УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68
EDN: VYPYFH

# СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СОВМЕСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ФУРЬЕ

**А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач**

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

# EXISTENCE AND UNIQUENESS OF CONSISTENT HERMITE – FOURIER APPROXIMATIONS

**A.P. Starovoitov, E.P. Kechko, T.M. Osnach**

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Определены тригонометрические аналоги алгебраических аппроксимаций Эрмита – Паде – аппроксимации Эрмита – Фурье. В частности, доказана теорема о существовании аппроксимаций Эрмита – Фурье, получено достаточное условие их единственности, а также установлен критерий существования и единственности многочленов Эрмита – Фурье, являющихся числителем и знаменателем аппроксимаций Эрмита – Фурье, ассоциированных с произвольным набором из $k$ тригонометрических рядов. При выполнении условий критерия установлен явный вид указанных многочленов.

**Ключевые слова:** *тригонометрические ряды*, *суммы Фурье*, *тригонометрические аппроксимации Паде*, *многочлены Эрмита – Паде*, *аппроксимации Эрмита – Паде*.

**Для цитирования:** *Старовойтов*, *А.П.* Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68. – EDN: VYPYFH

**Abstract.** The trigonometric analogues of algebraic Hermite – Padé approximations were defined, these are Hermite – Fourier approximations. In particular, the theorem of existence of Hermite – Fourier approximations was proved, the sufficient condition of their uniqueness was obtained, and the criterion of the existence and uniqueness of Hermite – Fourier polynomials, which are the numerator and denominator of Hermite – Fourier approximations associated with an arbitrary set of trigonometric series $k$. When the conditions of the criterion were met, the explicit type of the specified polynomials was established.

**Keywords:** *trigonometric series*, *Fourier sums*, *trigonometric Padé approximants*, *Hermite – Padé polynomials*, *Hermite – Padé approximations*.

**For citation:** *Starovoitov*, *A.P.* Existence and uniqueness of consistent Hermite – Fourier approximations / A.P. Starovoitov, E.P. Kechko, T.M. Osnach // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 68–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_68 (in Russian). – EDN: VYPYFH

## Введение

В своей знаменитой работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа $e$, Ш. Эрмит впервые определил многочлены и рациональные дроби, ассоциированные с системой экспонент, которые в сложившейся терминологии принято называть многочленами и аппроксимациями Эрмита – Паде. В дальнейшее развитие эрмитовского направления в теории чисел существенный вклад внёс К. Малер [2]–[4]. Именно с появлением работ К. Малера началось интенсивное и систематическое изучение свойств многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде в связи с приложениями их в теории диофантовых приближений. В настоящее время теория аппроксимаций Эрмита – Паде превратилась в полне самостоятельный раздел комплексного анализа, а сами аппроксимации нашли разнообразные применения в различных областях теоретической и прикладной математики, математической физики (см., например, [5]–[13]).

Многочлены Эрмита – Паде, ассоциированные с произвольной системой функций, определяются как решение следующей задачи [6, гл. 4; § 3, задача A]. Пусть $\mathbf{f}=(f_1,...,f_k)$ – набор, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j=1,2,...,k \qquad (0.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество $k$-мерных мультииндексов, т. е. упорядоченных $k$ целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m}=(m_1,...,m_k)$ – это сумма $m=m_1+...+m_k$. Зафиксируем индекс $n\in\mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m}=(m_1,\ldots,m_k)\in\mathbb{Z}_+^k$.

***Задача* A**. *Найти тождественно не равный нулю многочлен* $Q_m(z)=Q_{n,\vec{m}}(z;\mathbf{f})$, $\deg Q_m \leqslant m$ *и* *такие многочлены* $P^j_{n_j}(z)=P^j_{n,\vec m}(z;\mathbf{f}),\ \deg P^j_{n_j}\leqslant n_j$, $n_j=n+m-m_j$, *чтобы для* $j=1,\dots,k$

$$R^j_{n,\vec m}(z):=Q_m(z)f_j(z)-P^j_{n_j}(z)=l_j\ z^{n+m+1}+\ \dots\ . \quad (0.2)$$

Многочлены $Q_m(z),\quad P^1_{n_1}(z),\dots,P^k_{n_k}(z)$, являющиеся решением задачи **A** (решение задачи **A** всегда существует), принято называть *многочленами Эрмита – Паде*, а рациональные дроби $\pi^j(z)=P^j_{n_j}(z)/Q_m(z),\quad j=1,\dots,k$ – *аппроксимациями Эрмита – Паде* для набора **f**.

Для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^k$, где $\lambda_j$ – различные не равные нулю комплексные числа, явный вид решений задачи **A** найден Эрмитом [1] (см. также [6, гл. 4; § 2]). При $k=1$ (в этом случае **f** состоит из одной функции $f(z):=f_1(z)$) решение поставленной задачи было получено Паде [5], который нашел явный вид многочленов $Q_m(z),\quad P_n(z):=P^1_{n,m}(z;f)$ (их принято называть многочленами Паде, а дроби $\pi_{n,m}(z)=P_n(z)/Q_m(z)$ – аппроксимациями Паде для *f*): если $f_i:=f^1_i$, $i=0,1,\dots$, то [5, гл. 1 , § 1.1, теорема 1.1.1]

$$Q_m(z)=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n & f_{n+1}\\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m}\\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1\end{vmatrix}. \quad (0.3)$$

В общем случае решение задачи **A** получено в работах [14], [15], где, в частности, найдены необходимые и достаточные условия, при которых задача **A** имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) решение, и при выполнении этих условий получены явные детерминантные представления многочленов, при $k=1$ совпадающие с представлениями Паде (0.3).

В данной работе рассмотрим аналогичную задачу в тригонометрическом случае. Нашей целью является обобщение таких хорошо известных понятий, как частная сумма тригонометрического ряда, многочлен Паде – Фурье и аппроксимация Паде – Фурье функции, представленной тригонометрическим рядом, а также нахождение необходимых и достаточных условий, при которых соответствующие тригонометрические многочлены и аппроксимации существуют и единственны, получение для них детерминантных представлений, аналогичных алгебраическому случаю.

## 1 Многочлены и аппроксимации Эрмита – Фурье

Пусть $\mathbf{f^t}=(f^t_1,\dots,f^t_k)$ – набор, вообще говоря, формальных тригонометрических рядов

$$f^t_j(x)=\frac{a^j_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}\left(a^j_l\cos lx+b^j_l\sin lx\right),\qquad (1.1)$$
$$j=1,2\dots,k$$

с действительными коэффициентами. Зафиксируем индекс $n\in\mathbb{Z}^1_+$ и мультииндекс

$$\vec m=(m_1,\dots,m_k)\in\mathbb{Z}^k_+$$

и рассмотрим следующую задачу:

***Задача*** $\mathbf{A^t}$. *Для набора тригонометрических рядов* (1.1) *найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен*

$$Q^t_m(x)=Q^t_{n,\vec m}(x;\mathbf{f^t}),\ \ \deg Q^t_m\leqslant m$$

*и такие тригонометрические многочлены* $P^t_j(x)=P^t_{n_j,n,\vec m}(x;\mathbf{f^t}),\quad \deg P^t_j\leqslant n_j,\quad n_j=n+m-m_j$, *чтобы для* $j=1,\dots,k$

$$R^t_j(x)=R^t_{j,n,\vec m}(x;\mathbf{f^t}):=Q^t_m(x)f^t_j(x)-P^t_j(x)=$$
$$=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}\left(\tilde a^j_l\cos lx+\tilde b^j_l\sin lx\right),\quad j=1,2\dots,k,\ (1.2)$$

*где* $\tilde a^j_l,\ \tilde b^j_l$, *как и коэффициенты тригонометрических многочленов* $Q^t_m(x),\quad P^t_j(x)$ *являются, вообще говоря, комплексными числами.*

Очевидно, что многочлены $Q^t_m(x),\quad P^t_j(x)$ условиями (1.2) определяются не однозначно: если пара $(Q^t_m,P^t)$, где $P^t:=(P^t_1,\dots,P^t_k)$, удовлетворяет условиям (1.2), то для любого отличного от нуля комплексного числа $\lambda$ новая пара $(\lambda Q^t_m,\lambda P^t)$, где $\lambda P^t:=(\lambda P^t_1,\dots,\lambda P^t_k)$, также им удовлетворяет. На самом деле неединственность может быть и более существенной. Приведем подтверждающий пример.

***Пример*** **1.1.** Пусть $k=1,\ n=2,\ m=1,$ а

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}a_l\cos lx\ ,$$

где

$$a_l=\begin{cases}2, & \text{если } l=1,2,3;\\ 4, & \text{если } l=4;\\ \dfrac{1}{l!}, & \text{если } l>4.\end{cases}$$

Тогда любое решение задачи $\mathbf{A^t}$ представимо в виде: $(\lambda Q^t_1,\lambda P^t_1),\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad \lambda\neq 0$, где полиномы $Q^t_1(x),\quad P^t_1(x)$ в комплексной форме записи определяются равенствами

$$Q^t_1(x)=ae^{-ix}-\frac{a+b}{2}+be^{ix},$$
$$P^t_1(x)=\frac{a+3b}{2}e^{-i2x}+\frac{b-a}{2}e^{-ix}+$$
$$+a+b+\frac{a-b}{2}e^{ix}+\frac{3a+b}{2}e^{i2x},$$

в которых *a* и *b* – произвольные действительные числа не равные нулю одновременно, $i=\sqrt{-1}$.

***Определение* 1.1.** *Будем говорить, что задача* $\mathbf{A^t}$ *имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т. е. для любых двух решений* $(\overline{Q^t}_m, \overline{P^t})$ *и* $(\widehat{Q^t}_m, \widehat{P^t})$ *задачи* $\mathbf{A^t}$ *найдется такое комплексное число* $\lambda$, *что*

$$(\overline{Q^t}_m, \overline{P^t}) = (\lambda \widehat{Q^t}_m, \lambda \widehat{P^t}).$$

***Определение* 1.2.** *Если пара* $(Q_m^t, P^t)$, *где* $P^t = (P_1^t, \ldots, P_k^t)$, *является решением задачи* $\mathbf{A^t}$ *с индексом* $n \in \mathbb{Z}_+^1$ *и мультииндексом*

$$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

*то многочлены* $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, $\ldots$, $P_k^t(x)$ *и рациональные дроби*

$$\pi_j^t(x) = \pi_{j,n,\vec{m}}^t(x; \mathbf{f^t}) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \quad j = 1, 2 \ldots, k$$

*будем называть, соответственно, многочленами Эрмита – Фурье и аппроксимациями Эрмита – Фурье (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для набора* $\mathbf{f^t}$ *формальных степенных рядов* (1.1).

Если задача $\mathbf{A^t}$ имеет единственное решение, то условиями (1.2) аппроксимации Эрмита – Фурье $\left\{\pi_j^t(x)\right\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. В частности, при $k = 1$ достаточное условие единственности решения задачи $\mathbf{A^t}$ найдено в работе [16]: для единственности достаточно, чтобы определитель $\Delta^1(n,m) \neq 0$ (определение $\Delta^1(n,m)$ см. далее). При этом условии в [16] найдены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, аналогичные формулам Паде (0.3). В случае $k = 1$ определенные нами аппроксимации Эрмита – Фурье называют также *тригонометрическими аппроксимациями Паде* или *аппроксимациями Паде – Фурье* (см. [5], [16]).

Укажем на одно важное отличие тригонометрических $\pi_{n,m}^t(x) := P_1^t(x) / Q_m^t(x)$ и алгебраических $\pi_{n,m}(z)$ аппроксимаций Паде. Известно [6, гл. 2, § 1], что для любой пары индексов $(n,m)$, $n,m \in \mathbb{N}$, алгебраические аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$ определяются однозначно. В тригонометрическом случае это не так. Такое заключение можно сделать, опираясь на пример 1.1. Обозначим через $\pi_{2,1}^{t,1}(x)$ тригонометрическую аппроксимацию Паде из примера 1.1, которая соответствует параметрам $a = b = 1$, а через $\pi_{2,1}^{t,2}(x)$ – тригонометрическую аппроксимацию Паде, которая соответствует параметрам $a = 2$, $b = 0$. Тогда получим

$$\pi_{2,1}^{t,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \neq \frac{-2-6i}{5} = \pi_{2,1}^{t,2}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий, при выполнении которых для набора $\mathbf{f^t}$ и фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекса

$$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

задача $\mathbf{A^t}$ имеет единственное решение и, следовательно, аппроксимации Эрмита – Фурье определяются однозначно.

## 2 Критерий единственности решения задачи $\mathbf{A^t}$

Запишем ряды (1.1) и полиномы $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \; j = 1, \ldots, k; \tag{2.1}$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^{m} u_p e^{ipx}, \tag{2.2}$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx},$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, а $c_0^j = \dfrac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \dfrac{a_l^j - b_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \overline{c}_l^{\,j}$, $j = 1, \ldots, k$; $l = 1, 2, \ldots$.

Тогда равенства (1.2) примут вид

$$R_j^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} \left(\tilde{c}_l^{\,j} e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^{\,j} e^{-ilx}\right). \tag{2.3}$$

Введём в рассмотрение матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$, считая, без ограничения общности, что ряды (2.1) сходятся при любом $x \in \mathbb{R}$ и, тем самым, определяют систему $\mathbf{f^t} = \{f_1^t(x), \ldots, f_k^t(x)\}$, состоящую из $2\pi$-периодических функций, определенных на всей действительной прямой.

Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j = (c_{l+m}^j \;\; c_{l+m-1}^j \;\ldots\; c_{l+1}^j \;\; c_l^j \;\; c_{l-1}^j \;\ldots\; c_{l-m+1}^j \;\; c_{l-m}^j),$$
$$j = 1, \ldots, k;$$

а действительному числу $x$ – матрицу-строку

$$E_m^t(x) = (e^{-imx} \;\; e^{-i(m-1)x} \;\ldots\; e^{-ix} \;\; 1 \;\; e^{ix} \;\ldots\; e^{i(m-1)x} \;\; e^{imx}).$$

Для заданного $j \in \{1, \ldots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса

$$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$$

в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} c^j_{n_j+m+m_j} & c^j_{n_j+m+m_j-1} & \cdots & c^j_{n_j-m+m_j} \\ c^j_{n_j+m+m_j-1} & c^j_{n_j+m+m_j-2} & \cdots & c^j_{n_j-m+m_j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^j_{n_j+m+1} & c^j_{n_j+m} & \cdots & c^j_{n_j-m+1} \end{pmatrix},$$

$$F^j_- := \begin{bmatrix} \mathbb{C}^j_{-n_j-1} \\ \mathbb{C}^j_{-n_j-2} \\ \vdots \\ \mathbb{C}^j_{-n_j-m_j} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} c^j_{-n_j+m-1} & c^j_{-n_j+m-2} & \cdots & c^j_{-n_j-m-1} \\ c^j_{-n_j+m-2} & c^j_{-n_j+m-3} & \cdots & c^j_{-n_j-m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^j_{-n_j+m-m_j} & c^j_{-n_j+m-m_j-1} & \cdots & c^j_{-n_j-m-m_j} \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n,\vec{m};x) =$$

$$= \det\left[F^k_+ \ \ldots \ F^2_+ \ F^1_+ \ E^t_m(x) \ F^1_- \ F^2_- \ \ldots \ F^k_-\right]^T :=$$

$$:= \det\begin{bmatrix} F^k_+ \\ \vdots \\ F^1_+ \\ E^t_m(x) \\ F^1_- \\ \vdots \\ F^k_- \end{bmatrix}.$$

В случае, если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n,\vec{m};x)$ не содержит блок-матрицы $F^j_\pm$. Обозначим через $H^t_{n,\vec{m}}$ матрицу порядка $2m\times(2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n,\vec{m};x)$ после удаления в нём $(m+1)$-ой строки $E^t_m(x)$. Если в определителе $D(n,\vec{m};x)$ строку $E^t_m(x)$ заменить на строку $\mathbb{C}^j_l$, получим новый определитель $d^j_l(n,\vec{m})$. Обозначим через $\Delta^k(n,\vec{m})$ определитель порядка $2m$, полученный в результате вычёркивания в определителе $D(n,\vec{m};x)$ $(m+1)$-ой строки и $(m+1)$-го столбца.

***Определение* 2.1.** *Индекс* $(n,\vec{m})\in\mathbb{Z}^{k+1}_+$, $\vec{m}\neq(0,\ldots,0)$ *будем называть слабо нормальным для системы* $\mathbf{f^t}$, *если ранг матрицы* $H^t_{n,\vec{m}}$ *максимальный*, *т. е. равен* $2m$.

***Определение* 2.2.** *Систему* $\mathbf{f^t}$ *назовём слабо совершенной*, *если все индексы* $(n,\vec{m})\in\mathbb{Z}^{k+1}_+$, $\vec{m}\neq(0,\ldots,0)$ *являются слабо нормальными для* $\mathbf{f^t}$.

***Теорема* 2.1.** *Для того*, *чтобы для мультииндекса* $(n,\vec{m})\in\mathbb{Z}^{k+1}_+$, $\vec{m}\neq(0,\ldots,0)$ *и системы* $\mathbf{f^t}$ *задача* $\mathbf{A^t}$ *имела единственное решение*, *необходимо и достаточно*, *чтобы индекс* $(n,\vec{m})$ *был слабо нормальным для* $\mathbf{f^t}$, *т.е. rank* $H^t_{n,\vec{m}} = 2m$.

*Если rank* $H^t_{n,\vec{m}} = 2m$, *то при определенном выборе нормирующего числового множителя для решений задачи* $\mathbf{A^t}$ *справедливы представления*: *для* $j=1,\ldots,k$

$$Q^t_m(x) = Q^t_{n,\vec{m}}(x;\mathbf{f^t}) = D(n,\vec{m};x), \qquad (2.4)$$

$$P^t_j(x) = P^t_{n_j,n,\vec{m}}(x;\mathbf{f^t}) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d^j_p(n,\vec{m})e^{ipx}, \qquad (2.5)$$

$$R^t_j(x) = R^t_{j,n,\vec{m}}(x;\mathbf{f^t}) =$$

$$= \sum_{p=n+m+1}^{\infty}\left(d^j_p(n,\vec{m})e^{ipx} + d^j_{-p}(n,\vec{m})e^{-ipx}\right). \qquad (2.6)$$

*Доказательство*. Пусть искомый многочлен $Q^t_m(x)$ имеет вид (2.2). После преобразований получаем

$$Q^t_m(x)f^t_j(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{p=-m}^{m}u_p c^j_{l-p}\right)e^{ilx} = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{c}^j_l e^{ilx},$$

где

$$\tilde{c}^j_l = \sum_{p=-m}^{m} c^j_{l-p}u_p, \quad l\in\mathbb{Z}. \qquad (2.7)$$

Выберем коэффициенты $u_p$, $p=\overline{-m,m}$, многочлена $Q^t_m(x)$ так, чтобы

$$\tilde{c}^j_l = 0, \quad l=\pm(n_j+1),\ldots,\pm(n_j+m_j), \quad j=1,\ldots,k;$$

и положим

$$P^t_j(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j}\tilde{c}^j_p e^{ipx}.$$

Очевидно, выбранные таким образом многочлены $Q^t_m(x)$, $P^t_j(x)$ удовлетворяют условиям (1.2) и (2.3). Остаётся исследовать совместность системы уравнений

$$\sum_{p=-m}^{m} c^j_{l-p}u_p = 0, \qquad (2.8)$$

$$l=\pm(n_j+1),\ldots,\pm(n_j+m_j),\ j=1,\ldots,k.$$

Систему (2.8) можно записать в матричной форме

$$H^t_{n,\vec{m}}\cdot u^T = \theta^T,$$

где $u=(u_m,\ \ldots,\ u_1,\ u_0,\ u_{-1}\ \ldots,\ u_{-m})$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов, а $\theta$ – матрица-строка порядка $1\times(2m+1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (2.8) является однородной и в ней число неизвестных $2m+1$ на единицу больше числа уравнений $2m$, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что у системы (2.8) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (2.8) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда

$rank\, H^t_{n,\vec{m}} = 2m.$ В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0.$ Тем самым первая часть теоремы 2.1 доказана.

Докажем теперь равенства (2.4)–(2.6). Так как по предположению ранг матрицы $H^t_{n,\vec{m}}$ равен $2m$, то при некотором $s \in \{1,\ldots,2m+1\}$ определитель, полученный из элементов матрицы $H^t_{n,\vec{m}}$ в результате вычеркивания в ней $s$-го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $s = m+1.$ Тогда, зафиксировав неизвестное $u_0$, получим квадратную неоднородную систему

$$\sum_{p=-m}^{-1} c^j_{l-p} u_p + \sum_{p=1}^{m} c^j_{l-p} u_p = -c^j_l u_0\,,$$

$$l = \pm(n_j+1),\ldots,\pm(n_j+m_j), \quad j = 1,\ldots,k, \qquad (2.9)$$

главный определитель которой $\Delta^k(n,\vec{m}) \neq 0.$ Заметим, что $u_0 \neq 0.$ В противном случае система (2.9), а значит и система (2.8) имела бы только нулевое решение. Поскольку определитель $\Delta^k(n,\vec{m}) \neq 0,$ то система (2.9) имеет единственное ненулевое решение, и найти его можно по формулам Крамера:

$$u_p = \frac{\Delta^k_p(n,\vec{m})}{\Delta^k(n,\vec{m})}, \quad p = \overline{-m,m}, \;\; p \neq 0,$$

где $\Delta^k_p(n,\vec{m})$ – определитель, полученный из определителя $\Delta^k(n,\vec{m})$ заменой в нём $p$-го столбца на столбец свободных членов. Если положить $\Delta^k_0(n,\vec{m}) := u_0 \Delta^k(n,\vec{m}),$ то

$$Q^t_m(x) = \sum_{p=-m}^{m} u_p e^{ipx} = \sum_{p=-m}^{m} \frac{\Delta^k_p(n,\vec{m})}{\Delta^k(n,\vec{m})}\, e^{ipx}. \qquad (2.10)$$

Разлагая определитель $D(n,\vec{m};x)$ по элементам $(m+1)$-ой строки и сравнивая с (2.10), делаем вывод, что

$$Q^t_m(x) = u_0 \frac{D(n,\vec{m};x)}{\Delta^k(n,\vec{m})}. \qquad (2.11)$$

Сопоставив (2.7) и (2.10), замечаем, что для отыскания $\tilde{c}^j_p$ следует только в (2.10) $e^{ipx}$ заменить на $c^j_{l-p}$. Учитывая введенные обозначения, получаем, что

$$\tilde{c}^j_p = u_0 \frac{d^j_p(n,\vec{m};x)}{\Delta^k(n,\vec{m})}.$$

Следовательно, полином $P^t_j(x)$ и остаточный член $R^t_j(x)$ можно представить в виде

$$P^t_j(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n,\vec{m})} \sum_{p=-n_j}^{n_j} d^j_p(n,\vec{m})\, e^{ipx}\,, \qquad (2.12)$$

$$R^t_j(x) = \frac{u_0}{\Delta^k(n,\vec{m})} \times$$

$$\times \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left( d^j_p(n,\vec{m})\, e^{ipx} + d^j_{-p}(n,\vec{m})\, e^{-ipx} \right). \; (2.13)$$

Умножая равенства (2.11)–(2.13) на нормирующий множитель $\Delta^k(n,\vec{m})/u_0$, получим (2.4)–(2.6). В случае, если бы вычеркивая в матрице $H^t_{n,\vec{m}}$ столбец с номером $s \neq m+1$ получили определитель отличный от нуля, то рассуждая аналогично, также пришли бы к представлениям (2.4)–(2.6). Теорема 2.1 доказана. □

### 3 Замечания и следствия

Из представления (2.4) для многочлена $Q^t_m(x)$ следует, что компонента $m_j$ мультииндекса $\vec{m}$ определяет число коэффициентов тригонометрического ряда $f^t_j(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q^t_m(x)$. В частности, если $m_j = 0,$ то определитель $D(n,\vec{m};x)$ не содержит блоки $F^j_\pm$ и, следовательно, при построении многочлена $Q^t_m(x)$ тригонометрический ряд $f^t_j(x)$ не учитывается, а порядок мультииндекса $\vec{m}$ определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $\vec{m} = (m_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^k_+,$ то $m = m_1$ и тогда, как и в случае $k = 1,$ при нахождении $Q^t_m(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f^t_1(x)$. Для такого мультииндекса формула (2.4) совпадает с формулой для знаменателя тригонометрической аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(x)$ функции $f^t_1(x),$ которая доказана в [16] при более ограничительном условии $\Delta^1(n,\vec{m}) \neq 0.$ В [16] также установлено, что при $k = 1$ и выполнении условия $\Delta^1(n,\vec{m}) \neq 0$ задача $\mathbf{A^t}$ имеет единственное решение.

До сих пор предполагалось, что мультииндекс $\vec{m}$ является ненулевым. В случае, если $\vec{m} = (0,\ldots,0)$ – нулевой мультииндекс, решение задачи $\mathbf{A^t}$ очевидно: с точностью до числового множителя $Q^t_m(x) \equiv 1,$ а $P^t_j(x)$ – $n$-ая частная сумма тригонометрического ряда $f^t_j(x)$.

При доказательстве теоремы 2.1 никак не учитывалось наше предположение о сходимости рядов (1.1). Поэтому все утверждения теоремы остаются в силе, если ряды (1.1) являются формальными. Отметим, что в этом случае тригонометрические ряды, содержащиеся в формулировке теоремы 2.1 (см. равенства (2.6)), также являются формальными.

Следует также сказать, что если индекс $(n,\vec{m})$ не является слабо нормальным для $\mathbf{f^t}$, то многочлены $Q_m^t(x), P_1^t(x), ..., P_k^t(x)$, определяемые формулами (2.4) и (2.5), не являются решениями задачи $\mathbf{A^t}$. В частности, в примере 1.1 индекс (2, 1) не является слабо нормальным, и если вычислять, например, многочлен $Q_1^t(x)$ по формуле (2.4), то получим $Q_1^t(x) \equiv 0$. Этот пример также показывает, что для мультииндекса $(n,\vec{m})$, который не является слабо нормальным, коэффициенты многочленов $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ могут быть комплексными числами. Для слабо нормального мультииндекса это не так.

***Следствие* 3.1.** *Пусть мультииндекс* $(n,\vec{m})$ *является слабо нормальным для системы* $\mathbf{f^t}$. *Тогда многочлены* $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x), ..., P_k^t(x)$ *являются действительными тригонометрическими многочленами.*

*Доказательство*. По предположению коэффициенты тригонометрических рядов (1.1) являются действительными числами. Поэтому $c_{-p}^j = \bar{c}_p^j$, $j = 1,...,k$; $p = 1,2,...$. В этом случае справедливы равенства

$$\overline{D(n,\vec{m};x)} = D(n,\vec{m};x), \quad \overline{d_p^j(n,\vec{m})} = d_{-p}^j(n,\vec{m}).$$

Чтобы убедится в этом достаточно поменять местами равноотстоящие от краев строки и столбцы соответствующих определителей. Из предыдущих равенств и формул (2.4), (2.5) следует утверждение следствия 3.1. □

***Следствие* 3.2.** *Для того*, *чтобы задача* $\mathbf{A^t}$ *имела единственное решение для любого мультииндекса* $(n,\vec{m})$, *необходимо и достаточно*, *чтобы система* $\mathbf{f^t}$ *была слабо совершенной*.

*Доказательство*. Для мультииндекса $(n,\vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} \neq (0,...,0)$ следствие вытекает из теоремы 2.1, а для мультииндекса $(n,\vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $\vec{m} = (0,...,0)$ – из сделанного ранее замечания. □

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Hermite*, *C*. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
2. *Mahler*, *K*. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I / K. Mahler // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1932. – Vol. 166, № 2. – P. 118–136.
3. *Mahler*, *K*. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II / K. Mahler // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1932. – Vol. 166, № 3. – P. 137–150.
4. *Mahler*, *K*. Perfect systems / K. Mahler // Compositio Mathematica. – 1968. – Vol. 19, № 2. – P. 95–166.
5. *Бейкер*, *Дж. мл*. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
6. *Никишин*, *Е.М*. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988. – 256 с.
7. *Аппроксимации Паде*, *непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, вып. 6 (402). – С. 37–122.
8. *Aptekarev*, *A.I*. Large *n* limit of Gaussian random matrices with external source, II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Communications in Mathematical Physics. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.
9. *Beckermann*, *B*. How well does the Hermite – Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, A.C. Matos, F. Wielonsky // Mathematics of Computation. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.
10. *Аптекарев*, *А.И*. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.
11. *Суетин*, *С.П*. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, вып. 1 (343). – С. 45–142.
12. *Суетин*, *С.П*. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2015. – Т. 70, вып. 5 (425). – С. 121–174.
13. *Chudnovsky*, *G*. On the method of Thue-Siegel / G. Chudnovsky //Ann. of Math. – 1983. – Vol. 117, № 2. – P. 325–382.
14. *Старовойтов*, *А.П*. О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде второго рода / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Д.А. Волков // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 2 (39). – С. 92–96.
15. *Старовойтов*, *А.П*. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–36.
16. *Лабыч*, *Ю.А*. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.


*Поступила в редакцию* 22.01.2023.

**Информация об авторах**

*Старовойтов Александр Павлович* – д.ф.-м.н., профессор
*Кечко Елена Петровна* – к.ф.-м.н., доцент
*Оснач Татьяна Михайловна* – аспирантка