МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ПОДГРУППАМИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В.Н. Тютянов[1], **П.В. Бычков**[2]

[1]*Международный университет «МИТСО», Гомель*
[2]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

FINITE GROUPS WITH NILPOTENT SUBGROUPS OF ODD ORDER

V.N. Tyutyanov[1], **P.V. Bychkov**[2]

[1]*International University «MITSO», Gomel*
[2]*F. Scorina Gomel State University*

Определены композиционные факторы конечной группы, у которой любая подгруппа нечетного порядка нильпотентна.

Ключевые слова: *конечная группа*, *простая неабелева группа*, *группа Шмидта.*

Composition factors of finite groups in which each subgroup odd order is nilpotent were defined.

Keywords: *finite group*, *simple non-abelian group*, *group Schmidt.*

Введение

Строение конечной группы в значительной мере зависит от класса подгрупп, которыми она обладает. Примером этого являются группы Шмидта, у которых любая собственная подгруппа нильпотентна, группы у которых все собственные подгруппы разрешимы и ряд других примеров. В настоящей работе рассматриваются конечные группы, у которых все подгруппы нечётного порядка нильпотентны. Данная задача была предложена авторам В.С. Монаховым. В разрешимом случае, в силу D_π-теоремы, задача решается тривиально. А именно, если G – разрешимая группа, с указанным выше свойством, то её $2'$-подгруппа является нильпотентной. В случае, когда группа G неразрешима, задача становится существенно сложнее. Нами доказан следующий результат.

***Теорема* 0.1**. *Пусть G – конечная группа, у которой все подгруппы нечётного порядка нильпотентны. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку*: $PSL_2(2^n), n \geq 2$; $PSL_2(q)$, *q – нечетное число, $q-1=2^k$, k – целое.* $PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$; $PSp_4(2^n), n \geq 2$; $Sz(2^{2n+1}), n \geq 1$.

1 Доказательство вспомогательного результата

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

***Лемма* 1.1.** *Пусть G – конечная простая неабелева группа, у которой все подгруппы нечётного порядка нильпотентны. Тогда группа G принадлежит следующему списку*: $PSL_2(2^n)$, $n \geq 2$; $PSL_2(q)$, *q – нечетное число, $q-1=2^k$, k – целое.* $PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$; $PSp_4(2^n), n \geq 2$; $Sz(2^{2n+1}), n \geq 1$.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $G \cong A_n, n \geq 5$.

При $n=5$ $G \cong A_5 \cong PSL_2(4) \cong PSL_2(5)$ и удовлетворяет условию леммы. При $n=6$ $G \cong A_6 \cong PSL_2(9)$ и удовлетворяет условию леммы.

Группа A_7 содержит подгруппу 7:3 и не удовлетворяет условию леммы.

Так как $A_k \subset A_{k+1}$ для всякого $k \geq 2$, то группы A_n при $n \geq 7$ не удовлетворяют условию леммы. В силу указанных изоморфизмов лемма для знакопеременных групп верна.

2. G – простая группа лиевского типа.

(1) $G \cong PSL_n(q)$, где $n \geq 2$, $q=p^k$, p – простое число.

Пусть $p=2$. Рассмотрим случай $n=2$. Группа $SL_2(2^2)$ удовлетворяет условию леммы. Из [1, теорема II. 8.27] следует, что подгруппы в G, неудовлетворяющие условию теоремы, могут содержаться только в $SL_2(2^d)$, где d делит k. Математической индукцией по 2^m легко показать, что группа $SL_2(2^k)$ удовлетворяет условию леммы для всех $k \geq 2$.

Пусть $n=3$. Группа $PSL_3(2)$ содержит подгруппу 7:3 и не удовлетворяет условию леммы. Поскольку $PSL_3(2)$ содержится в $PSL_3(2^m)$ для всех $m>2$, то группа $PSL_3(2^k)$ не удовлетворяет условию леммы. Из вложений

$$SL_3(2^k) \subset SL_4(2^k) \subset \ldots \subset SL_n(2^k) \subset \ldots$$

следует, что группа $PSL_n(2^k)$ при $n \geq 3$ не удовлетворяет условию леммы.

Пусть $p > 2$. Рассмотрим случай $n = 2$. Группа $PSL_2(q)$ содержит подгруппу Бореля порядка $\frac{1}{2}q(q^2-1)$, являющуюся группой Фробениуса. Следовательно, $q - 1$ будет степенью числа 2. В этом случае либо $q = 3^2$, либо $q = p$ – простое число Ферма. Группа $PSL_2(3^2)$ удовлетворяет условию леммы. Рассмотрим случай, когда $G \cong PSL_2(p)$, где p – простое число Ферма. Из [1, теорема II.8.27] легко заключить, что $PSL_2(p)$ удовлетворяет условию леммы.

Пусть $n = 3$. В группе $PSL_3(q)$ существует тор T конечного порядка $\frac{1}{(3,q-1)}\frac{q^3-1}{q-1}$. Из работы [2] следует, что существует простое число r примитивное по отношению к паре $\{3k, p\}$ и $r \geq 3k+1$. В частности, $r \geq 5$ и $(r, q-1) = 1$. Поэтому r делит $|T|$. Так как $|N_G(T):T| = 3$, то $N_G(T)$ не удовлетворяет условию леммы. Из вложений

$$SL_3(q) \subset SL_4(q) \subset \ldots \subset SL_n(q) \subset \ldots$$

следует, что группа $PSL_n(q)$ при $n \geq 3$ не удовлетворяет условию леммы.

(2) $G \cong PSU_n$, где $n \geq 3$, $q = p^k$, p – простое число.

Пусть $p \geq 3$. Сначала рассмотрим случай $n = 3$. Порядок группы $PSU_3(q)$ равен $\frac{1}{d}q^3(q^3+1)$, где $d = (3, q+1)$. Группа $PSU_3(q)$ содержит два максимальных тора [3] порядков $\frac{1}{d}(q+1)^2$ и $\frac{1}{d}(q^2-q+1)$ нормализаторы которых соответственно изоморфны $\left[\frac{1}{d}(q+1)^2\right]:S_3$ и $\left[\frac{1}{d}(q^2-q+1)\right]:3$. Имеет место равенство $q^6 - 1 = = (q^3+1)(q^3-1)$ или $(p^{6k}-1) = (p^{3k}+1)(p^{3k}-1)$. Согласно работе [2] найдётся простое число r, примитивное по отношению к паре $\{6k, p\}$. Тогда $r \geq 7$ и поскольку r не делит $q^3 - 1$, то r делит $q^3 + 1$. Так как $q^3 + 1 = (q+1)(q^2 - q + 1)$, то r делит одно из чисел $q + 1$ или $q^2 - q + 1$. Таким образом, нормализатор одного из торов содержит нильпотентную подгруппу $R : B$, где R – силовская r-подгруппа соответствующего тора, а $B \cong Z_3$. Поэтому $PSU_3(q)$ не удовлетворяет условию леммы. Из соответствующих вложений см. [4] следует, что при нечётных q группы $PSU_n(q)$ не удовлетворяют условию леммы.

Пусть $p = 2$. Рассмотрим случай $n = 3$. Так как группа $PSU_3(2)$ разрешима, то она не удовлетворяет условию леммы. Из [5] следует, что группа $PSU_4(2)$ удовлетворяет условию леммы, а $PSU_5(2)$ – не удовлетворяет, поскольку содержит подгруппу $PSL_2(5^2)$. Следовательно, в серии $PSU_n(2)$ только $PSU_4(2)$ удовлетворяет условию леммы и $PSU_3(q) \cong PSU_3(2^k)$, где $k \geq 2$. Имеет место равенство: $q^6 - 1 = (q^3+1)(q^3-1)$ или $(2^{6k}-1) = (2^{3k}+1)(2^{3k}-1)$. Так как $k \geq 2$, то из работы [2] следует, что существует число r, примитивное по отношению к паре $\{6k, 2\}$ и $r \geq 13$. Теперь, как в случае с $p \geq 3$, показывается, что группа $PSU_n(q)$, $n \geq 3$ и $q = 2^k$ $(k \geq 2)$ не удовлетворяет условию леммы.

(3) $G \cong Sz(2^{2k+1})$, $k \geq 1$.

Подгруппы групп Судзуки описаны в [6]. Из [6] следует, что разрешимые подгруппы удовлетворяют условию леммы. Неразрешимые подгруппы могут быть только группы $Sz(2^{2m+1})$, где 2^{2k+1} является степенью числа 2^{2m+1}. Индукцией по 2^{2n+1} легко доказать, что группы $Sz(2^{2k+1})$ удовлетворяют условию леммы.

(4) $G \cong PSp_{2n}(q)$, $n \geq 2$, $q = p^k$.

Пусть сначала $n = 2$. Предположим, что p нечётное простое число. Параболическая подгруппа в $PSp_4(q)$ содержит секцию, изоморфную $PSL_2(q)$. Согласно [3] $PSp_4(q)$ содержит подгруппу $PSL_2(q^2)$. Из (1) следует, что $q - 1$ и $q^2 - 1$ являются степенями числа 2. Это возможно только при $q = 3$ и, таким образом, $G \cong PSp_4(3) \cong PSU_4(2)$ удовлетворяет условию леммы.

Пусть $p = 2$. Согласно [3] G может содержать только следующие подгруппы: параболические порядка $q^4(q-1)(q^2-1)$, группы вида $(SL_2(q)*SL(q)):2$, группы $PSL_2(q^2):2$, группы $PSp_4(q_0)$, где q_0 делит q, и группы Судзуки. Все они удовлетворяют условию леммы. Так как группа $PSp_4(2)$ не является простой, то все группы $PSp_4(2^k)$ при $k \geq 2$ удовлетворяют условию леммы.

Из диаграммы Дынкина легко увидеть, что при $n > 3$ группа G содержит секцию $PSL_3(q)$, которая, в силу (1), не удовлетворяет условию леммы. Поэтому при $n \geq 3$ группы $PSp_n(q)$ не удовлетворяет условию леммы.

(5) $G \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 1$, $q = p^k$.

Так как $P\Omega_3(q) \cong PSL_2(q)$, $P\Omega_5(q) \cong PSp_4(q)$, то $n \geq 3$. Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит секцию $PSL_3(q)$, что невозможно в силу (1).

(6) $G \cong {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2k+1}$, $k \geq 1$.

Группа G содержит подгруппу Бореля $q^3:(q-1)$. Если $q - 1 = 2^\alpha$, то $3^{2k+1} = 2^\alpha + 1$. Это равенство выполняется только при $k = 0$. Так как $k \geq 1$, то найдётся нечётный простой делитель $r > 3$ числа $q - 1$. Следовательно, подгруппа Бореля не удовлетворяет условию леммы.

(7) $G \cong G_2(q)$.

Из [4] следует, что G обладает подгруппой $A_2(q)$. Последнее невозможно в силу (1).

(8) $G \cong {}^3G_4(q^3)$.

Из [4] следует, что G обладает подгруппой $G_2(q)$. Последнее невозможно в силу (7).

(9) $G \cong E_8(q)$.

Из диаграммы Дынкина следует, что $E_8(q)$ обладает подгруппой с секцией изоморфной $PSL_3(q)$. Из (1) заключаем, что G не удовлетворяет условию леммы.

(10) $G \cong E_7(q)$.

Рассматривается так же, как (9).

(11) $G \cong D_l(q) = PSL^{+}_{2l}(q), l \geq 4$.

Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит максимальную параболическую подгруппу, обладающую секцией $PSL_{l-1}(q)$. Так как $l \geq 4$, то из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

(12) $G \cong {}^2D_l(q) = PSL^{-}_{2l}, l \geq 4$.

Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит параболическую подгруппу с секцией $PSL_3(q)$. Из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

(13) $G \cong E_6(q)$.

Рассматривается также как (9).

(14) $G \cong {}^2E_6(q)$.

Из диаграммы Дынкина следует, что G содержит параболическую подгруппу с секцией $PSL_3(q)$. Из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

(15) $G \cong F_4(q)$.

Из диаграммы Дынкина видно, что G обладает параболической подгруппой с секцией $PSL_3(q)$. Из (1) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

(16) $G \cong {}^2F_4(q), q = 2^{2k+1}, k \geq 0$.

При $k = 0$ $G \cong {}^2F_4(2)'$. Из [5] следует, что G обладает подгруппой $PSL_2(5^2)$. Из (1) заключаем, что ${}^2F_4(2)'$ не удовлетворяет условию леммы. Следовательно, $k \geq 1$. В этом случае G содержит подгруппу $PGU_3(q)$. Так как $k \geq 1$, то из (2) следует, что G не удовлетворяет условию леммы.

3. G – простая спорадическая группа.

Из [5] следует, что группа M_{11} имеет подгруппу 11 : 5 и, следовательно, не удовлетворяет условию леммы. Данная группа [5] вкладывается в следующие группы: M_{12}, M_{23}, HS, M_{24}, M^cL, Suz, $O'N$, Co_3, Co_2, Fi_{22}, HN, Ly, Fi_{23}, Co_1, Y_4, Fi_{24}', B, M. Следовательно, все они не удовлетворяют условию леммы. Из [5] следует, что оставшиеся группы обладают подгруппами: J_1 – 7 : 3, M_{22} – 7 : 3, J_2 – 7 : 3, J_3 – 19 : 9, He – 7 : 3, Ru – 7 : 3, Th – 31 : 15; и, таким образом, не удовлетворяют условию леммы. □

2 Доказательство основного результата

Доказательство теоремы. Пусть G – минимальный контрпример к теореме. Если G – простая неабелева группа, то, в силу леммы, она принадлежит списку простых неабелевых композиционных факторов группы G. Пусть $N \triangleleft G$. Тогда N и G / N удовлетворяют условию теоремы. Следовательно, G удовлетворяет условию теоремы, что невозможно. □

Непосредственно из теоремы получаем следующий результат.

***Следствие* 2.1**. *Пусть G – конечная группа без подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку*: $PSL_2(2^n), n \geq 2$; $PSL_2(q)$, q – *нечетное число*, $q - 1 = 2^k$, k – *целое.* $PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$; $PSp_4(2^n)$, $n \geq 2$; $Sz(2^{2n+1}), n \geq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert*, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg New York: Springer, 1967. – 793 s.
2. *Zsigmondy*, *K*. Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monath. Math. Phis. – 1892. – Vol. 3. – S. 265–284.
3. *Mitchell*, *H.H*. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207–242.
4. *Stensholt*, *E*. Certain embedding finite group of Lie type / E. Stensholt // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 136–187.
5. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.]. – London: Clarendon, 1985. – 252 p.
6. *Suzuki*, *M*. On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. – Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

Поступила в редакцию 20.06.18.