

in the Bhabha process / A.V. Gulov, V.V. Skalozub // Phys. Rev. D. – 2004. – Vol. 70. – P. 115010; Gulov, A.V. Hint of a Z-prime boson from the CERN LEP II data / A.V. Gulov, V.V. Skalozub // Phys. Rev. D. – 2007. – Vol. 76. – P. 075008; Gulov, A.V. Fitting of Z' parameters / A.V. Gulov, V.V. Skalozub // Int. J. Mod. Phys. A. – 2010. – Vol. 25. – P. 5787–5815.

5. Osland, P. Spin identification of the Randall – Sundrum resonance in lepton-pair production at the LHC / P. Osland, A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov and N. Paver // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 78 – P. 035008; Osland, P. Spin and model identification of Z' bosons at the LHC / P. Osland, A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov and N. Paver // Physical Review D. – 2009. – Vol. 79. – P. 115021; Osland, P. Sneutrino identification in dilepton events at the LHC / P. Osland, A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov and N. Paver // Physical Review D. – 2010. – Vol. 82. – P. 115017.

6. Abbiendi, G. Tests of the standard model and constraints on new physics from measurements of fermion pair production at 189-GeV to 209-GeV at LEP / G. Abbiendi *et al.* [OPAL Collab.] // Eur. Phys. J. C. – 2004. – Vol. 33. – P. 173–212; Abdallah, J. Measurement and interpretation of fermion-pair production at LEP energies above the Z resonance / J. Abdallah *et al.* [DELPHI Collab.] // Eur. Phys. J. C. – 2006. – Vol. 45. – P. 58–632.

**Е.А. Дей**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Беларусь**

## **ДВУХЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ УРАВНЕНИЯ СОЛПИТЕРА**

Для исследования свойств мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время применяется широкий набор методов и подходов, от нерелятивистских моделей до решеточных вычислений. Одним из способов учета релятивистских свойств кварков является одновременное приближение для уравнения Бете-Солпитера, приводящее к уравнению Солпитера [1].

Наиболее широко для численного решения уравнения Солпитера применяется вариационный метод по системе функций, построенных по полиномам Лагерра [2], и метод кубических В-сплайнов [3]. В данной работе уравнение Солпитера для состояний с квантовыми

числами  $0^+$  решается численно методом коллокации в базисе линейных конечных элементов.

Уравнение Бете-Солпитера для системы кварк-антикварк имеет общий вид [2–4]

$$(p_1 - m_1)\chi(p)(p_2 + m_2) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V(P, p, k)\chi(k) \quad (1)$$

где  $P, p$  – полный и относительный импульсы частиц в системе,  $V(P, p, k)$  – оператор взаимодействия,  $p_1 = \alpha_1 P + p$ ,  $p_2 = \alpha_2 P - p$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Для систем, состоящих из кварков одного аромата,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ .

Одновременное приближение для уравнения (1) означает, что ядро уравнения зависит только от трехмерных импульсов  $V \equiv V(\vec{p} - \vec{k})$ . Как следствие волновая функция Солпитера в системе центра масс  $\vec{P} = 0$ ,  $P = M$  определяется соотношением

$$\varphi(\vec{p}) = i \int \frac{dp_0}{2\pi} \chi(p). \quad (2)$$

В результате такого одновременного приближения теоретическое описание системы становится во многом аналогичным формализму квантовой механики в импульсном представлении.

Для описания кварк-антикваркового взаимодействия обычно используют суперпозицию потенциала одноглюонного обмена, запирающего потенциала, соответствующего линейному поведению в координатном представлении, и постоянной составляющей [4]

$$V(\vec{p} - \vec{k}) = \frac{4\pi\bar{\alpha}_s}{(\vec{p} - \vec{k})^2} \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\mu^{(2)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \frac{4\pi\lambda}{(\vec{p} - \vec{k})^2 + \varepsilon^2} \right) + u. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_s$  – константа одноглюонного обмена,  $\lambda$  – интенсивность запирающего взаимодействия,  $u$  – постоянная составляющая.

Учет квантовых чисел мезона выполняется разложением оператора взаимодействия по полной системе инвариантов алгебры Дирака и выделением в полной волновой функции скалярных амплитуд и множителей, определяющих ее трансформационные свойства. Так, для состояния  $0^+$  волновая функция имеет общую структуру [4]

$$\varphi(\vec{p}) = \varphi_1(p)\gamma^5 + \varphi_2(p) \left( \gamma^0 \gamma^5 + \gamma^5 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{m} \right), \quad (4)$$

Для скалярных функций  $\psi_1(p) = p\varphi_1(p)$ ,  $\psi_2(p) = p\varphi_2(p)$  в результате парциального разложения оператора взаимодействия получается система интегральных уравнений с симметричными ядрами ( $\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ )

$$M\psi_1(p) = \left[ \frac{2\omega^2(p)}{m} + u \frac{m}{\omega(p)} \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \psi_2(p) + \frac{m}{\omega(p)} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} pk V_2(p, k) \psi_2(k);$$

(5)

$$M\psi_2(p) = m \left( 2 + \frac{u}{\omega(p)} \right) \psi_1(p) + \frac{m}{\omega(p)} \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^3} pk V_1(p, k) \psi_1(k).$$

и соответствующее условие нормировки

$$\frac{8}{m} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} \omega(p) \psi_1(p) \psi_2(p) = 2M. \quad (6)$$

Оператор взаимодействия в (5) содержит компоненты

$$V_1(p, k) = V_0^S(p, k) - 4V_0^V(p, k); \quad V_2(p, k) = V_0^S(p, k) - \frac{pk}{m^2} V_1^S(p, k) + 2V_0^V(p, k); \quad (7)$$

$$V_{0,1}^S(p, k) = \frac{8\pi^2 \lambda}{pk} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} Q_{0,1} \left( \frac{p^2 + k^2 + \varepsilon^2}{2pk} \right); \quad V_0^V(p, k) = \frac{8\pi^2 \bar{\alpha}_s}{pk} Q_0 \left( \frac{p^2 + k^2}{2pk} \right).$$

Величины  $V_0^S(p, k)$ ,  $V_1^S(p, k)$  и  $V_0^V(p, k)$  – элементы парциального разложения запирающей и одноглюонной компонент оператора взаимодействия (3), выражающиеся через функции Лежандра второго рода  $Q_0(z)$ ,  $Q_1(z)$ .

Для численного решения область изменения аргументов ограничивалась достаточно большим значением  $0 \leq p \leq p_{\max}$  и разбивалась на  $N$  равных конечных элементов. Искомые волновые функции выражались через функции формы  $F_i(p)$  конечных элементов

$$\psi_1(p) = \sum_{i=1}^N \psi_i F_i(p); \quad \psi_2(p) = \sum_{i=1}^N \psi_{N+i} F_i(p). \quad (8)$$

Преимущество метода конечных элементов состоит в том, что все интегралы вычисляются не от неизвестных функций  $\psi_1(k)$ ,  $\psi_2(k)$ , а от функций формы, имеющих простой явный вид, так что большинство интегралов может быть вычислено аналитически.

В соответствии с методом коллокаций, в каждом узле невязка точного и численного решения системы уравнений (5) должна обращаться в ноль. В качестве узлов коллокации использовались центральные точки конечных элементов. С учетом выражений (8) при этом получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных значений волновой функции в узлах конечных элементов. Полученная система линейных уравнений образует стандартную задачу на собственные значения  $M$  квадратной матрицы  $A$ , действующей на объединенный вектор  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,N}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,N})$ :

$$\sum_{j=1}^{2N} A_{i,j} \psi_j = M \psi_i; \quad i = 1..2N. \quad (9)$$

Для расчета элементов матрицы использовались программные

блоки, составленные в системе Mathcad. Собственные значения и собственные векторы вычислялись с помощью встроенных функций.

Для системы  $c\bar{c}$  (чармоний) параметры расчета подбирались по массе состояния  $1S$   $M_{\eta_c}=2,9803$  ГэВ [5]. Вычисленные значения массы последующих состояний при значениях  $r_{\max}=16$ ,  $N=200$ ,  $m_c=1,28$ ,  $u=0,042$ ,  $\alpha_s=0,288$ ,  $\lambda=0,28$  приведены в таблице 1. Там же приведены результаты расчетов массы  $b\bar{b}$ -системы (параметры расчета  $m_b=4,96$ ,  $u=-0,794$ ,  $\alpha_s=0,23$ ,  $\lambda=0,28$ ). Для сравнения в таблице 1 приведены также экспериментальные данные для спектра масс  $\eta_c$  [5] и результаты работы [6], в которой использована иная параметризация взаимодействия, для спектра  $\eta_b$ .

Таблица 1 – Спектр масс псевдоскалярных мезонов

Состояние	$M(\eta_c)$	$M(\eta_c)$ [5]	$M(\eta_b)$	$M(\eta_b)$ [6]
1S	2,980	2,9803	9,39	9,39
2S	3,642	3,637	9,94	9,95
3S	4,049		10,326	10,311
4S	4,353		10,645	

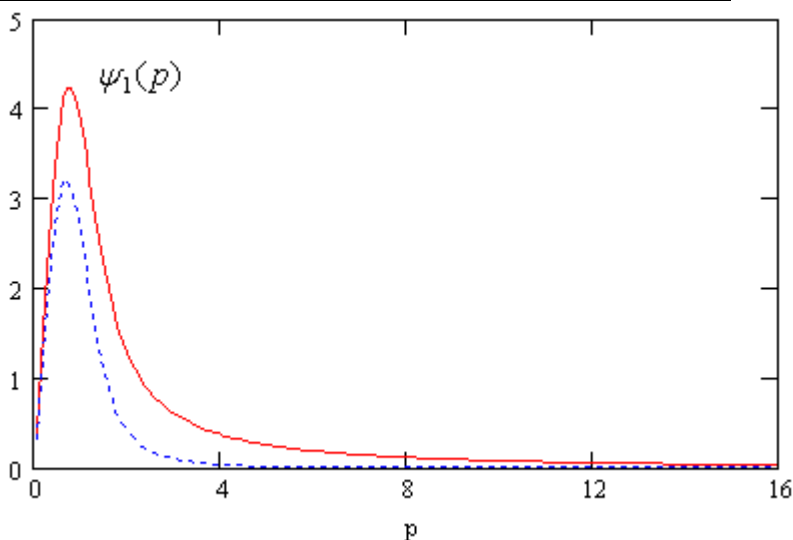


Рисунок 1 – График волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для  $\eta_c(2980)$

Собственный вектор  $\psi$ , вычисляемый из (9) для отдельного собственного значения, содержит компоненты обеих волновых функций. В качестве примера на рисунке 1 приведен график вычисленных волновых функций  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  для состояния  $\eta_c(1S)$ , нормированных в соответствии с условием (6).

Таким образом, метод коллокации по системе конечных элементов является удобным инструментом для численного решения уравнения Солпитера. Дальнейшее повышение точности численных результатов может быть достигнуто, во-первых, использованием конечных элементов высших порядков и, во-вторых, использованием эрмитовых

конечных элементов, обеспечивающих непрерывность не только волновой функции, но и ее первых производных.

### Литература

1. Salpeter, E.E. / E.E. Salpeter // Physical Review. – 1952. – Vol. 87 – P. 328.
2. Resag, J. / J. Resag, C.R.Münz // Nuclear Physics. – 1995. – Vol. A590. – P. 735.
3. Spence, J.L. / J.L. Spence, J.P.Vary // Physical Review. – 1993. – Vol. C47. – P. 1282.
4. Linde, J. / J. Linde, H. Snellman // Nuclear Physics. – 1977. – Vol. A619. – P. 346.
5. Nakamura, K. / K. Nakamura et.al. Particle Data Group. // Journal of Physics. – 2010. – Vol. G37.
6. Chang, C.-H. / C.-H. Chang, G.-L. Wang // arXiv.org, hep-ph/1003.3827.

**В.А. Длугунович, Ю.А. Курочкин, А.В. Холенков**

**Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Беларусь**

### **ВЕКТОР-ПАРАМЕТР Ф.И. ФЕДОРОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛЯРИЗАТОРОВ**

В работах [1–3] показано, что представление матрицы когерентности (поляризационной матрицы плотности) пучков электромагнитных волн как бикватерниона, соответствующего 4-вектору псевдоевклидова пространства, компонентами которого являются интенсивность и параметры Стокса, дает возможность ввести группу преобразований этих величин, изоморфную группе  $SO(3,1)$ . Данные преобразования являются подмножеством множества поляризационных матриц Мюллера, вообще говоря, образующих полугруппу с единицей. Сужение полугруппы матриц Мюллера до группы преобразований открывает возможность использовать векторную параметризацию Ф.И. Федорова [4,5] преобразований группы  $SO(3,1)$  для интерпретации полярного разложения матриц Мюллера.

Как известно, матрица Мюллера  $M$  определяется как матрица, преобразующая набор параметров Стокса, объединенных в 4-вектор  $S$ , которые описывают поляризацию электромагнитной волны, либо пучка волн до ее (его) преобразования рассеивающим объектом, в набор параметров Стокса (4-вектор)  $S'$ , описывающих поляризацию рассеянного излучения так, что