1 = 1$, $v_2 \neq v_3$, то

$$\eta_{1,\,(132),\,3}(\eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{xy}\eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{zuv})).$$

Если $x_1 = y_3 = z_2 = u_1 = 1$, $v_2 \neq v_3$, то

$$\eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{x}\eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) \neq \eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{xy}\eta_{1,\,(132),\,3}(\mathbf{zuv})).$$

В примере 2.1 тернарная полугруппа $< A = \mathrm{R}, \eta >$ обладает единицей, и для подстановки (132) верно неравенство $(132)^3 \neq (132)$. При этом в тернарном группоиде $< \mathrm{R}^3, \eta_{1,\,(132),\,3} >$ не выполняются все тождества вида (2.1).

Покажем, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ единицы является достаточным условием для невыполнимости всех тождеств (2.1). Утверждение о невыполнимости тождества (1.2) ($i = l$ в тождествах (2.1)) содержится в следующем следствии, вытекающем из теоремы 1.3.

Следствие 2.1. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, обладающая единицей; подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ не выполняется тождество* (1.2).

Для получения положительного ответа на сформулированный выше вопрос нам понадобится

Лемма 2.1. *Если e – единица (идемпотент) n-арного группоида $< A, \eta >$, то*

$$\mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k})$$

– единица (идемпотент) n-арного группоида $< A^k, \eta >$.

Доказательство. Пусть e – единица n-арного группоида $< A, \eta >$. Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in A^k,$$

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{n-i}) = (y_1, y_2, \ldots, y_k),\ i \in \{2, \ldots, n\}.$$

Так как в n-арном группоиде $< A^k, \eta >$ n-арная операция η определена покомпонентно с помощью n-арной операци η n-арного группоида $< A, \eta >$, то

$$y_j = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{i-1}x_j\underbrace{e\ldots e}_{n-i}).$$

А так как e – единица n-арного группоида $< A, \eta >$, то $y_j = x_j$. Следовательно,

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{i-1}\mathbf{x}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{n-i}) = \mathbf{x},$$

а это означает, что $\mathbf{e}$ – единица n-арного группоида $< A^k, \eta >$.

Если e – идемпотент, то положив

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{n}) = (z_1, z_2, \ldots, z_k),$$

получим

$$z_j = \eta(\underbrace{e\ldots e}_{n}).$$

А так как e – идемпотент n-арного группоида $< A, \eta >$, то $z_j = e$. Следовательно,

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{n}) = \mathbf{e},$$

а это означает, что $\mathbf{e}$ – идемпотент n-арного группоида $< A^k, \eta >$. Лемма доказана.

Следующая теорема даёт положительный ответ на вопрос 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая единицей; подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ для любого $i \in \{2, \ldots, l\}$ не выполняется тождество* (2.1).

Доказательство. Если предположить выполнимость в A тождества из условия теоремы, то

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}}\eta(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-i-1}}\mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-i}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l-i+1}} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}),$$

откуда

$$\eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$
$$= \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{f_\sigma^{i-2}}\mathbf{x}_i^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}}\mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}\mathbf{x}_{l+1}^{f_\sigma^{l}} \ldots (\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}\mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^{i}} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}).$$

По условию теоремы в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ существует единица e. Если положить

$$\mathbf{x}_1 = \ldots = \mathbf{x}_{l+i-2} = \mathbf{x}_{l+i} = \ldots \mathbf{x}_{2l-2} = \mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k}),$$

то, в силу утверждения 4) леммы 1.1, последнее равенство принимает вид

$$\eta(\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l+i-2}\, \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}}\, \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-i}) = \eta(\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l+i-2}\, (\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}\, \underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{l-i}).$$

Так как, согласно лемме 2.1, $\mathbf{e}$ – единица n-арной полугруппы $< A^k, \eta >$, то

$$\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{i-1}} = (\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{i-1}}.$$

А так как согласно лемме 1.2, f_σ^{i-1} – автоморфизм n-арной полугруппы $< A^k, \eta >$, то из этого равенства следует равенство

$$\mathbf{x}_{l+i-1} = \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

которое равносильно равенству

$$\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

где ε – тождественная подстановка. В свою очередь, из этого равенства, в силу утверждения 3) леммы 1.1, следует

$$\mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\varepsilon} = \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_{\sigma^{l-1}}}.$$

Так как элемент $\mathbf{x}_{l+i-1}$ выбран в A^k произвольно, то, применив к полученному равенству лемму 1.3, получим $\varepsilon = \sigma^{l-1}$, то есть $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Следствие 2.1 получается из теоремы 2.1 при $i = l$.

Теоремы 1.2 и 2.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.2. *Если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая единицей, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда* $\sigma^l = \sigma$.

Полагая в теоремах 2.1 и 2.2 $n = 2$, получим следующие два следствия.

Следствие 2.2. *Пусть A – полугруппа с единицей, содержащая более одного элемента; подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ для любого $i \in \{2, \ldots, l\}$ не выполняется тождество*

$$[[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{l+1} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}[\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+l-1}]_{l,\sigma,k}\mathbf{x}_{i+l} \ldots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}.$$

Следствие 2.3. *Если A – полугруппа с единицей, содержащая более одного элемента, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда* $\sigma^l = \sigma$.

Замечание 2.1. В [5] установлено, что теорема 2.2 и следствие 2.3 останутся верными, если в них единицу заменить левой единицей.

Замечание 2.2. Установленная в примере 2.1 невыполнимость для тернарной операции $\eta_{1,(132),3}$ всех тождеств вида (2.1) является следствием теоремы 2.1, так как в тернарном группоиде $< \mathrm{R}^3, \eta >$ имеется единица.

Литература

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

3. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. Русаков, А.Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.

[1]Гомельский государственный

университет им. Ф. Скорины

[2]Могилевский государственный
университет продовольствия

Поступила в редакцию 15.09.2017